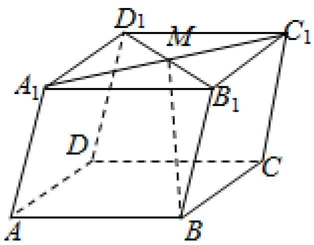
空间向量与立体几何

一、单选题

1．已知三维数组 $a=(2,-1,0)$，$b=(1,k,7)$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则实数 $k=$（　　）

A．-2　　B．-9　　C．$\frac{2}{7}$　　D．2

2．如图：在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点. 若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则下列向量中与 $\overrightarrow{BM}$ 相等的向量是（　　）



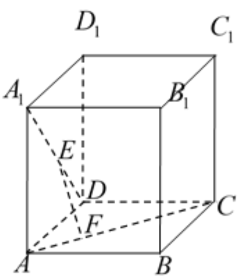
A．$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　　B．$\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}}+\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}$

C．$-\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}}-\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}$　　D．$\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}}-\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}$

3．三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle PAB$ 和 $\triangle ABC$ 都是等边三角形，$AB=2$，$PC=1$，D 为棱 AB 上一点，则 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．$\frac{3}{2}$　　D．与 D 点位置关系

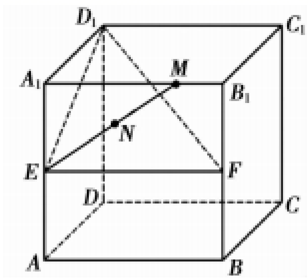
4．如图所示，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F 分别在 A_1D,AC 上，$A_1E=\frac{2}{3}A_1D$，$AF=\frac{1}{3}AC$，则 EF 与 C_1D_1 所成角的余弦值为（　　）



A．$\frac{\sqrt{3}}{9}$　　B．$\frac{\sqrt{6}}{6}$

C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{3}$

5．在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 AA_1、BB_1 的中点，M 为棱 A_1B_1 上的一点，且 $A_1M=\lambda(0<\lambda<2)$，设点 N 为 ME 的中点，则点 N 到平面 D_1EF 的距离为（　　）



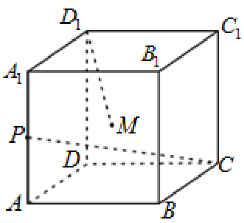
A．$\sqrt{3}\lambda$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}\lambda$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{5}$

6．已知三棱锥 $A-BCD$ 中，底面 BCD 为等边三角形，$AB=AC=AD=3$，$BC=2\sqrt{3}$，点 E 为 CD 的中

点，点 F 为 BE 的中点. 若点 M 、N 是空间中的两动点，且 $\frac{MB}{MF}=\frac{NB}{NF}=2$，$MN=2$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=$

A．3　　B．4　　C．6　　D．8

7．如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，P 是 AA_1 的中点，点 M 在侧面 AA_1B_1B 内，若 $D_1M\perp CP$，则 ΔBCM 面积的最小值为

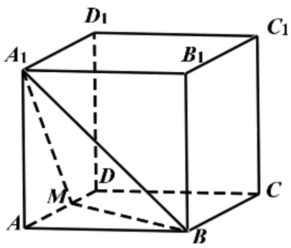


A．8　　B．4　　C．$8\sqrt{2}$　　D．$\frac{8\sqrt{5}}{5}$

8．已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1, AB=AA_1=2, AD=1$，正方形$CC_1D_1D$所在平面记为$\alpha$，若经过点 A 的直线 l 与长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所有的棱所成角相等，且 $l\cap\alpha=M$，则线段 AM 的长为

A．$\frac{\sqrt{33}}{2}$　　B．3　　C．$\sqrt{6}$　　D．$\sqrt{3}$

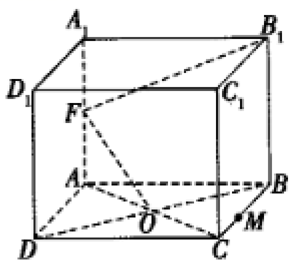
9．如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 是 AD 的中点，动点 P 在底面 $ABCD$ 内（不包括边界），若 B_1P // 平面 A_1BM，则 C_1P 的最小值是（　　）



A．$\frac{\sqrt{30}}{5}$　　B．$\frac{2\sqrt{30}}{5}$

C．$\frac{2\sqrt{7}}{5}$　　D．$\frac{4\sqrt{7}}{5}$

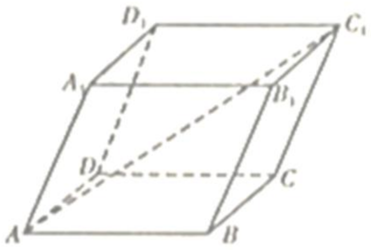
10．如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 6，点 F 是棱 AA_1 的中点，AC 与 BD 的交点为 O，点 M 在棱 BC 上，且 $BM=2MC$，动点 T（不同于点 M）在四边形 $ABCD$ 内部及其边界上运动，且 $TM\perp OF$，则直线 B_1F 与 TM 所成角的余弦值为（　　）



A．$\frac{\sqrt{10}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{10}}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{5}$

二、多选题

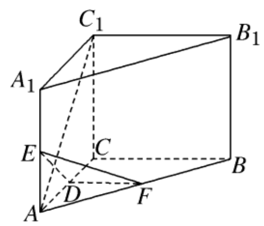
11．如图，一个结晶体的形状为平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，其中，以顶点 A 为端点的三条棱长都相等，且它们彼此的夹角都是 60°，下列说法中正确的是（　　）



