抛物线

一、单选题

1．已知 A 为抛物线 C:y^2=2px（p>0）上一点，点 A 到 C 的焦点的距离为 12，到 y 轴的距离为 9，则 p=（　　）

A．2　　B．3　　C．6　　D．9

2．抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点到直线 $y=x+1$ 的距离为 $\sqrt{2}$，则 $p=$（　　）

A．1　　B．2　　C．$2\sqrt{2}$　　D．4

3．已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，点 M 在抛物线上，且 $|MF|=3$，则 M 的横坐标为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．3

4．设抛物线的顶点为 O，焦点为 F，准线为 l．P 是抛物线上异于 O 的一点，过 P 作 $PQ\perp l$ 于 Q，则线段 FQ 的垂直平分线（　　）.

A．经过点 O　　B．经过点 P

C．平行于直线 OP　　D．垂直于直线 OP

5．设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，过抛物线上一点 A 作 l 的垂线，垂足为 B，设 $C(2p,0)$，AF 与 BC 相交于点 D.若 $|CF|=|AF|$，且 $\triangle ACD$ 的面积为 $2\sqrt{2}$，则点 F 到准线 l 的距离是（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

6．已知抛物线 $C:y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，准线为 l，O 为坐标原点，点 M 在 C 上，直线 MF 与 l 交于点 N．若 $\angle MFO=\frac{\pi}{3}$，则 $\frac{|MF|}{|MN|}=$

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{2}{3}$

7．在直角坐标系 xOy 中，抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 为 C 上一点，PQ 垂直 l 于点 Q，M，N 分别为 PQ，PF 的中点，直线 MN 与 x 轴交于点 R，若 $\angle NFR=60°$，则 $NR=$

A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．$2\sqrt{3}$　　D．3

8．已知圆 $x^2+y^2=16$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线 l 交于 A，B 两点，且 $|AB|=2\sqrt{15}$，P 为该抛物线上一点，$PQ\perp l$ 于点 Q，点 F 为该抛物线的焦点. 若 $\triangle PQF$ 是等边三角形，则 $\triangle PQF$ 的面积为（　　）

A．$4\sqrt{3}$　　B．4　　C．$2\sqrt{3}$　　D．2

9．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的两条渐近线与抛物线$x^2=4\sqrt{3}y$的准线分别交于$A$、$B$两点，$O$为坐标原点，$\triangle AOB$的面积为$\sqrt{3}$，则双曲线的离心率为（　　）

A．$\frac{\sqrt{39}}{6}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{13}$

10．已知点P是抛物线$y^2=2x$上的动点，过点P作直线$x=-1$的垂线，垂足为M，点A的坐标是$\left(\frac{7}{2},4\right)$，则$|AP|+|PM|$的最小值是（　　）

A．$\frac{7}{2}$　　B．5　　C．$\frac{9}{2}$　　D．$\frac{11}{2}$

11．已知A,B为抛物线$x^2=2py(p>0)$上的两个动点，以AB为直径的圆C经过抛物线的焦点F，且面积为2π，若过圆心C作该抛物线准线l的垂线CD，垂足为D，则$|CD|$的最大值为

A．2　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

12．设抛物线$y^2=2px$（$p>0$）的焦点为F，准线为l，过焦点的直线分别交抛物线于A,B两点，分别过A,B作l的垂线，垂足为C,D．若$|AF|=3|BF|$，且三角形CDF的面积为$\sqrt{3}$，则p的值为（　　）

A．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$\frac{2\sqrt{6}}{3}$

二、多选题

13．设A，B是抛物线$y=x^2$上的两点，O是坐标原点，下列结论成立的是（　　）

A．若$OA\perp OB$，则$|OA||OB|\geq 2$

B．若$OA\perp OB$，直线AB过定点$(1,0)$

C．若$OA\perp OB$，O到直线AB的距离不大于1

D．若直线AB过抛物线的焦点F，且$|AF|=\frac{1}{3}$，则$|BF|=1$

14．已知抛物线$C:y^2=2px$过点$P(1,1)$则下列结论正确的是(　　)

