直线与圆

一、单选题

1．已知半径为 1 的圆经过点 $(3,4)$，则其圆心到原点的距离的最小值为（　　）.

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

2．若过点（2，1）的圆与两坐标轴都相切，则圆心到直线 $2x-y-3=0$ 的距离为（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

3．已知圆 C：$x^2+y^2-4x+3=0$，则圆 C 关于直线 $y=-x-4$ 的对称圆的方程是（　　）

A．$(x+4)^2+(y+6)^2=1$　　B．$(x+6)^2+(y+4)^2=1$

C．$(x+5)^2+(y+7)^2=1$　　D．$(x+7)^2+(y+5)^2=1$

4．若直线 l 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 和 $x^2+y^2=\frac{1}{5}$ 都相切，则 l 的方程为（　　）

A．$y=2x+1$　　B．$y=2x+\frac{1}{2}$　　C．$y=\frac{1}{2}x+1$　　D．$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

5．“直线 $ax+2y+4=0$ 与直线 $x+(a-1)y+2=0$ 平行”是“$a=-1$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．若直线 $ax+by+2=0(a>0,b>0)$ 截得圆 $(x+2)^2+(y+1)^2=1$ 的弦长为 2，则 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为（　　）

A．4　　B．6　　C．8　　D．10

7．已知倾斜角为 θ 的直线 l 与直线 $3x-4y-1=0$ 垂直，则 $\cos\theta$ 的值为（　　）

A．$-\frac{3}{5}$　　B．$-\frac{4}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

8．已知圆 $C_1: x^2+y^2+4x-2y-4=0$，$C_2:\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{11}{2}$，则这两圆的公共弦长为（　　）

A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．2　　D．1

9．已知 $a\in R$，设函数 $f(x)=ax-\ln x+1$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线为 l，则 l 过定点（　　）

A．$(0,2)$　　B．$(1,0)$　　C．$(1,a+1)$　　D．$(e,1)$

10．已知 M 为圆 $(x-1)^2+y^2=2$ 上一动点，则点 M 到直线 $x-y+3=0$ 的距离的最大值是（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$3\sqrt{2}$　　D．$4\sqrt{2}$

11．在圆 M：$x^2+y^2-4x-4y-1=0$ 中，过点 $E(0,1)$ 的最长弦和最短弦分别为 AC 和 BD，则四边形 $ABCD$

的面积为（　　）

A．6　　B．12　　C．24　　D．36

12．已知圆$C:x^2+y^2=4$，直线$l:y=kx+m$，当k变化时，l截得圆C弦长的最小值为2，则$m=$（　　）

A．± 2　　B．$\pm\sqrt{2}$　　C．$\pm\sqrt{3}$　　D．$\pm\sqrt{5}$

13．在平面直角坐标系xOy中，直线l：$kx-y+4k=0$与曲线$y=\sqrt{9-x^2}$交于A，B两点，且$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=2$，则$k=$（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．1　　D．$\sqrt{3}$

14．过点$P(5,1)$作圆$C:x^2+y^2+2x-4y+1=0$的割线l交圆C于A，B两点，点C到直线l的距离为1，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的值是（　　）

A．32　　B．33　　C．6　　D．不确定

15．已知直线$l:y=kx$与圆C：$x^2+y^2-6x+5=0$交于A,B两点，若$\triangle ABC$为等腰直角三角形，则k的值为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{14}}{7}$　　B．$\dfrac{\sqrt{14}}{2}$　　C．$\pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}$　　D．$\pm\dfrac{\sqrt{14}}{7}$

16．已知$\odot M$：$x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线l：$2x+y+2=0$，P为l上的动点，过点P作$\odot M$的切线PA,PB，切点为A,B，当$|PM|\cdot|AB|$最小时，直线AB的方程为（　　）

A．$2x-y-1=0$　　B．$2x+y-1=0$　　C．$2x-y+1=0$　　D．$2x+y+1=0$

17．若圆$(x-a)^2+(y-2a+1)^2=9$上有且仅有两个点到直线$3x+4y-12=0$的距离等于2，则实数a的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,\dfrac{41}{11}\right)$　　B．$\left(-\dfrac{9}{11},+\infty\right)$

