

椭圆

一、单选题

1. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1 (a > 2)$, 直线 $l: y = x - 2$ 过 C 的一个焦点, 则 C 的离心率为
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
2. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{25} = 1 (a > 5)$ 的两个焦点为 F_1, F_2 , 且 $|F_1F_2| = 10$, 弦 MN 过点 F_2 , 则 $\triangle F_1MN$ 的周长为 ()
- A. 10 B. 20 C. $10\sqrt{2}$ D. $20\sqrt{2}$
3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2}b)$, 且 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 则 C 的方程是 ()
- A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$
- C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ D. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$
4. 若一个椭圆长轴的长度、短轴的长度和焦距成等差数列, 则该椭圆的离心率是
- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{5}$
5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1 (a > 0)$, F_1, F_2 分别为椭圆 C 的左、右焦点, P 为椭圆 C 上任一点, 若 $|PF_1| + |PF_2| = 4\sqrt{2}$, 则 $|F_1F_2| =$
- A. 4 B. 23 C. 2 D. $\sqrt{3}$
6. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 过原点 O 且倾斜角为 60° 的直线 l 与椭圆 C 的一个交点为 M , 若 $MF_1 \perp MF_2$, 则椭圆的离心率为 ()
- A. $4 + 2\sqrt{3}$ B. $4 - 2\sqrt{3}$ C. $1 - \sqrt{3}$ D. $\sqrt{3} - 1$
7. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点, 点 M 在 C 上, 则 $|MF_1| \cdot |MF_2|$ 的最大值为 ()
- A. 13 B. 12 C. 9 D. 6
8. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 直线 $x + y = 1$ 与椭圆 Γ 交于 M, N 两点, 以线段 MN 为直径的圆经过原点. 若椭圆 Γ 的离心率不大于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 a 的取值范围为 ()
- A. $(0, \sqrt{10}]$ B. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{10}\right]$ C. $\left[1, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ D. $\left[1, \frac{\sqrt{10}}{2}\right]$

9. 设 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点, 若 C 上的任意一点 P 都满足 $|PB| \leq 2b$, 则 C 的离心率的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ B. $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

10. 古希腊数学家阿基米德用“逼近法”得到椭圆面积的 4 倍除以圆周率等于椭圆的长轴长与短轴长的积. 已知椭圆 C 的中心在原点, 焦点 F_1, F_2 在 y 轴上, 其面积为 $8\sqrt{3}\pi$, 过点 F_1 的直线 l 与椭圆 C 交于点 A, B 且 $\triangle F_2AB$ 的周长为 32, 则椭圆 C 的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{y^2}{64} + \frac{x^2}{3} = 1$
C. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ D. $\frac{y^2}{64} + \frac{x^2}{48} = 1$

11. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 若椭圆 E 上存在点 P 满足 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = c^2$, 则椭圆 E 离心率的取值范围为 ()

- A. $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ B. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ D. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

12. P 为椭圆 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{91} = 1$ 上的一个动点, M, N 分别为圆 $C: (x-3)^2 + y^2 = 1$ 与圆 $D: (x+3)^2 + y^2 = r^2 (0 < r < 5)$ 上的动点, 若 $|PM| + |PN|$ 的最小值为 17, 则 $r =$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

13. 已知点 P 在椭圆 $\tau: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上, 点 P 在第一象限, 点 P 关于原点 O 的对称点为 A , 点 P 关于 x 轴的对称点为 Q , 设 $\overrightarrow{PD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PQ}$, 直线 AD 与椭圆 τ 的另一个交点为 B , 若 $PA \perp PB$, 则椭圆 τ 的离心率 $e =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

二、多选题

14. 已知曲线 $C: mx^2 + ny^2 = 1$. ()

- A. 若 $m > n > 0$, 则 C 是椭圆, 其焦点在 y 轴上
B. 若 $m = n > 0$, 则 C 是圆, 其半径为 $\sqrt{n}$
C. 若 $mn < 0$, 则 C 是双曲线, 其渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{-\frac{m}{n}}x$

D. 若 $m=0, n>0$, 则 C 是两条直线

15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$ 内一点 $M(1, 2)$, 直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 且 M 为线段 AB 的中点, 则下列结论正确的是 ()

A. 椭圆的焦点坐标为 $(2, 0), (-2, 0)$

B. 椭圆 C 的长轴长为 $4\sqrt{2}$

C. 直线 l 的方程为 $x+y-3=0$

D. $|AB| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

16. 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{20} = 1$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 左、右顶点分别是 A_1, A_2 , 点 P 是椭圆上异于 A_1, A_2 的任意一点, 则下列说法正确的是 ()