A．点P到抛物线焦点的距离为$\frac{3}{2}$

B．过点P作过抛物线焦点的直线交抛物线于点Q，则$\triangle OPQ$的面积为$\frac{5}{32}$

C．过点P与抛物线相切的直线方程为$x-2y+1=0$

D．过点P作两条斜率互为相反数的直线交抛物线于M，N点则直线MN的斜率为定值

15．抛物线C：$x^2=4y$的焦点为F，P为其上一动点，设直线l与抛物线C相交于A，B两点，点$M\left(2,2\right)$，下列结论正确的是（　　）

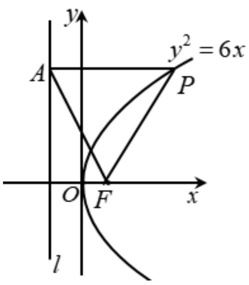
A．$|PM|+|PF|$的最小值为 3

B．抛物线 C 上的动点到点$H\left(0,3\right)$的距离最小值为 3

C．存在直线l，使得A，B两点关于$x+y-3=0$对称

D．若过A、B的抛物线的两条切线交准线于点T，则A、B两点的纵坐标之和最小值为 2

16．在平面直角坐标系xOy中，抛物线$y^2=6x$的焦点为F，准线为l，P为抛物线上一点，$PA\perp l$，A 为垂足.若直线AF的斜率$k=-\sqrt{3}$，则下列结论正确的是（　　）



A．准线方程为$x=-3$　　　　B．焦点坐标$F\left(\dfrac{3}{2},0\right)$

C．点P的坐标为$\left(\dfrac{9}{2},3\sqrt{3}\right)$　　　　D．PF的长为 3

三、填空题

17．已知抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，过点$(-1,0)$的直线与C交于A，B两点，若$4|FA|+|FB|$的最小值为 19，则抛物线C的标准方程为______.

18．已知抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线l与x轴的交点为A，P是抛物线C上的点，且$PF\perp x$轴. 若以AF为直径的圆截直线AP所得的弦长为2，则实数p的值为__________.

19．已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点F为椭圆$\dfrac{4x^2}{9}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的右顶点，直线$l$是抛物线$C$的准线，点$A$在抛物线$C$上，过$A$作$AB\perp l$，垂足为$B$，若直线$BF$的斜率$k_{BF}=-\sqrt{3}$，则$\triangle AFB$的面积为______.

20．已知O为坐标原点，抛物线C：$y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点为F，P为C上一点，PF与x轴垂直，Q为x轴上一点，且$PQ\perp OP$，若$|FQ|=6$，则C的准线方程为______.

21．抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，准线为l，M是C上在第一象限内的一点，点N在l上，已知

$MF \perp NF$，$|MF| = 5$，则直线MN与y轴交点P的坐标为___________.

22．已知抛物线$C: y^2 = 4x$，焦点为F，点M为抛物线C上的点，且$|FM| = 6$，则M的横坐标是_______；作$MN \perp x$轴于N，则$S_{\triangle FMN} =$_______.

四、解答题

23．设抛物线C：$y^2 = 4x$的焦点为F，过F且斜率为$k(k > 0)$的直线l与C交于A，B两点，$|AB| = 8$.

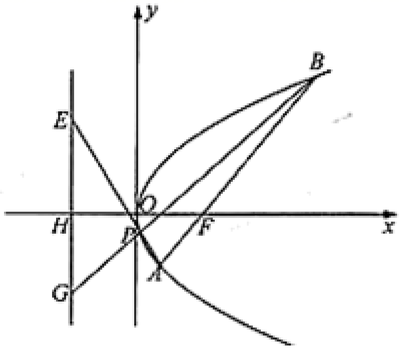
（1）求l的方程；

（2）求过点A，B且与C的准线相切的圆的方程.