C．$\left(-\dfrac{9}{11},2\right)\cup\left(\dfrac{31}{11},\dfrac{41}{11}\right)$　　D．$\left(-\dfrac{9}{11},1\right)\cup\left(\dfrac{21}{11},\dfrac{41}{11}\right)$

18．已知EF是圆$C:x^2+y^2-2x-4y+3=0$的一条弦，且$CE\perp CF$，P是EF的中点，当弦EF在圆C上运动时，直线$l:x-y-3=0$上存在两点A,B，使得$\angle APB\geq\dfrac{\pi}{2}$恒成立，则线段$AB$长度的最小值是（　　）

A．$3\sqrt{2}+1$　　B．$4\sqrt{2}+2$　　C．$4\sqrt{3}+1$　　D．$4\sqrt{3}+2$

二、多选题

19．直线 $y=kx-1$ 与圆 C：$(x+3)^2+(y-3)^2=36$ 相交于 A、B 两点, 则 AB 长度可能为（　　）

A．6　　　　B．8　　　　C．12　　　　D．16

20．已知直线 $l:ax+by-r^2=0$ 与圆 $C:x^2+y^2=r^2$，点 $A(a,b)$，则下列说法正确的是（　　）

A．若点 A 在圆 C 上，则直线 l 与圆 C 相切　B．若点 A 在圆 C 内，则直线 l 与圆 C 相离

C．若点 A 在圆 C 外，则直线 l 与圆 C 相离　D．若点 A 在直线 l 上，则直线 l 与圆 C 相切

21．已知点 P 在圆 $(x-5)^2+(y-5)^2=16$ 上，点 $A(4,0)$、$B(0,2)$，则（　　）

A．点 P 到直线 AB 的距离小于 10　　　B．点 P 到直线 AB 的距离大于 2

C．当 $\angle PBA$ 最小时，$|PB|=3\sqrt{2}$　　　D．当 $\angle PBA$ 最大时，$|PB|=3\sqrt{2}$

22．已知直线 $l:kx-y+2k=0$ 和圆 $O:x^2+y^2=16$，则（　　）

A．直线 l 恒过定点 $(2,0)$

B．存在 k 使得直线 l 与直线 $l_0:x-2y+2=0$ 垂直

C．直线 l 与圆 O 相交

D．若 $k=-1$，直线 l 被圆 O 截得的弦长为 4

23．古希腊著名数学家阿波罗尼斯与欧几里得、阿基米德齐名. 他发现：“平面内到两个定点 A,B 的距离之比为定值 $\lambda(\lambda\neq1)$ 的点的轨迹是圆”. 后来, 人们将这个圆以他的名字命名, 称为阿波罗尼斯圆, 简称阿氏圆在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-2,0),B(4,0)$, 点 P 满足 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$. 设点 P 的轨迹为 C, 下列结论正确的是（ ）

A．C 的方程为 $(x+4)^2+y^2=9$

B．在 x 轴上存在异于 A,B 的两定点 D,E, 使得 $\frac{|PD|}{|PE|}=\frac{1}{2}$

C．当 A,B,P 三点不共线时, 射线 PO 是 $\angle APB$ 的平分线

D．在 C 上存在点 M, 使得 $|MO|=2|MA|$

三、填空题

24．已知直线 l_1：$ax+(a+2)y+1=0$，l_2：$x+ay+2=0$，$a\in R$，若 $l_1//l_2$，则 $a=$__________.

25．点 $(0,-1)$ 到直线 $y=k(x+1)$ 距离的最大值为__________.

26．若斜率为$\sqrt{3}$的直线与y轴交于点A，与圆$x^2+(y-1)^2=1$相切于点B，则$|AB|=$____________.

27．过直线$l: x+y=2$上任意点P向圆$C: x^2+y^2=1$作两条切线，切点分别为A, B，线段AB的中点为Q，则点Q到直线l的距离的取值范围为______.

28．设直线$l: y=kx+b(k>0)$与圆$x^2+y^2=1$和圆$(x-4)^2+y^2=1$均相切，则$k=$_______；b=______.

四、解答题

29．已知$a\in\mathbf{N}^*$，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$的三个顶点坐标分别为$A(a,0)$，$B(-2,2)$，$C(-3,3)$.设$\triangle ABC$的外接圆为Γ.

（1）若$a=2$，求Γ的标准方程；

（2）求Γ面积最小时a的值.