A．$\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)^2=2\left(\overrightarrow{AC}\right)^2$　　　　B．$\overrightarrow{AC_1}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=0$

C．向量$\overrightarrow{B_1C}$与$\overrightarrow{AA_1}$的夹角是$60°$　　　　D．BD_1与AC所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

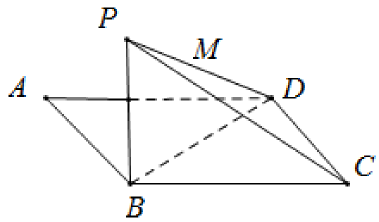
12．如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC=BC=AA_1=2$，$\angle ACB=90°$，D，E，F分别为AC，AA_1，AB的中点．则下列结论正确的是（　　）



A．AC_1与EF相交　　　　B．$B_1C_1//$平面DEF

C．EF与AC_1所成的角为$90°$　　　　D．点B_1到平面DEF的距离为$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

13．如图，在平行四边形$ABCD$中，$AB=1$，$AD=2$，$\angle A=60°$，沿对角线BD将$\triangle ABD$折起到$\triangle PBD$的位置，使得平面$PBD\perp$平面BCD，下列说法正确的有（　　）



A．平面$PCD\perp$平面PBD

B．三棱锥$P-BCD$四个面都是直角三角形

C．PD与BC所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

D．过BC的平面与PD交于M，则$\triangle MBC$面积的最小值为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

14．在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AA_1=1$，点P满足$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中$\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，则（　　）

A．当$\lambda=1$时，$\triangle AB_1P$的周长为定值

B．当$\mu=1$时，三棱锥$P-A_1BC$的体积为定值

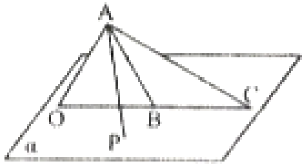
C．当$\lambda=\dfrac{1}{2}$时，有且仅有一个点P，使得$A_1P\perp BP$

D．当$\mu=\dfrac{1}{2}$时，有且仅有一个点P，使得$A_1B\perp$平面AB_1P

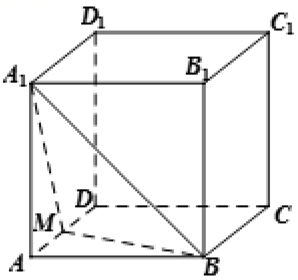
三、填空题

15．如图，直角三角形OAC所在平面与平面α交于OC，平面$OAC\perp$平面α，$\angle OAC$为直角，$OC=4$，

B 为 OC 的中点，且 $\angle ABC=\dfrac{2\pi}{3}$，平面 α 内一动点满足 $\angle PAB=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\vec{OP}\cdot\vec{CP}$ 的取值范围是________.



16．如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 是 AD 的中点，动点 P 在底面正方形 $ABCD$ 内（不包括边界），若 $B_1P//$ 平面 A_1BM，则 C_1P 长度的取值范围是_______.



17．已知三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp PB, PA\perp PC, \angle BPC=\dfrac{\pi}{3}$，且 $PA=1, PB=2, PC=3$，长度为 1 的线段 MN 的端点 M 在 PA 上，端点 N 在侧面 PBC 内运动，若 MN 的中点为 T，$\triangle ABC$ 的重心为 G，则 GT 的最小值是_________.

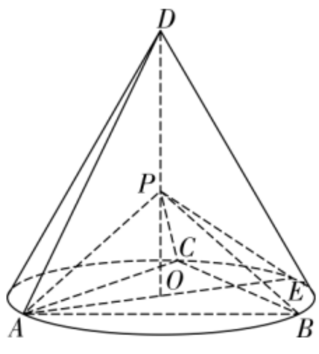
18．17 世纪，笛卡尔在《几何学》中，通过建立坐标系，引入点的坐标的概念，将代数对象与几何对象建立关系，从而实现了代数问题与几何问题的转化，打开了数学发展的新局面，创立了新分支——解析几何．我们知道，方程 $x=1$ 在一维空间中，表示一个点；在二维空间中，它表示一条直线，那么在三维空间中，它表示______，过点 $P(1,-1,2)$ 且法向量为 $\vec{v}=(1,2,3)$ 的平面的方程是______.

四、解答题

19．如图，D 为圆锥的顶点，O 是圆锥底面的圆心，AE 为底面直径，$AE=AD$．$\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形，P 为 DO 上一点，$PO=\dfrac{\sqrt{6}}{6}DO$．

（1）证明：$PA\perp$ 平面 PBC；

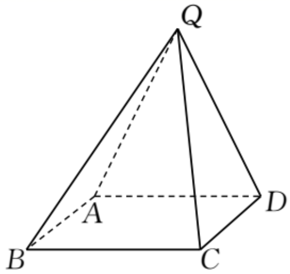
（2）求二面角 $B-PC-E$ 的余弦值.



20．在四棱锥$Q-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，若$AD=2,QD=QA=\sqrt{5},QC=3$.

（1）证明：平面$QAD\perp$平面$ABCD$；

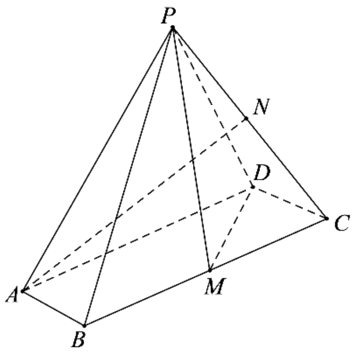
（2）求二面角$B-QD-A$的平面角的余弦值.