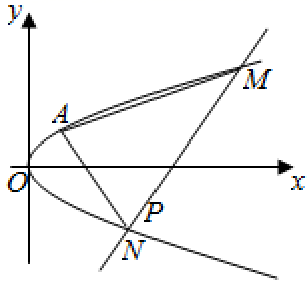
24．已知抛物线C：$y^2 = 2px(p > 0)$的焦点为F，过F且斜率为$\dfrac{4}{3}$的直线l与抛物线C交于A，B两点，B在x轴的上方，且点B的横坐标为4.

（1）求抛物线C的标准方程；

（2）设点P为抛物线C上异于A，B的点，直线PA与PB分别交抛物线C的准线于E，G两点，x轴与准线的交点为H，求证：$HG \cdot HE$为定值，并求出定值.



25．已知抛物线 C；$y^2=2px$ 过点 $A(1,1)$.



(1) 求抛物线 C 的方程；

(2) 过点 $P(3,-1)$ 的直线与抛物线 C 交于 M，N 两个不同的点(均与点 A 不重合)，设直线 AM，AN 的斜率分别为 k_1，k_2，求证：$k_1\cdot k_2$ 为定值.

26．设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，右顶点为 A，离心率为 $\dfrac{1}{2}$. 已知 A 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，F 到抛物线的准线 l 的距离为 $\dfrac{1}{2}$.

（I）求椭圆的方程和抛物线的方程；

（II）设 l 上两点 P，Q 关于 x 轴对称，直线 AP 与椭圆相交于点 B（B 异于点 A），直线 BQ 与 x 轴相交于点 D. 若 $\triangle APD$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，求直线 AP 的方程.

27．已知动点M到定点$F(1,0)$的距离比M到定直线$x=-2$的距离小 1.

（1）求点M的轨迹C的方程;

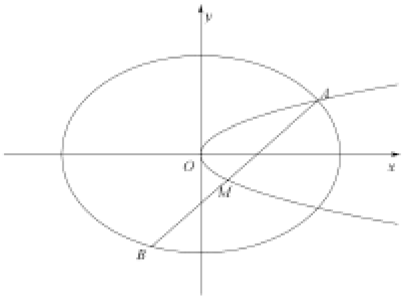
（2）过点F任意作互相垂直的两条直线l_1和l_2，分别交曲线C于点A,B和K,N．设线段AB，KN的中点分别为P,Q，求证：直线PQ恒过一个定点.

28．已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点F到准线的距离为 2.

（1）求 C 的方程;

（2）已知 O 为坐标原点，点 P 在 C 上，点 Q 满足$\overrightarrow{PQ}=9\overrightarrow{QF}$，求直线$OQ$斜率的最大值.

29．如图，已知椭圆$C_1:\frac{x^2}{2}+y^2=1$，抛物线$C_2:y^2=2px(p>0)$，点 A 是椭圆C_1与抛物线C_2的交点，过点 A 的直线 l 交椭圆C_1于点 B，交抛物线C_2于 M（B，M不同于 A）.



（Ⅰ）若 $p=\frac{1}{16}$，求抛物线C_2的焦点坐标；

（Ⅱ）若存在不过原点的直线 l 使 M 为线段 AB 的中点，求 p 的最大值.

30．抛物线 C 的顶点为坐标原点 O．焦点在 x 轴上，直线 l：$x=1$交 C 于 P，Q 两点，且$OP\perp OQ$．已知点$M(2,0)$，且$\odot M$ 与 l 相切.

（1）求 C，$\odot M$ 的方程；

（2）设A_1,A_2,A_3是 C 上的三个点，直线A_1A_2，A_1A_3均与$\odot M$ 相切．判断直线A_2A_3与$\odot M$ 的位置关系，并说明理由.