30．已知圆$x^2+y^2=9$，A（1，1）为圆内一点，P，Q为圆上的动点，且∠PAQ＝90°，M是PQ的中点.

（1）求点M的轨迹曲线C的方程；

（2）设$E(\frac{9}{2},\frac{1}{2}), D(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$对曲线C上任意一点H，在直线ED上是否存在与点E不重合的点F，使$\frac{|HE|}{|HF|}$是常数，若存在，求出点F的坐标，若不存在，说明理由

参考答案

1．A　2．B　3．A　4．D　5．C　6．A　7．A　8．C　9．A　10．C　11．B　12．C　13．C　14．B

15．D　16．D　17．D　18．B

19．BC　20．ABD　21．ACD　22．BC　23．BC

24．-1或2　25．$\sqrt{2}$　26．$\sqrt{3}$　27．$[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$　28．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

29．【解析】（1）$\because a=2$，$\therefore A(2,0)$，

又$\because B(-2,2)$，$C(-3,3)$，

$\therefore AB$中点$D(0,1)$，BC中点$E\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$，

$\therefore$线段AB的中垂线l_1：$y=2x+1$，

线段BC的中垂线l_2：$y=x+5$，

$\therefore\begin{cases}y=2x+1\\y=x+5\end{cases}$得$\begin{cases}x=4\\y=9\end{cases}$即圆心$\Gamma(4,9)$，

而$B\Gamma=\sqrt{(4+2)^2+(9-2)^2}=\sqrt{85}$，

$\therefore\Gamma$的标准方程：$(x-4)^2+(y-9)^2=85$.

（2）$\because A(a,0)$，$B(-2,2)$，

$\therefore AB$中点$D\left(\frac{a-2}{2},1\right)$，

$\therefore$线段AB的中垂线l_1：$y=\frac{a+2}{2}x-\frac{a^2-8}{4}$，

由（1）知线段BC的中垂线l_2：$y=x+5$，

$\therefore\begin{cases}y=\frac{a+2}{2}x-\frac{a^2-8}{4}\\y=x+5\end{cases}$即$\begin{cases}x=\frac{a^2+12}{2a}\\y=\frac{a^2+10a+12}{2a}\end{cases}$即圆心$\Gamma\left(\frac{a^2+12}{2a},\frac{a^2+10a+12}{2a}\right)$，

$\therefore$半径$B\Gamma^2=\frac{(a^2+12)^2+10a(a^2+12)+26a^2}{2a^2}$，

$\therefore S=\pi B\Gamma^2=\frac{\pi}{2}\left[\left(a+\frac{12}{a}\right)^2+10\left(a+\frac{12}{a}\right)+26\right]$，

而$a+\frac{12}{a}\geq4\sqrt{3}$，当且仅当$a=2\sqrt{3}$时，等号成立，

∵ $a\in N^*$，$3<2\sqrt{3}<4$，且$3+\frac{12}{3}=4+\frac{12}{4}$，

∴当$a=3$或$a=4$时，$a+\frac{12}{a}$有最小值，此时 S 最小.

30.【解析】（1）设点$M(x,y)$，由$\angle PAQ=90°$，得$|AM|=\frac{1}{2}|PQ|=|PM|=\sqrt{9-|OM|^2}$，

化简得$x^2+y^2-x-y-\frac{7}{2}=0$，

即$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=4$.

（2）点$E\left(\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right)$，$D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，直线$ED$方程为$y=\frac{1}{2}$，

假设存在点$F\left(t,\frac{1}{2}\right)\left(t\neq\frac{9}{2}\right)$，满足条件，设$H(x,y)$，则有$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=4$，

$$|HE|^2=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+4-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=24-8x,$$

$$|HF|^2=(x-t)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=(x-t)^2+4-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=(1-2t)x+t^2+\frac{15}{4},$$

当$\frac{|HE|}{|HF|}$是常数，$\left(\frac{|HE|}{|HF|}\right)^2=\frac{(1-2t)x+t^2+\frac{15}{4}}{24-8x}$是常数，

∴$\frac{1-2t}{t^2+\frac{15}{4}}=-\frac{8}{24}$，∴$t=\frac{3}{2}$或$t=\frac{9}{2}$（舍），∴$t=\frac{3}{2}$，

∴存在$F\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$满足条件.