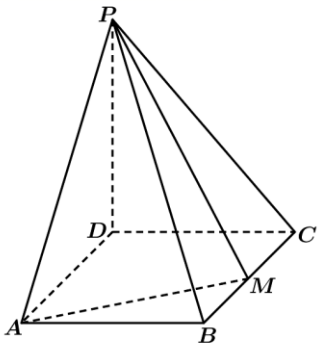
21．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是平行四边形，$\angle ABC=120°,AB=1,BC=4,PA=\sqrt{15}$，$M$，$N$分别为$BC,PC$的中点，$PD\perp DC,PM\perp MD$.

（1）证明：$AB\perp PM$；

（2）求直线AN与平面PDM所成角的正弦值.



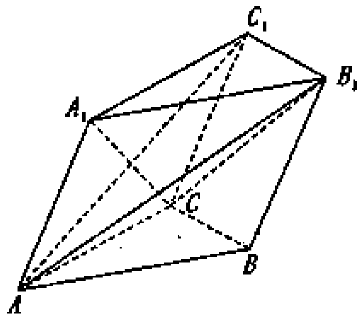
22．如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，$PD=DC=1$，M 为 BC 的中点，且 $PB\perp AM$．



（1）求 BC；

（2）求二面角 $A-PM-B$ 的正弦值．

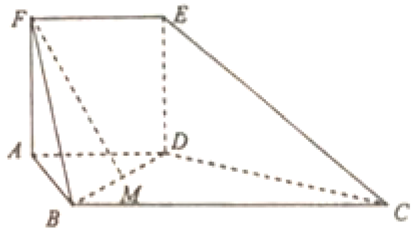
23．如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC，$AA_1=AC=2CB$，$\angle ACB=90^\circ$．



（1）求证：平面 $AB_1C_1\perp$ 平面 A_1B_1C；

（2）若 A_1A 与平面 ABC 所成的线面角为 60°，求二面角 C_1-AB_1-C 的余弦值．

24．如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，平面 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$.四边形 $ADEF$ 为正方形，四边形 $ABCD$ 为梯形，且 $AD//BC$，ΔABD 是边长为 1 的等边三角形，M 为线段 BD 中点，$BC=3$.

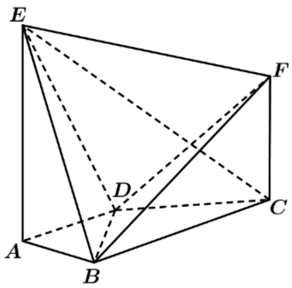


(1)求证：$AF\perp BD$；

(2)求直线 MF 与平面 CDE 所成角的正弦值；

(3)线段 BD 上是否存在点 N，使得直线 $CE//$ 平面 AFN？若存在，求 $\dfrac{BN}{BD}$ 的值；若不存在，请说明理由.

25．如图，$AE\perp$ 平面 $ABCD$，$CF\ //\ AE,\ \ AD\ //\ BC,\ \ AD\perp AB,\ \ AB=AD=1,\ \ AE=BC=2$.

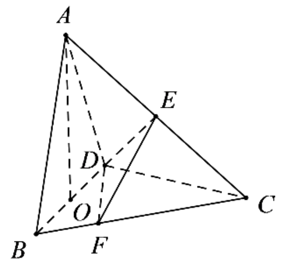


（Ⅰ）求证：$BF//$ 平面 ADE；

（Ⅱ）求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值；

（Ⅲ）若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$，求线段 CF 的长.

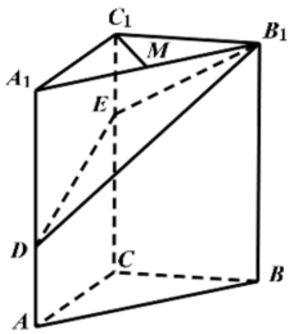
26．在三棱锥 A—BCD 中，已知 $CB=CD=\sqrt{5}$,$BD=2$，O 为 BD 的中点，$AO\perp$平面 BCD，$AO=2$，E 为 AC 的中点．



（1）求直线 AB 与 DE 所成角的余弦值；

（2）若点 F 在 BC 上，满足 $BF=\frac{1}{4}BC$，设二面角 F—DE—C 的大小为 θ，求 $\sin\theta$ 的值．

27．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$平面 $ABC, AC\perp BC, AC=BC=2$，$CC_1=3$，点 D, E 分别在棱 AA_1 和棱 CC_1 上，且 $AD=1$ $CE=2$, M 为棱 A_1B_1 的中点．



（Ⅰ）求证：$C_1M\perp B_1D$；

（Ⅱ）求二面角 $B-B_1E-D$ 的正弦值；

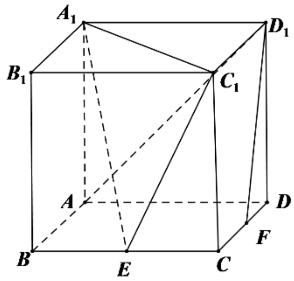
（Ⅲ）求直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值．

28．如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 BC 的中点，F 为棱 CD 的中点．

（I）求证：$D_1F//$ 平面 A_1EC_1；

（II）求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值．

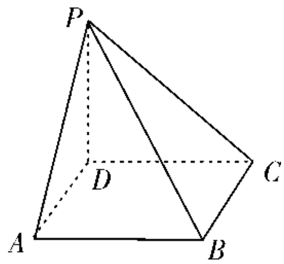
（III）求二面角 $A-A_1C_1-E$ 的正弦值．



29．如图，四棱锥 P-$ABCD$ 的底面为正方形，$PD\perp$底面 $ABCD$．设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l.