参考答案

1．C　2．B　3．C　4．B　5．D　6．C　7．A　8．A　9．C　10．D　11．A　12．C

13．ACD　14．BCD　15．AD　16．BC

17．$y^2=12x$　18．$2\sqrt{2}$　19．$9\sqrt{3}$　20．$x=-\dfrac{3}{2}$　21．$(0,2)$　22．5　$4\sqrt{5}$

23．【解析】（1）由题意得 F（1，0），l 的方程为 $y=k(x-1)$（$k>0$）．

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．

由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ y^2=4x \end{cases}$ 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$．

$\Delta=16k^2+16=0$，故 $x_1+x_2=\dfrac{2k^2+4}{k^2}$．

所以 $|AB|=|AF|+|BF|=(x_1+1)+(x_2+1)=\dfrac{4k^2+4}{k^2}$．

由题设知 $\dfrac{4k^2+4}{k^2}=8$，解得 $k=-1$（舍去），$k=1$．

因此 l 的方程为 $y=x-1$．

（2）由（1）得 AB 的中点坐标为（3，2），所以 AB 的垂直平分线方程为

$y-2=-(x-3)$，即 $y=-x+5$．

设所求圆的圆心坐标为（x_0，y_0），则

$\begin{cases} y_0=-x_0+5, \\ (x_0+1)^2=\dfrac{(y_0-x_0+1)^2}{2}+16. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_0=3, \\ y_0=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0=11, \\ y_0=-6. \end{cases}$

因此所求圆的方程为

$(x-3)^2+(y-2)^2=16$ 或 $(x-11)^2+(y+6)^2=144$．

24．【解析】（1）由题意得：$F(\dfrac{p}{2},0)$，

因为点 B 的横坐标为 4，且 B 在 x 轴的上方，

所以 $B(4,\sqrt{8p})$，

因为 AB 的斜率为 $\dfrac{4}{3}$，

所以 $\dfrac{\sqrt{8p}}{4-\dfrac{p}{2}}=\dfrac{4}{3}$，整理得：$p+3\sqrt{2}\sqrt{p}-8=0$，

即 $(\sqrt{p}-\sqrt{2})(\sqrt{p}+4\sqrt{2})=0$，得 $p=2$，

抛物线C的方程为：$y^2=4x$.

（2）由（1）得：$B(4,4)$，$F(1,0)$，准线方程$x=-1$，

直线l的方程：$y=\frac{4}{3}(x-1)$，

由$\begin{cases}y=\frac{4}{3}(x-1)\\y^2=4x\end{cases}$解得$x=\frac{1}{4}$或$x=4$，于是得$A(\frac{1}{4},-1)$.

设点$P(\frac{n^2}{4},n)$，又题意$n\neq\pm1$且$n\neq\pm4$，

所以直线PA：$y+1=\frac{4}{n-1}\left(x-\frac{1}{4}\right)$，令$x=-1$，得$y=-\frac{n+4}{n-1}$，

即$HE=\left|-\frac{n+4}{n-1}\right|$，

同理可得：$HG=\left|\frac{4n-4}{n+4}\right|$，

$HG\cdot HE=\left|-\frac{n+4}{n-1}\right|\cdot\left|\frac{4n-4}{n+4}\right|=4$.

25.【解析】（1）由题意得$2p=1$，所以抛物线方程为$y^2=x$.

（2）设$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，直线 MN 的方程为$x=t\left(y+1\right)+3$，

代入抛物线方程得$y^2-ty-t-3=0$.

所以$\Delta=\left(t+2\right)^2+8>0$，$y_1+y_2=t$，$y_1y_2=-t-3$.

所以$k_1\cdot k_2=\frac{y_1-1}{x_1-1}\cdot\frac{y_2-1}{x_2-1}=\frac{y_1-1}{y_1^2-1}\cdot\frac{y_2-1}{y_2^2-1}=\frac{1}{\left(y_1+1\right)\left(y_2+1\right)}=\frac{1}{y_1y_2+y_1+y_2+1}=\frac{1}{-t-3+t+1}=-\frac{1}{2}$，

所以k_1，k_2是定值.