A. $|PF_1| + |PF_2| = 5$

B. 直线 PA_1 与直线 PA_2 的斜率之积为 $-\frac{4}{5}$

C. 存在点 P 满足 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$

D. 若 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $4\sqrt{5}$, 则点 P 的横坐标为 $\pm\sqrt{5}$

17. 设椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点为 F , 直线 $y=m (0 < m < \sqrt{3})$ 与椭圆交于 A, B 两点, 则下述结论正确的是 ()

A. $AF+BF$ 为定值

B. $\triangle ABF$ 的周长的取值范围是 $[6, 12]$

C. 当 $m=\sqrt{2}$ 时, $\triangle ABF$ 为直角三角形

D. 当 $m=1$ 时, $\triangle ABF$ 的面积为 $\sqrt{6}$

18. 已知曲线 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{m} = 1, F_1, F_2$ 分别为曲线 C 的左右焦点, 则下列说法正确的是 ()

A. 若 $m=-3$, 则曲线 C 的两条渐近线所成的锐角为 $\frac{\pi}{3}$

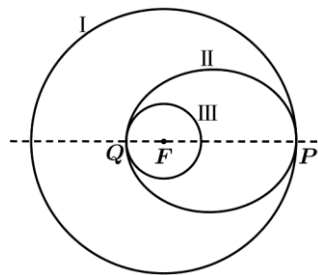
B. 若曲线 C 的离心率 $e=2$, 则 $m=-27$

C. 若 $m=3$, 则曲线 C 上不存在点 P , 使得 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{2}$

D. 若 $m=3, P$ 为 C 上一个动点, 则 $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 $3\sqrt{2}$

19. 如图所示, “嫦娥五号”月球探测器飞行到月球附近时, 首先在以月球球心 F 为圆心的圆形轨道 I 上绕月飞行, 然后在 P 点处变轨进入以 F 为一个焦点的椭圆轨道 II 上绕月飞行, 最后在 Q 点处变轨进入以 F 为圆心的圆形轨道 III 绕月飞行, 设圆形轨道 I 的半径为 R , 圆形轨道 III 的半径为 r , 则以下说法正确的是 ()

- A. 椭圆轨道 II 上任意两点距离最大为 $2R$
 B. 椭圆轨道 II 的焦距为 $R-r$
 C. 若 r 不变, 则 R 越大, 椭圆轨道 II 的短轴越短
 D. 若 R 不变, 则 r 越小椭圆轨道 II 的离心率越大



三、填空题

20. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$, 过 F_2 的直线交椭圆于 A, B 两点, $\triangle ABF_1$ 的周长为 8, 则该椭圆的短轴长为_____.
21. 设 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ 的两个焦点, M 为 C 上一点且在第一象限. 若 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形, 则 M 的坐标为_____.
22. 椭圆 $T: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个顶点 $A(a, 0), B(0, b)$, 过 A, B 分别作 AB 的垂线交椭圆 T 于 D, C (不同于顶点), 若 $BC = 3AD$, 则椭圆 T 的离心率为_____.
23. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 A, F 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点、右焦点, 过坐标原点 O 的直线交椭圆 C 于 P, Q 两点, 线段 AP 的中点为 M , 若 Q, F, M 三点共线, 则椭圆 C 的离心率为_____.
24. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 焦点 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0) (c > 0)$, 若过 F_1 的直线和圆 $\left(x - \frac{1}{2}c\right)^2 + y^2 = c^2$ 相切, 与椭圆在第一象限交于点 P , 且 $PF_2 \perp x$ 轴, 则该直线的斜率是_____, 椭圆的离心率是_____.

四、解答题

25. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 F 与抛物线 C_2 的焦点重合, C_1 的中心与 C_2 的顶点重合. 过 F 且与 x 轴垂直的直线交 C_1 于 A, B 两点, 交 C_2 于 C, D 两点, 且 $|CD| = \frac{4}{3}|AB|$.
- (1) 求 C_1 的离心率;
- (2) 若 C_1 的四个顶点到 C_2 的准线距离之和为 12, 求 C_1 与 C_2 的标准方程.

26. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1) 证明: $a = \sqrt{3}b$;

(2) 若点 $M\left(\frac{9}{10}, -\frac{\sqrt{3}}{10}\right)$ 在椭圆 C 的内部, 过点 M 的直线 l 交椭圆 C 于 P 、 Q 两点, M 为线段 PQ 的中点,

且 $OP \perp OQ$.

①求直线 l 的方程;

②求椭圆 C 的标准方程.

27. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的动点到其左焦点距离的最大值是最小值的 3 倍, 且点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在椭圆上.

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 过点 $G(0, 1)$ 作直线 l 与曲线交于 A, B 两点, 求 $\triangle ABO$ 面积的最大值.



28. 在平面直角坐标系中, $A(-2,0)$, $B(2,0)$, 设直线 AC 、 BC 的斜率分别为 k_1 、 k_2 且 $k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{2}$,

(1) 求点 C 的轨迹 E 的方程;

(2) 过 $F(-\sqrt{2},0)$ 作直线 MN 交轨迹 E 于 M 、 N 两点, 若 $\triangle MAB$ 的面积是 $\triangle NAB$ 面积的 2 倍, 求直线 MN 的方程.

29. 在平面直角坐标系 xOy 中, 离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 的椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $M(1, \frac{\sqrt{6}}{3})$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若直线 $x+y+m=0$ 上存在点 G , 且过点 G 的椭圆 C 的两条切线相互垂直, 求实数 m 的取值范围.

30. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 上顶点为 B , 离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 且 $|BF| = \sqrt{5}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 直线 l 与椭圆有唯一的公共点 M , 与 y 轴的正半轴交于点 N , 过 N 与 BF 垂直的直线交 x 轴于点 P . 若 $MP \parallel BF$, 求直线 l 的方程.

参考答案

1. C 2. D 3. A 4. B 5. A 6. D 7. C 8. D 9. C 10. B 11. D 12. B 13. C

14. ACD 15. BCD 16. BD 17. AD 18. ABD 19. BD

20. $2\sqrt{3}$ 21. $(3, \sqrt{15})$ 22. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 23. $\frac{1}{3}$ 24. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 25. 【解析】(1) 因为椭圆 C_1 的右焦点坐标为: $F(c, 0)$, 所以抛物线 C_2 的方程为 $y^2 = 4cx$, 其中

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

不妨设 A, C 在第一象限, 因为椭圆 C_1 的方程为: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,所以当 $x = c$ 时, 有 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{b^2}{a}$, 因此 A, B 的纵坐标分别为 $\frac{b^2}{a}$, $-\frac{b^2}{a}$;又因为抛物线 C_2 的方程为 $y^2 = 4cx$, 所以当 $x = c$ 时, 有 $y^2 = 4c \cdot c \Rightarrow y = \pm 2c$,所以 C, D 的纵坐标分别为 $2c$, $-2c$, 故 $|AB| = \frac{2b^2}{a}$, $|CD| = 4c$.由 $|CD| = \frac{4}{3}|AB|$ 得 $4c = \frac{8b^2}{3a}$, 即 $3 \cdot \frac{c}{a} = 2 - 2(\frac{c}{a})^2$, 解得 $\frac{c}{a} = -2$ (舍去), $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.所以 C_1 的离心率为 $\frac{1}{2}$.(2) 由 (1) 知 $a = 2c$, $b = \sqrt{3}c$, 故 $C_1: \frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$, 所以 C_1 的四个顶点坐标分别为 $(2c, 0)$, $(-2c, 0)$, $(0, \sqrt{3}c)$, $(0, -\sqrt{3}c)$, C_2 的准线为 $x = -c$.由已知得 $3c + c + c + c = 12$, 即 $c = 2$.所以 C_1 的标准方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, C_2 的标准方程为 $y^2 = 8x$.26. 【解析】(1) $\because e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\therefore \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 因此, $a = \sqrt{3}b$;(2) ①由 (1) 知, 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 即 $x^2 + 3y^2 = 3b^2$,当 $(\frac{9}{10}, -\frac{\sqrt{3}}{15})$ 在椭圆 C 的内部时, $(\frac{9}{10})^2 + 3 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{15})^2 < 3b^2$, 可得 $b > \frac{3\sqrt{3}}{10}$.设点 $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$, 则 $\begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{9}{10} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{10} \end{cases}$, 所以, $\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = -\frac{\sqrt{3}}{9}$,由已知可得 $\begin{cases} x_1^2 + 3y_1^2 = 3b^2 \\ x_2^2 + 3y_2^2 = 3b^2 \end{cases}$, 两式作差得 $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 3(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$,