（1）证明：$l\perp$平面 PDC;

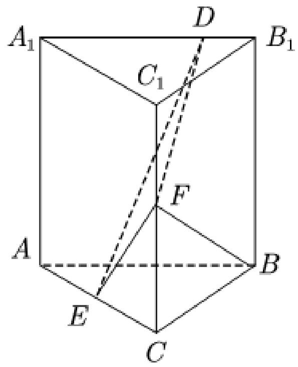
（2）已知 $PD=AD=1$，Q 为 l 上的点，求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值．



30．已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 AA_1B_1B 为正方形，$AB=BC=2$，E，F 分别为 AC 和 CC_1 的中点，D 为棱 A_1B_1 上的点．$BF\perp A_1B_1$

（1）证明：$BF\perp DE$；

（2）当 B_1D 为何值时，面 BB_1C_1C 与面 DFE 所成的二面角的正弦值最小?



参考答案

1．D　2．A　3．A　4．C　5．D　6．B　7．D　8．D　9．B　10．B

11．AB　12．BCD　13．ABD　14．BD

15．$[0,+\infty)$　16．$[\frac{\sqrt{30}}{5},\sqrt{2})$　17．$\frac{4\sqrt{5}-3}{6}$　18．一个平面　$x+2y+3z-5=0$

19．【解析】（1）由题设，知$\triangle DAE$为等边三角形，设$AE=1$，

则$DO=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$CO=BO=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}$，所以$PO=\frac{\sqrt{6}}{6}DO=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

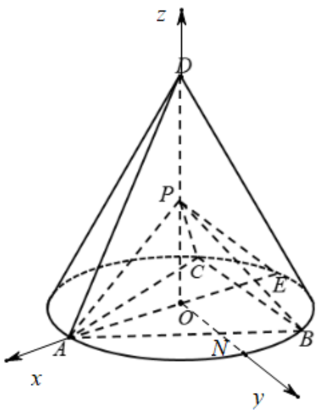
$PC=\sqrt{PO^2+OC^2}=\frac{\sqrt{6}}{4},PB=\sqrt{PO^2+OB^2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

又$\triangle ABC$为等边三角形，则$\frac{BA}{\sin 60^\circ}=2OA$，所以$BA=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$PA^2+PB^2=\frac{3}{4}=AB^2$，则$\angle APB=90^\circ$，所以$PA\perp PB$，

同理$PA\perp PC$，又$PC\cap PB=P$，所以$PA\perp$平面PBC；

（2）过O作$ON\,/\!/\,BC$交AB于点N，因为$PO\perp$平面ABC，以O为坐标原点，OA为x轴，ON为y轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则$E(-\frac{1}{2},0,0),P(0,0,\frac{\sqrt{2}}{4}),B(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},0),C(-\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4},0)$，

$\overrightarrow{PC}=(-\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4})$，$\overrightarrow{PB}=(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4})$，$\overrightarrow{PE}=(-\frac{1}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{4})$，

设平面PCB的一个法向量为$\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}-x_1-\sqrt{3}y_1-\sqrt{2}z_1=0\\ -x_1+\sqrt{3}y_1-\sqrt{2}z_1=0\end{cases}$，

令$x_1=\sqrt{2}$，得$z_1=-1,y_1=0$，

所以$\vec{n}=(\sqrt{2},0,-1)$，

设平面PCE的一个法向量为$\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$

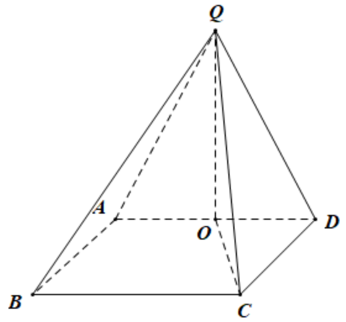
由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PE}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}-x_2-\sqrt{3}y_2-\sqrt{2}z_2=0\\ -2x_2-\sqrt{2}z_2=0\end{cases}$，令$x_2=1$，得$z_2=-\sqrt{2},y_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$\vec{m}=(1,\frac{\sqrt{3}}{3},-\sqrt{2})$

故$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

设二面角 $B-PC-E$ 的大小为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

20.【解析】（1）取 AD 的中点为 O，连接 QO,CO.



因为 $QA=QD$， $OA=OD$，则 $QO\perp AD$，

而 $AD=2,QA=\sqrt{5}$，故 $QO=\sqrt{5-1}=2$.

在正方形 $ABCD$ 中，因为 $AD=2$，故 $DO=1$，故 $CO=\sqrt{5}$，

因为 $QC=3$，故 $QC^2=QO^2+OC^2$，故 $\triangle QOC$ 为直角三角形且

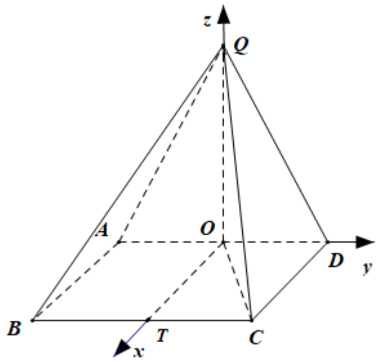
$QO\perp OC$，

因为 $OC\cap AD=O$，故 $QO\perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $QO\subset$ 平面 QAD，故平面 $QAD\perp$ 平面 $ABCD$.

（2）在平面 $ABCD$ 内，过 O 作 $OT//CD$，交 BC 于 T，则 $OT\perp AD$，

结合（1）中的 $QO\perp$ 平面 $ABCD$，故可建如图所示的空间坐标系.