26.【解析】（Ⅰ）解：设F的坐标为$(-c,0)$，依题意，$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$\frac{p}{2}=a$，$a-c=\frac{1}{2}$，解得$a=1$，$c=\frac{1}{2}$，

$p=2$，于是$b^2=a^2-c^2=\frac{3}{4}$.

所以，椭圆的方程为$x^2+\frac{4y^2}{3}=1$，抛物线的方程为$y^2=4x$.

（Ⅱ）解：设直线AP的方程为$x=my+1\left(m\neq0\right)$，与直线$l$的方程$x=-1$联立，可得点$P\left(-1,-\frac{2}{m}\right)$，故

$Q\left(-1,\frac{2}{m}\right)$. 将$x=my+1$与$x^2+\frac{4y^2}{3}=1$联立，消去$x$，整理得$\left(3m^2+4\right)y^2+6my=0$，解得$y=0$，或

$y=\frac{-6m}{3m^2+4}$. 由点B异于点A，可得点$B\left(\frac{-3m^2+4}{3m^2+4},\frac{-6m}{3m^2+4}\right)$. 由$Q\left(-1,\frac{2}{m}\right)$，可学*科. 网得直线$BQ$的方程

为$\left(\frac{-6m}{3m^2+4}-\frac{2}{m}\right)(x+1)-\left(\frac{-3m^2+4}{3m^2+4}+1\right)\left(y-\frac{2}{m}\right)=0$，令$y=0$，解得$x=\frac{2-3m^2}{3m^2+2}$，故$D\left(\frac{2-3m^2}{3m^2+2},0\right)$. 所以

$|AD|=1-\frac{2-3m^2}{3m^2+2}=\frac{6m^2}{3m^2+2}$. 又因为$\triangle APD$的面积为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，故$\frac{1}{2}\times\frac{6m^2}{3m^2+2}\times\frac{2}{|m|}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，整理得

$3m^2-2\sqrt{6}|m|+2=0$，解得$|m|=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以$m=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.

所以，直线AP的方程为$3x+\sqrt{6}y-3=0$，或$3x-\sqrt{6}y-3=0$.

27.【解析】(Ⅰ) 由题意可知：动点M到定点$F(1,0)$的距离等于M到定直线$x=-1$的距离. 根据抛物线的定义可知，点M的轨迹C是抛物线.

$\because p=2$，$\therefore$抛物线方程为：$y^2=4x$

(Ⅱ) 设A,B两点坐标分别为$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，则点P的坐标为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

由题意可设直线l_1的方程为$y=k(x-1)(k\neq0)$.

由$\begin{cases}y^2=4x\\y=k(x-1)\end{cases}$，得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

$\Delta=(2k^2+4)-4k^4=16k^2+16>0$.

因为直线l_1与曲线C于A,B两点，所以$x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2},y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=\frac{4}{k}$.

所以点P的坐标为$\left(1+\frac{2}{k^2},\frac{2}{k}\right)$.

由题知，直线l_2的斜率为$-\frac{1}{k}$，同理可得点Q的坐标为$(1+2k^2,-2k)$.

当$k\neq\pm1$时，有$1+\frac{2}{k^2}\neq1+2k^2$，此时直线$PQ$的斜率$k_{PQ}=\frac{\frac{2}{k}+2k}{1+\frac{2}{k^2}-1-2k^2}=\frac{k}{1-k^2}$.

所以，直线PQ的方程为$y+2k=\frac{k}{1-k^2}(x-1-2k^2)$，整理得$yk^2+(x-3)k-y=0$.

于是，直线PQ恒过定点$E(3,0)$；

当$k=\pm1$时，直线PQ的方程为$x=3$，也过点$E(3,0)$.

综上所述，直线PQ恒过定点$E(3,0)$.

