双曲线

一、单选题

1．点$(3,0)$到双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的一条渐近线的距离为（　　）

A．$\frac{9}{5}$　　B．$\frac{8}{5}$　　C．$\frac{6}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

2．已知双曲线C：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的两条渐近线互相垂直，则$C$的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．3

3．双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$过点$\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，且离心率为$2$，则该双曲线的标准方程为（　　）

A．$x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　B．$\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　C．$x^2-\frac{\sqrt{3}y^2}{3}=1$　　D．$\frac{\sqrt{3}x^2}{3}-y^2=1$

4．若双曲线$mx^2-y^2=1(m>0)$的离心率为2，则$m=$（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{1}{3}$或3　　D．3

5．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线与直线$2x-y+3=0$平行，则该双曲线的离心率是（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{5}$

6．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ \ b>0)$的一条渐近线方程为$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$，且与椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$有公共焦点.则$C$的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{10}=1$　　B．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

C．$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$　　D．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

7．双曲线C：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$的右焦点为$F$，点$P$在$C$的一条渐近线上，$O$为坐标原点，若$|PO|=|PF|$，则△$PFO$的面积为

A．$\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　B．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$3\sqrt{2}$

8．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点与抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点重合，抛物线的准线交双曲线于$A$，$B$两点，交双曲线的渐近线于$C$、$D$两点，若$|CD|=\sqrt{2}|AB|$．则双曲线的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

9．若 A,B 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 上关于原点对称的两点，点 P 是双曲线 C 的右支上位于第一象限的动点，记 PA,PB 的斜率分别为 k_1,k_2，且 $k_1\cdot k_2=\dfrac{1}{4}$，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{5}$

10．设双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2 过 F_1 的直线 l 交双曲线左支于 A，B 两点，则 $|AF_2|+|BF_2|$ 的最小值为（　　）

A．10　　B．11　　C．12　　D．13

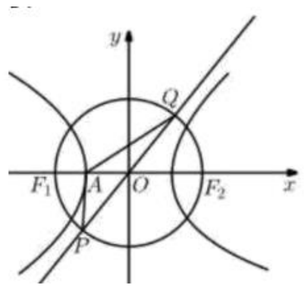
11．已知椭圆 C_1 和双曲线 C_2 有公共焦点 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，C_1 和 C_2 在第一象限的交点为 P，$\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$ 且双曲线的虚轴长为实轴长的 $\sqrt{2}$ 倍，则椭圆的离心率为（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\sqrt{2}$

12．过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 右焦点 F_2 的直线交两渐近线于 P,Q 两点，$\angle OPQ=90^\circ$，O 为坐标原点，且 ΔOPQ 内切圆的半径为 $\dfrac{a}{3}$，则该双曲线的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　C．$\sqrt{10}$　　D．$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

13．已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左右焦点分别为 F_1、F_2、A 为双曲线的左顶点，以 F_1F_2 为直径的圆交双曲线的一条渐近线于 P、Q 两点，且 $\angle PAQ=\dfrac{2\pi}{3}$，则该双曲线的离心率为（　　）



A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{21}}{3}$　　D．$\sqrt{13}$

14．已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0$，$b>0)$ 的一条渐近线被圆 $x^2+y^2-10y=0$ 截得的线段长不小于 8，则双曲线 C 的离心率的取值范围为（　　）

A．$\left(0,\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)$　　B．$\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3},+\infty\right)$　　C．$\left(0,\dfrac{5}{3}\right)$　　D．$\left[\dfrac{5}{3},+\infty\right)$

二、多选题

15．已知曲线$C:mx^2+ny^2=1$．（　　）

A．若 $m>n>0$，则 C 是椭圆，其焦点在 y 轴上

B．若 $m=n>0$，则 C 是圆，其半径为$\sqrt{n}$

C．若 $mn<0$，则 C 是双曲线，其渐近线方程为$y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$

D．若 $m=0$，$n>0$，则 C 是两条直线

16．已知F_1，F_2为双曲线 C：$x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 的左、右焦点，在双曲线右支上取一点 P，使得 $PF_1\perp PF_2$，直线 PF_2 与 y 轴交于点 Q，连接 QF_1，$\triangle PQF_1$，的内切圆圆心为 I，则下列结论正确的有（　　）