则 $D(0,1,0),Q(0,0,2),B(2,-1,0)$，故 $\overrightarrow{BQ}=(-2,1,2),\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$.

设平面 QBD 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BQ}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+y+2z=0\\ -2x+2y=0\end{cases}$，取 $x=1$，则 $y=1,z=\dfrac{1}{2}$，

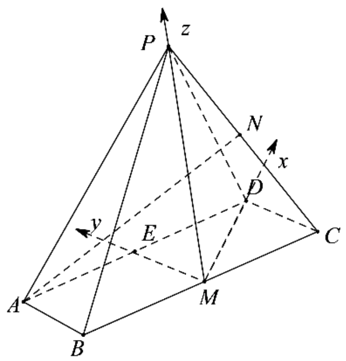
故 $\vec{n}=\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$.

而平面 QAD 的法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$，故 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{1}{1\times\dfrac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$.

二面角 $B-QD-A$ 的平面角为锐角，故其余弦值为 $\dfrac{2}{3}$.

21.【解析】（1）在 $\triangle DCM$ 中， $DC=1$， $CM=2$， $\angle DCM=60^\circ$，由余弦定理可得 $DM=\sqrt{3}$，

所以 $DM^2+DC^2=CM^2$， $\therefore DM\perp DC$.



由题意 $DC\perp PD$ 且 $PD\cap DM=D$，

$\therefore DC\perp$ 平面 PDM， 而 $PM\subset$ 平面 PDM，

所以 $DC\perp PM$， 又 $AB//DC$，

所以 $AB\perp PM$.

（2）由 $PM\perp MD$， $AB\perp PM$， 而 AB 与 DM 相交，所以 $PM\perp$ 平面

$ABCD$，因为 $AM=\sqrt{7}$，所以 $PM=2\sqrt{2}$，取 AD 中点 E，连接 ME，则 ME,DM,PM 两两垂直，以点 M 为坐标原点，如图所示，建立空间直角坐标系，

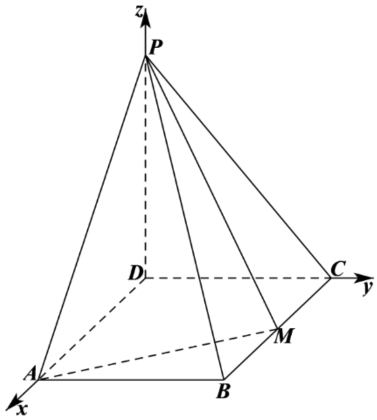
则 $A(-\sqrt{3},2,0),P(0,0,2\sqrt{2}),D(\sqrt{3},0,0),M(0,0,0),C(\sqrt{3},-1,0)$

又 N 为 PC 中点，所以 $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{2}\right),\overrightarrow{AN}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2},\sqrt{2}\right)$.

由（1）得 $CD\perp$ 平面 PDM，所以平面 PDM 的一个法向量 $\vec{n}=(0,1,0)$

从而直线 AN 与平面 PDM 所成角的正弦值为 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{AN}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AN}||\vec{n}|}=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{25}{4}+2}}=\frac{\sqrt{15}}{6}$.

22.【解析】（1）$\because PD\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为矩形，不妨以点 D 为坐标原点，DA、DC、DP 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，



设 $BC=2a$，则 $D(0,0,0)$、$P(0,0,1)$、$B(2a,1,0)$、$M(a,1,0)$、$A(2a,0,0)$，

则 $\overrightarrow{PB}=(2a,1,-1)$，$\overrightarrow{AM}=(-a,1,0)$，

$\because PB\perp AM$，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AM}=-2a^2+1=0$，解得 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $BC=2a=\sqrt{2}$；

（2）设平面 PAM 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$，$\overrightarrow{AP}=(-\sqrt{2},0,1)$，

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AP}=-\sqrt{2}x_1+z_1=0\end{cases}$，取 $x_1=\sqrt{2}$，可得 $\vec{m}=(\sqrt{2},1,2)$，

设平面 PBM 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{BM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$，$\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{2},-1,1)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=-\sqrt{2}x_2-y_2+z_2=0\end{cases}$，取 $y_2=1$，可得 $\vec{n}=(0,1,1)$，

$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{3}{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{14}}{14}$，

所以，$\sin<\vec{m},\vec{n}>=\sqrt{1-\cos^2<\vec{m},\vec{n}>}=\frac{\sqrt{70}}{14}$，

因此，二面角 $A-PM-B$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{70}}{14}$.

23.【解析】(1) 因为平面 $ACC_1A_1\perp$平面 ABC，平面 $ACC_1A_1\cap$平面 $ABC=AC$，

$BC\subset$平面 ABC，$\angle ACB=90^\circ$，所以 $BC\perp$平面 ACC_1A_1，

因为 $A_1C\subset$平面 ACC_1A_1，所以 $BC\perp A_1C$.

因为 $B_1C_1 // BC$，所以 $A_1C\perp B_1C_1$.

因为 ACC_1A_1 是平行四边形，且 $AA_1=AC$，所以 ACC_1A_1 是菱形，$A_1C\perp AC_1$.

因为 $AC_1\cap B_1C_1=C_1$，所以 $A_1C\perp$平面 AB_1C_1.

又 $A_1C\subset$平面 A_1B_1C，所以平面 $AB_1C_1\perp$平面 A_1B_1C.