28.【解析】(1) 抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，

由题意，该抛物线焦点到准线的距离为$\frac{p}{2}-\left(-\frac{p}{2}\right)=p=2$，

所以该抛物线的方程为$y^2=4x$；

（2）设$Q(x_0,y_0)$，则$\overrightarrow{PQ}=9\overrightarrow{QF}=(9-9x_0,-9y_0)$，

所以$P(10x_0-9,10y_0)$，

由 P 在抛物线上可得$(10y_0)^2=4(10x_0-9)$，即$x_0=\frac{25y_0^2+9}{10}$，

所以直线OQ的斜率$k_{OQ}=\frac{y_0}{x_0}=\frac{y_0}{\frac{25y_0^2+9}{10}}=\frac{10y_0}{25y_0^2+9}$，

当$y_0=0$时，$k_{OQ}=0$；

当$y_0\neq 0$时，$k_{OQ}=\frac{10}{25y_0+\frac{9}{y_0}}$，

当$y_0>0$时，因为$25y_0+\frac{9}{y_0}\geq 2\sqrt{25y_0\cdot\frac{9}{y_0}}=30$，

此时$0<k_{OQ}\leq\frac{1}{3}$，当且仅当$25y_0=\frac{9}{y_0}$，即$y_0=\frac{3}{5}$时，等号成立；

当$y_0<0$时，$k_{OQ}<0$；

综上，直线OQ的斜率的最大值为$\frac{1}{3}$.

29.【解析】(Ⅰ) 当$p=\frac{1}{16}$时，C_2的方程为$y^2=\frac{1}{8}x$，故抛物线C_2的焦点坐标为$(\frac{1}{32},0)$；

(Ⅱ) 设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x_0,y_0)$，$l:x=\lambda y+m$，

由$\begin{cases}x^2+2y^2=2\\x=\lambda y+m\end{cases}\Rightarrow(2+\lambda^2)y^2+2\lambda my+m^2-2=0$，

$\therefore y_1+y_2=\frac{-2\lambda m}{2+\lambda^2},y_0=\frac{-\lambda m}{2+\lambda^2},x_0=\lambda y_0+m=\frac{2m}{2+\lambda^2}$，

由 M 在抛物线上，所以$\frac{\lambda^2m^2}{(2+\lambda^2)^2}=\frac{4pm}{2+\lambda^2}\Rightarrow\frac{\lambda^2m}{2+\lambda^2}=4p$，

又$\begin{cases}y^2=2px\\x=\lambda y+m\end{cases}\Rightarrow y^2=2p(\lambda y+m)\Rightarrow y^2-2p\lambda y-2pm=0$，

$\therefore y_1+y_0=2p\lambda$，$\therefore x_1+x_0=\lambda y_1+m+\lambda y_0+m=2p\lambda^2+2m$，

$\therefore x_1=2p\lambda^2+2m-\dfrac{2m}{2+\lambda^2}$.

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ y^2=2px\end{cases}\Rightarrow x^2+4px=2$, 即 $x^2+4px-2=0$

$\Rightarrow x_1=\dfrac{-4p+\sqrt{16p^2+8}}{2}=-2p+\sqrt{4p^2+2}$

$\Rightarrow -2p+\sqrt{4p^2+2}=2p\lambda^2+2m\cdot\dfrac{1+\lambda^2}{2+\lambda^2}=2p\lambda^2+\dfrac{8p}{\lambda^2}+8p\geq 16p$,

所以 $\sqrt{4p^2+2}\geq 18p$， $p^2\leq\dfrac{1}{160}$， $p\leq\dfrac{\sqrt{10}}{40}$,

所以， p 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{40}$， 此时 $A(\dfrac{2\sqrt{10}}{5},\dfrac{\sqrt{5}}{5})$.

法 2：设直线 $l:x=my+t(m\neq 0,t\neq 0)$， $A(x_0,y_0)$.

将直线 l 的方程代入椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 得：$(m^2+2)y^2+2mty+t^2-2=0$,

所以点 M 的纵坐标为 $y_M=-\dfrac{mt}{m^2+2}$.