A．F_1，F_2，P，I 四点共圆

B．$\triangle PQF_1$ 的内切圆半径为 1

C．I 为线段 OQ 的三等分点

D．PF_1 与其中一条渐近线垂直

17．设F_1，F_2分别是双曲线$C:x^2-\frac{y^2}{b}=1$的左右焦点，过F_2作x轴的垂线与 C 交于 A，B 两点，若$\triangle ABF_1$为正三角形，则（　　）

A．$b=2$

B．C的焦距为$2\sqrt{5}$

C．C的离心率为$\sqrt{3}$

D．$\triangle ABF_1$的面积为$4\sqrt{3}$

18．已知双曲线C的左、右焦点分别为F_1、F_2，过F_2的直线与双曲线的右支交于A、B两点，若$|AF_1|=|BF_2|=2|AF_2|$，则（　　）

A．$\angle AF_1B=\angle F_1AB$

B．双曲线的离心率$e=\frac{\sqrt{33}}{3}$

C．双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}x$

D．原点O在以F_2为圆心，AF_2为半径的圆上

19．已知动点P在双曲线$C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$上，双曲线C的左、右焦点分别为F_1、F_2，下列结论正确的是（　　）

A．C的离心率为2

B．C的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

C．动点P到两条渐近线的距离之积为定值

D．当动点 P 在双曲线 C 的左支上时，$\frac{|PF_1|}{|PF_2|^2}$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$

20．在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, A， B 分别是双曲线 C 的左，右顶点，点 P 是双曲线 C 的右支上位于第一象限的动点，记 PA， PB 的斜率分别为 k_1,k_2，则（　　）

A．双曲线 C 的焦点到其一条渐近线的距离为 1 时，双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$

B．双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$

C．k_1k_2 为定值

D．存在点 P，使得 $k_1+k_2=1$

三、填空题

21．设双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ （a>0，b>0)的一条渐近线为 $y=\sqrt{2}\,x$，则 C 的离心率为_________.

22．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的离心率为 2，则该双曲线的渐近线方程为_______________

23．双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 的右焦点到直线 $x+2y-8=0$ 的距离为________.

24．已知双曲线 $C:\frac{x^2}{m}-y^2=1(m>0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x+my=0$，则 C 的焦距为_________.

25．已知 F 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，A 为 C 的右顶点，B 为 C 上的点，且 BF 垂直于 x 轴.若 AB 的斜率为 3，则 C 的离心率为______________.

26．已知 F_1、F_2 分别是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左右焦点，点 P 在双曲线右支上且不与顶点重合，过 F_2 作 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线的垂线，垂足为A， O 为坐标原点，若 $|OA|=\sqrt{3}b$，则该双曲线的离心率为

______________.

27．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，左顶点为 A，以 F 为圆心，$|FA|$ 为半径的圆交 C 的右支于 M， N 两点，且线段 AM 的垂直平分线经过点 N，则 C 的离心率为_________.

28．已知双曲线 $C:\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$，则 C 的右焦点的坐标为_________；C 的焦点到其渐近线的距离是

_________.

四、解答题

29．在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F_1\left(-\sqrt{17},0\right)$、$F_2\left(\sqrt{17},0\right)$，$|MF_1|-|MF_2|=2$，点 M 的轨迹为 C.

（1）求 C 的方程；

（2）设点 T 在直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 上，过 T 的两条直线分别交 C 于 A、B 两点和 P，Q 两点，且 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

30．已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的右焦点 F 与抛物线 $y^2=8x$ 的焦点重合，一条渐近线的倾斜角为 30^o.

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）经过点 F 的直线与双曲线的右支交与 A,B 两点，与 y 轴交与 P 点，点 P 关于原点的对称点为点 Q，求证：$S_{\triangle QAB}>\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

参考答案

1．A　2．A　3．A　4．D　5．D　6．B　7．A　8．A　9．A　10．B　11．B　12．B　13．C　14．D

15．ACD　16．ABD　17．ACD　18．ABC　19．AC　20．AC

21．$\sqrt{3}$　22．$y=\pm\sqrt{3}x$　23．$\sqrt{5}$　24．4　25．2　26．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　27．$\frac{4}{3}$　28．$(3,0)$　　$\sqrt{3}$