(2) 取 AC 的中点 M，连接 A_1M，因为 ACC_1A_1 是菱形，$\angle A_1AC=60^\circ$，

所以ΔACA_1是正三角形，所以 $A_1M\perp AC$，且 $A_1M=\frac{\sqrt{3}}{2}AC$.

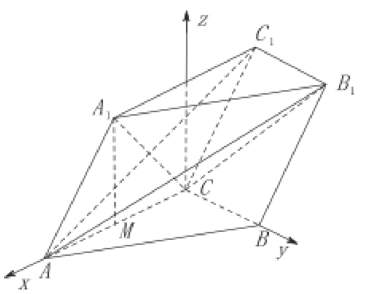
令 $AA_1=AC=2CB=2$，则 $A_1M=\sqrt{3}$.

所以以 C 为原点，以 CA 所在直线为 x 轴，CB 所在直线为 y 轴，过点 C 且平行于 A_1M 的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

则 $C(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$C_1\left(-1,0,\sqrt{3}\right)$，$B(0,1,0)$，$A_1\left(1,0,\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$，

$\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1B_1}=\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{CB}=\left(-1,0,\sqrt{3}\right)+(0,1,0)=\left(-1,1,\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{CA_1}=\left(1,0,\sqrt{3}\right)$.

设平面 ACB_1 的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{CA}=0\\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{CB_1}=0\end{cases}$，



所以$\begin{cases}2x=0\\ -x+y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，得 $x=0$，令 $z=1$，则 $y=-\sqrt{3}$，

所以$\vec{n}=\left(0,-\sqrt{3},1\right)$.

由 (1) 知 $A_1C\perp$平面 A_1B_1C，所以$\overrightarrow{CA_1}=\left(1,0,\sqrt{3}\right)$是平面 A_1B_1C 的一个法向量，

所以 $\cos<\overrightarrow{CA_1},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{CA_1}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{CA_1}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}\cdot\sqrt{3+1}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

所以二面角 C_1-AB_1-C 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

24.【解析】(1)证明：因为 $ADEF$ 为正方形，

所以 $AF\perp AD$.

又因为平面 $ADEF\perp$平面 $ABCD$，

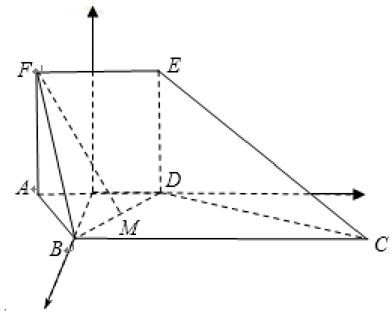
且平面 ADEF$\cap$平面 $ABCD=AD$，

所以 $AF\perp$平面 $ABCD$.

所以 $AF\perp BD$.

(2)取 AD 中点 O,EF 中点 K，连接 OB，OK.于是在△ABD 中，$OB\perp OD$，在正方 ADEF 中 $OK\perp OD$，又平面 $ADEF\perp$平面 $ABCD$，故 $OB\perp$平面 AFEF，进而 $0B\perp OK$，

即 OB, OD, OK 两两垂直.



分别以 OB,OD,OK 为 x 轴，y 轴,z 轴

建立空间直角坐标系（如图）.

于是，$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$，$D\left(0,\frac{1}{2},0\right)$,$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},3,0\right)$,$E\left(0,\cdot\frac{1}{2},1\right)$,

$M\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4},0\right)$,$F\left(0,-\frac{1}{2},1\right)$

所以 $\overrightarrow{MF}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4},1\right)$,$\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2},0\right)$, $\overrightarrow{DE}=(0,0,1)$

设平面 CDE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x-\frac{5}{2}\cdot y=0\\ z=0\end{cases}$

令 $x=-5$，则 $y=\sqrt{3}$，则 $\vec{n}=(-5,\sqrt{3},0)$.

设直线 MF 与平面 CDE 所成角为 θ， $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{MF},\vec{n}>|=\frac{|\overrightarrow{MF}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{MF}||\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{14}$

(3) 要使直线 $CE//$平面 AFN， 只需 AN//CD，

设 $\overrightarrow{BN}=\lambda\overrightarrow{BD},\lambda\in[0,1]$,则$\left(x_n-\frac{\sqrt{3}}{2},y_n,z_n\right)=\lambda\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$,

$x_n=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, y_n=\frac{1}{2}\lambda, z_n=0$，

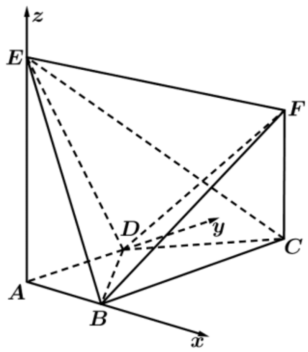
$N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{1}{2}\lambda,0\right)$，所以 $\overrightarrow{AN}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2},0\right)$，

又 $\overrightarrow{CD}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2},0)$，由 $\overrightarrow{AN}//\overrightarrow{CD}$ 得 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}}{-\frac{5}{2}}$

解得 $\lambda=\frac{2}{3}\in[0,1]$

所以线段 BD 上存在点 N,使得直线 $CE//$ 平面 AFN，且 $\frac{BN}{BD}=\frac{2}{3}$.

25.【解析】依题意，可以建立以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴正方向的空间直角坐标系(如图)，



可得 $A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,2,0), D(0,1,0), E(0,0,2)$.

设 $CF=h(h>0)$，则 $F(1,2,h)$.

(Ⅰ)依题意，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$ 是平面 ADE 的法向量，

又 $\overrightarrow{BF}=(0,2,h)$，可得 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

又因为直线 $BF\not\subset$ 平面 ADE，所以 $BF//$ 平面 ADE.