将直线 l 的方程代入抛物线 $C_2:y^2=2px$ 得： $y^2-2pmy-2pt=0$,

所以 $y_0y_M=-2pt$， 解得 $y_0=\dfrac{2p(m^2+2)}{m}$， 因此 $x_0=\dfrac{2p(m^2+2)^2}{m^2}$,

由 $\dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$ 解得 $\dfrac{1}{p^2}=4\left(m+\dfrac{2}{m}\right)^2+2\left(m+\dfrac{2}{m}\right)^2..160$,

所以当 $m=\sqrt{2},t=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ 时， p 取到最大值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{40}$.

30.【解析】（1）依题意设抛物线 $C:y^2=2px(p>0),P(1,y_0),Q(1,-y_0)$,

$\because OP\perp OQ,\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1-y_0^2=1-2p=0,\therefore 2p=1$,

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=x$,

$M(0,2)$,$\odot M$ 与 $x=1$ 相切，所以半径为 1，

所以 $\odot M$ 的方程为 $(x-2)^2+y^2=1$；

（2）设 $A_1(x_1y_1),A_2(x_2,y_2),A_3(x_3,y_3)$

若 A_1A_2 斜率不存在，则 A_1A_2 方程为 $x=1$ 或 $x=3$,

若 A_1A_2 方程为 $x=1$，根据对称性不妨设 $A_1(1,1)$,

则过 A_1 与圆 M 相切的另一条直线方程为 $y=1$，

此时该直线与抛物线只有一个交点，即不存在 A_3，不合题意；

若 A_1A_2 方程为 $x=3$，根据对称性不妨设 $A_1(3,\sqrt{3}),A_2(3,-\sqrt{3})$,

则过 A_1 与圆 M 相切的直线 A_1A_3 为$y-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$，

又$k_{A_1A_3}=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\frac{1}{y_1+y_3}=\frac{1}{\sqrt{3}+y_3}=\frac{\sqrt{3}}{3},\therefore y_3=0$，

$x_3=0,A_3(0,0)$，此时直线 A_1A_3,A_2A_3 关于 x 轴对称，

所以直线 A_2A_3 与圆 M 相切；

若直线 A_1A_2,A_1A_3,A_2A_3斜率均存在，

则$k_{A_1A_2}=\frac{1}{y_1+y_2},k_{A_1A_3}=\frac{1}{y_1+y_3},k_{A_2A_3}=\frac{1}{y_2+y_3}$,

所以直线 A_1A_2 方程为 $y-y_1=\dfrac{1}{y_1+y_2}(x-x_1)$，

整理得 $x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$，

同理直线 A_1A_3 的方程为 $x-(y_1+y_3)y+y_1y_3=0$，

直线 A_2A_3 的方程为 $x-(y_2+y_3)y+y_2y_3=0$，

$\because$ A_1A_2 与圆 M 相切，$\therefore$ $\frac{|2+y_1y_2|}{\sqrt{1+(y_1+y_2)^2}}=1$

整理得 $(y_1^2-1)y_2^2+2y_1y_2+3-y_1^2=0$，

A_1A_3 与圆 M 相切，同理 $(y_1^2-1)y_3^2+2y_1y_3+3-y_1^2=0$

所以 y_2,y_3 为方程 $(y_1^2-1)y^2+2y_1y+3-y_1^2=0$的两根，

$y_2+y_3=-\frac{2y_1}{y_1^2-1},y_2\cdot y_3=\frac{3-y_1^2}{y_1^2-1}$,

M 到直线 A_2A_3 的距离为：$\frac{|2+y_2y_3|}{\sqrt{1+(y_2+y_3)^2}}=\frac{|2+\frac{3-y_1^2}{y_1^2-1}|}{\sqrt{1+(-\frac{2y_1}{y_1^2-1})^2}}=\frac{|y_1^2+1|}{\sqrt{(y_1^2-1)^2+4y_1^2}}=\frac{y_1^2+1}{y_1^2+1}=1$，

所以直线 A_2A_3 与圆 M 相切；

综上若直线 A_1A_2,A_1A_3 与圆 M 相切，则直线 A_2A_3 与圆 M 相切.