29．【解析】因为$|MF_1|-|MF_2|=2<|F_1F_2|=2\sqrt{17}$，

所以，轨迹C是以点F_1、F_2为左、右焦点的双曲线的右支，

设轨迹C的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则$2a=2$，可得$a=1$，$b=\sqrt{17-a^2}=4$，

所以，轨迹C的方程为$x^2-\frac{y^2}{16}=1(x\geq 1)$；

（2）设点$T\left(\frac{1}{2},t\right)$，若过点$T$的直线的斜率不存在，此时该直线与曲线$C$无公共点，

不妨直线AB的方程为$y-t=k_1\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即$y=k_1x+t-\frac{1}{2}k_1$，

联立$\begin{cases}y=k_1x+t-\frac{1}{2}k_1\\16x^2-y^2=16\end{cases}$，消去$y$并整理可得$\left(k_1^2-16\right)x^2+k_1\left(2t-k_1\right)x+\left(t-\frac{1}{2}k_1\right)^2+16=0$，

设点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，则$x_1>\frac{1}{2}$且$x_2>\frac{1}{2}$.

由韦达定理可得$x_1+x_2=\frac{k_1^2-2k_1t}{k_1^2-16}$，　$x_1x_2=\frac{\left(t-\frac{1}{2}k_1\right)^2+16}{k_1^2-16}$，

所以，$|TA|\cdot|TB|=\left(1+k_1^2\right)\cdot\left|x_1-\frac{1}{2}\right|\cdot\left|x_2-\frac{1}{2}\right|=\left(1+k_1^2\right)\cdot\left(x_1x_2-\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{\left(t^2+12\right)\left(1+k_1^2\right)}{k_1^2-16}$，

设直线PQ的斜率为k_2，同理可得$|TP|\cdot|TQ|=\frac{\left(t^2+12\right)\left(1+k_2^2\right)}{k_2^2-16}$，

因为$|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，即$\frac{\left(t^2+12\right)\left(1+k_1^2\right)}{k_1^2-16}=\frac{\left(t^2+12\right)\left(1+k_2^2\right)}{k_2^2-16}$，整理可得$k_1^2=k_2^2$，

即$(k_1-k_2)(k_1+k_2)=0$，显然$k_1-k_2\neq 0$，故$k_1+k_2=0$.

因此，直线AB与直线PQ的斜率之和为0.

30．【解析】（1）由题意得$c=2$，$\frac{b}{a}=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$c^2=a^2+b^2$

解得$a^2=3$，$b^2=1$所以双曲线C的方程为：$\frac{x^2}{3}-y^2=1$

（2）由题意知直线的斜率存在，设直线方程为：$y=k(x-2)$，得$P(0,-2k)$，$Q(0,2k)$，

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

联立 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{3}-y^2=1 \\ y=k(x-2) \end{cases}$，整理可得 $(3k^2-1)x^2-12k^2x+12k^2+3=0$

$x_1+x_2=\dfrac{12k^2}{3k^2-1}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{12k^2+3}{3k^2-1}$

所以 $S_{\triangle QAB}=\left|S_{\triangle QPB}-S_{\triangle QPA}\right|=\dfrac{1}{2}|PQ||x_1-x_2|=2|k||x_1-x_2|$

所以 $S^2{}_{\triangle QAB}=4k^2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=4k^2\left[\left(\dfrac{12k^2}{3k^2-1}\right)^2-\dfrac{4(12k^2+3)}{3k^2-1}\right]$

$=\dfrac{48k^2(k^2+1)}{(3k^2-1)^2}$

直线与双曲线右支有两个交点，所以 $x_1+x_2=\dfrac{12k^2}{3k^2-1}>0, x_1\cdot x_2=\dfrac{12k^2+3}{3k^2-1}>0$

所以 $3k^2>1$，设 $t=3k^2-1>0$，

$S^2{}_{\triangle QAB}=48\dfrac{\dfrac{(t+1)}{3}\cdot\left(\dfrac{t+1}{3}+1\right)}{t^2}=\dfrac{16}{3}\left(\dfrac{4}{t^2}+\dfrac{5}{t}+1\right)$

$=\dfrac{64}{3}\left(\dfrac{1}{t}+\dfrac{5}{8}\right)^2-3>\dfrac{64}{3}\times\dfrac{25}{64}-3=\dfrac{16}{3}$

所以 $S_{QAB}>\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$