(Ⅱ)依题意，$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{CE}=(-1,-2,2)$，

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 BDE 的法向量，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x+y=0\\ -x+2z=0\end{cases}$，

不妨令 $z=1$，可得 $\vec{n}=(2,2,1)$，

因此有 $\cos\langle\overrightarrow{CE},\vec{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{CE}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CE}||\vec{n}|}=-\frac{4}{9}$.

所以，直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\frac{4}{9}$.

(Ⅲ)设 $\vec{m}=(x,y,z)$ 为平面 BDF 的法向量，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x+y=0\\ 2y+hz=0\end{cases}$.

不妨令 y=1，可得 $\vec{m}=\left(1,1,-\dfrac{2}{h}\right)$.

由题意，有 $|cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\times|\vec{n}|}=\frac{\left|4-\frac{2}{h}\right|}{3\sqrt{2+\frac{4}{h^2}}}=\frac{1}{3}$，解得 $h=\dfrac{8}{7}$.

经检验，符合题意。

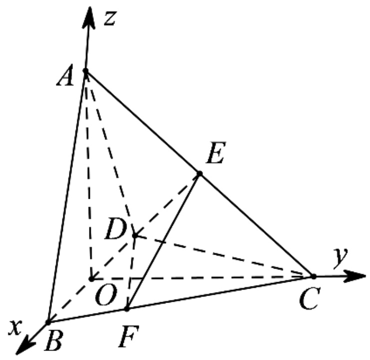
所以，线段 CF 的长为 $\dfrac{8}{7}$.

26.【解析】(1) 连 CO Q $BC=CD, BO=OD \therefore CO\perp BD$

以 OB,OC,OA 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,2),B(1,0,0),C(0,2,0),D(-1,0,0)\therefore E(0,1,1)$

$\therefore \overrightarrow{AB}=(1,0,-2),\overrightarrow{DE}=(1,1,1)\therefore cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}>=\dfrac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

从而直线 AB 与 DE 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$



(2) 设平面 DEC 一个法向量为 $\vec{n_1}=(x,y,z)$,

$\because \overline{DC}=(1,2,0),\begin{cases}\overline{n_1}\cdot\overline{DC}=0\\ \overline{n_1}\cdot\overline{DE}=0\end{cases}\therefore\begin{cases}x+2y=0\\ x+y+z=0\end{cases}$

令 $y=1\therefore x=-2,z=1\therefore\vec{n_1}=(-2,1,1)$

设平面 DEF 一个法向量为 $\vec{n_2}=(x_1,y_1,z_1)$,

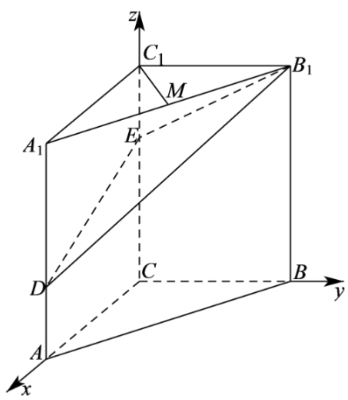
$\because \overline{DF}=\overline{DB}+\overline{BF}=\overline{DB}+\dfrac{1}{4}\overline{BC}=(\dfrac{7}{4},\dfrac{1}{2},0),\begin{cases}\overline{n_2}\cdot\overline{DF}=0\\ \overline{n_2}\cdot\overline{DE}=0\end{cases}\therefore\begin{cases}\dfrac{7}{4}x_1+\dfrac{1}{2}y_1=0\\ x_1+y_1+z_1=0\end{cases}$

令 $y_1=-7\therefore x_1=2,z_1=5\therefore\vec{n_2}=(2,-7,5)$

$\therefore cos<\vec{n_1},\vec{n_2}>=\dfrac{-6}{\sqrt{6}\sqrt{78}}=-\dfrac{1}{\sqrt{13}}$

因此 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$

27.【解析】依题意，以 C 为原点，分别以 $\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{CC_1}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系（如图），



可得 $C(0,0,0)$、$A(2,0,0)$、$B(0,2,0)$、$C_1(0,0,3)$、

$A_1(2,0,3)$、$B_1(0,2,3)$、$D(2,0,1)$、$E(0,0,2)$、$M(1,1,3)$.

(I) 依题意，$\overrightarrow{C_1M}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{B_1D}=(2,-2,-2)$，

从而 $\overrightarrow{C_1M}\cdot\overrightarrow{B_1D}=2-2+0=0$，所以 $C_1M\perp B_1D$；

（II）依题意，$\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$ 是平面 BB_1E 的一个法向量，

$\overrightarrow{EB_1}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{ED}=(2,0,-1)$．

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 DB_1E 的法向量，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2y+z=0\\ 2x-z=0\end{cases}$，

不妨设 $x=1$，可得 $\vec{n}=(1,-1,2)$．

$\cos<\overrightarrow{CA},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{2}{2\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

$\therefore\sin<\overrightarrow{CA},\vec{n}>=\sqrt{1-\cos^2<\overrightarrow{CA},\vec{n}>}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$．

所以，二面角 $B-B_1E-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$；

（III）依题意，$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$．

由（II）知 $\vec{n}=(1,-1,2)$ 为平面 DB_1E 的一个法向量，于是 $\cos<\overrightarrow{AB},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{-4}{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

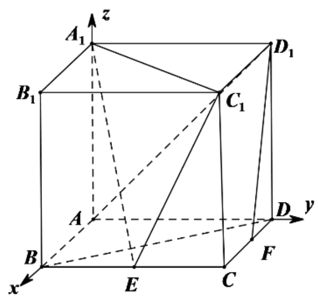
所以，直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