$$\text{所以 } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2}{3(y_1 + y_2)} = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{9}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3},$$

$$\text{所以, 直线 } l \text{ 方程为 } y - \left(-\frac{\sqrt{3}}{10}\right) = \sqrt{3}\left(x - \frac{9}{10}\right), \text{ 即 } y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}.$$

$$\text{所以, 直线 } l \text{ 的方程为 } \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0;$$

$$\textcircled{2} \text{ 联立 } \begin{cases} x^2 + 3y^2 = 3b^2 \\ y = \sqrt{3}(x-1) \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 可得 } 10x^2 - 18x + 9 - 3b^2 = 0.$$

$$\Delta = 18^2 - 40(9 - 3b^2) = 120b^2 - 36 > 0,$$

$$\text{由韦达定理可得 } x_1 + x_2 = \frac{9}{5}, \quad x_1 x_2 = \frac{9 - 3b^2}{10},$$

$$\text{又 } \because OP \perp OQ, \text{ 而 } \overrightarrow{OP} = (x_1, y_1), \quad \overrightarrow{OQ} = (x_2, y_2),$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + \sqrt{3}(x_1 - 1) \cdot \sqrt{3}(x_2 - 1) = 4x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 3$$

$$= \frac{2(9 - 3b^2) - 27 + 15}{5} = \frac{6 - 6b^2}{5} = 0,$$

$$\text{解得 } b^2 = 1 \text{ 合乎题意, 故 } a^2 = 3b^2 = 3,$$

$$\text{因此, 椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1.$$

$$27. \text{【解析】(1) 由题意得, } \begin{cases} a + c = 3(a - c) \\ a^2 = b^2 + c^2 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } a = 2, b = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{ 椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

$$(2) \text{ 易知直线 } l \text{ 的斜率存在. 设直线 } l \text{ 的方程为 } y = kx + 1, \quad A(x_1, y_1), \quad B(x_2, y_2),$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 得 } (3 + 4k^2)x^2 + 8kx - 8 = 0, \text{ 则 } x_1 + x_2 = \frac{-8k}{3 + 4k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{-8}{3 + 4k^2},$$

$$\therefore |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{4\sqrt{6} \sqrt{1 + 2k^2}}{3 + 4k^2}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$\therefore S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \times d \times \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{6} \sqrt{1 + 2k^2}}{3 + 4k^2}$$

令 $\sqrt{1+2k^2}=t$, $Qk^2 \geq 0$, $\therefore t \geq 1$,

$$\therefore S_{VABO} = \frac{2\sqrt{6}t}{2t^2+1} = \frac{2\sqrt{6}}{2t+\frac{1}{t}},$$

易证 $y = 2t + \frac{1}{t}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore 2t + \frac{1}{t} \geq 3$,

$$\therefore S_{VABO} \leq \frac{2\sqrt{6}}{3}, \therefore VABO \text{ 面积的最大值为 } \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

28. 【解析】(1) 由题意, 设 $C(x, y)$, 则 $k_1 = \frac{y}{x+2}$, $k_2 = \frac{y}{x-2}$,

$$\text{又由 } k_1 k_2 = \frac{y^2}{x^2-4} = -\frac{1}{2}, \text{ 整理得 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1,$$

由点 A, B, C 不共线, 所以 $y \neq 0$, 所以点 C 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 (y \neq 0)$.

(2) 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

易知直线 MN 不与 x 轴重合, 设直线 $MN: x = my - \sqrt{2}$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} x = my - \sqrt{2} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{ 整理得 } (m^2 + 2)y^2 - 2\sqrt{2}my - 2 = 0,$$

$$\text{易知 } \Delta > 0, \text{ 且 } y_1 + y_2 = \frac{2\sqrt{2}m}{m^2 + 2}, y_1 y_2 = \frac{-2}{m^2 + 2} < 0$$

由 $S_{\triangle MAB} = 2S_{\triangle NAB}$, 故 $|y_1| = 2|y_2|$, 即 $y_1 = -2y_2$,

$$\text{从而 } \frac{(y_1 + y_2)^2}{y_1 y_2} = \frac{-4m^2}{m^2 + 2} = \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} + 2 = -\frac{1}{2},$$

$$\text{解得 } m^2 = \frac{2}{7}, \text{ 即 } m = \pm \frac{\sqrt{14}}{7},$$

所以直线 MN 的方程为 $x - \frac{\sqrt{14}}{7}y + \sqrt{2} = 0$ 或 $x + \frac{\sqrt{14}}{7}y + \sqrt{2} = 0$.

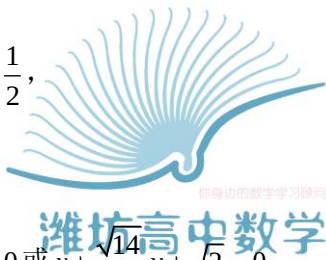
$$29. \text{【解析】(1) 由题意, } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \text{ 解得 } a^2 = 3b^2, \text{ 又 } \frac{1}{a^2} + \frac{2}{3b^2} = 1, \text{ 解得 } \begin{cases} a^2 = 3, \\ b^2 = 1, \end{cases}$$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2) ①当过点 G 的椭圆 C 的一条切线的斜率不存在时, 另一条切线必垂直于 y 轴, 易得 $G(\pm\sqrt{3}, \pm 1)$

②当过点 G 的椭圆 C 的切线的斜率均存在时, 设 $G(x_0, y_0)$, $x_0 \neq \pm\sqrt{3}$

切线方程为 $y = k(x - x_0) + y_0$,



代入椭圆方程得 $(3k^2+1)x^2 - 6k(kx_0 - y_0)x + 3(kx_0 - y_0)^2 - 3 = 0$,

$$\Delta = [6k(kx_0 - y_0)]^2 - 4(3k^2+1)[3(kx_0 - y_0)^2 - 3] = 0,$$

化简得: $(kx_0 - y_0)^2 - (3k^2+1) = 0$, 由此得 $(x_0^2 - 3)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - 1 = 0$,

设过点 G 的椭圆 C 的切线的斜率分别为 k_1, k_2 , 所以 $k_1k_2 = \frac{y_0^2 - 1}{x_0^2 - 3}$.

因为两条切线相互垂直, 所以 $\frac{y_0^2 - 1}{x_0^2 - 3} = -1$, 即 $x_0^2 + y_0^2 = 4(x_0 \neq \pm\sqrt{3})$,

由①②知 G 在圆 $x_0^2 + y_0^2 = 4$ 上, 又点 G 在直线 $x + y + m = 0$ 上,

所以直线 $x + y + m = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 有公共点,

所以 $\frac{|m|}{\sqrt{1+1}} \leq 2$, 所以 $-2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$.

综上所述, m 的取值范围为 $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.

30. 【解析】(1) 易知点 $F(c, 0)$ 、 $B(0, b)$, 故 $|BF| = \sqrt{c^2 + b^2} = a = \sqrt{5}$,

因为椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故 $c = 2$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1$,

因此, 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$;

(2) 设点 $M(x_0, y_0)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 上一点,

先证明直线 MN 的方程为 $\frac{x_0x}{5} + y_0y = 1$,

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x_0x}{5} + y_0y = 1 \\ \frac{x^2}{5} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{消去 } y \text{ 并整理得 } x^2 - 2x_0x + x_0^2 = 0, \Delta = 4x_0^2 - 4x_0^2 = 0,$$

因此, 椭圆 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{5} + y_0y = 1$.

在直线 MN 的方程中, 令 $x = 0$, 可得 $y = \frac{1}{y_0}$, 由题意可知 $y_0 > 0$, 即点 $N(0, \frac{1}{y_0})$,

直线 BF 的斜率为 $k_{BF} = -\frac{b}{c} = -\frac{1}{2}$, 所以, 直线 PN 的方程为 $y = 2x + \frac{1}{y_0}$,

在直线 PN 的方程中, 令 $y = 0$, 可得 $x = -\frac{1}{2y_0}$, 即点 $P(-\frac{1}{2y_0}, 0)$,

因为 $MP \parallel BF$, 则 $k_{MP} = k_{BF}$, 即 $\frac{y_0}{x_0 + \frac{1}{2y_0}} = \frac{2y_0^2}{2x_0y_0 + 1} = -\frac{1}{2}$, 整理可得 $(x_0 + 5y_0)^2 = 0$,

所以, $x_0 = -5y_0$, 因为 $\frac{x_0^2}{5} + y_0^2 = 6y_0^2 = 1$, $\therefore y_0 > 0$, 故 $y_0 = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $x_0 = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$,

所以, 直线 l 的方程为 $-\frac{\sqrt{6}}{6}x + \frac{\sqrt{6}}{6}y = 1$, 即 $x - y + \sqrt{6} = 0$.