28．【解析】（I）以 A 为原点，AB,AD,AA_1 分别为 x,y,z 轴，建立如图空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0),A_1(0,0,2),B(2,0,0),C(2,2,0),D(0,2,0),C_1(2,2,2),D_1(0,2,2)$，

因为 E 为棱 BC 的中点，F 为棱 CD 的中点，所以 $E(2,1,0)$，$F(1,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{D_1F}=(1,0,-2),\overrightarrow{A_1C_1}=(2,2,0),\overrightarrow{A_1E}=(2,1,-2)$，



设平面 A_1EC_1 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=2x_1+2y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1E}=2x_1+y_1-2z_1=0\end{cases}$，令 $x_1=2$，则 $\vec{m}=(2,-2,1)$，

因为 $\overrightarrow{D_1F}\cdot\vec{m}=2-2=0$，所以 $\overrightarrow{D_1F}\perp\vec{m}$，

因为 $D_1F\not\subset$ 平面 A_1EC_1，所以 D_1F // 平面 A_1EC_1；

（II）由（1）得，$\overrightarrow{AC_1}=(2,2,2)$，

设直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{m},\overrightarrow{AC_1}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\vec{m}|\cdot\left|\overrightarrow{AC_1}\right|}\right|=\dfrac{2}{3\times2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$；

（III）由正方体的特征可得，平面 AA_1C_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{DB}=(2,-2,0)$，

则 $\cos\left\langle\overrightarrow{DB},\vec{m}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{DB}\cdot\vec{m}}{\left|\overrightarrow{DB}\right|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{8}{3\times2\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以二面角 $A-A_1C_1-E$ 的正弦值为 $\sqrt{1-\cos^2\left\langle\overrightarrow{DB},\vec{m}\right\rangle}=\dfrac{1}{3}$.

29.【解析】（1）证明：在正方形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，

因为 $AD\not\subset$ 平面 PBC，$BC\subset$ 平面 PBC，

所以 $AD//$ 平面 PBC，

又因为 $AD\subset$ 平面 PAD，平面 $PAD\cap$ 平面 $PBC=l$，

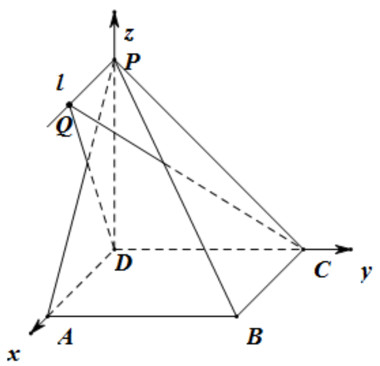
所以 $AD//l$，

因为在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，所以 $AD\perp DC,\therefore l\perp DC,$

且 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $AD\perp PD,\therefore l\perp PD,$

因为 $CD\cap PD=D$

所以 $l\perp$ 平面 PDC；



（2）如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

因为 $PD=AD=1$，

则有 $D(0,0,0),C(0,1,0),A(1,0,0),P(0,0,1),B(1,1,0)$，

设 $Q(m,0,1)$，则有 $\overrightarrow{DC}=(0,1,0),\overrightarrow{DQ}=(m,0,1),\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$，

设平面 QCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}=0\\\overrightarrow{DQ}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}y=0\\mx+z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $z=-m$，所以平面 QCD 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,0,-m)$，则

$$\cos<\vec{n},\overrightarrow{PB}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{PB}\right|}=\frac{1+0+m}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{m^2+1}}$$

根据直线的方向向量与平面法向量所成角的余弦值的绝对值即为直线与平面所成角的正弦值，所以直线与

平面所成角的正弦值等于$|\cos<\vec{n},\overrightarrow{PB}>|=\dfrac{|1+m|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{\dfrac{1+2m+m^2}{m^2+1}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{1+\dfrac{2m}{m^2+1}}\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{1+\dfrac{2|m|}{m^2+1}}\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{1+1}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，当且仅当$m=1$时取等号，

所以直线PB与平面QCD所成角的正弦值的最大值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

30.【解析】因为三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$是直三棱柱，所以$BB_1\perp$底面ABC，所以$BB_1\perp AB$

因为$A_1B_1//AB$，$BF\perp A_1B_1$，所以$BF\perp AB$，

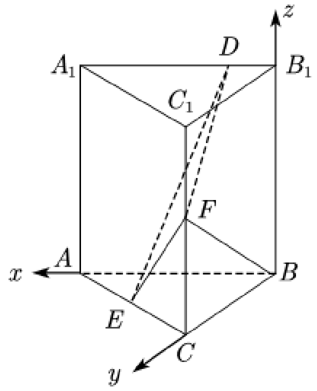
又$BB_1\cap BF=B$，所以$AB\perp$平面BCC_1B_1.

所以BA,BC,BB_1两两垂直.

以B为坐标原点，分别以BA,BC,BB_1所在直线为x,y,z轴建立空间直角坐标系，如图.

所以$B(0,0,0),A(2,0,0),C(0,2,0),B_1(0,0,2),A_1(2,0,2),C_1(0,2,2)$，$E(1,1,0),F(0,2,1)$.

由题设$D(a,0,2)$（$0\le a\le 2$）.



（1）因为$\overrightarrow{BF}=(0,2,1),\overrightarrow{DE}=(1-a,1,-2)$，

所以$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}=0\times(1-a)+2\times1+1\times(-2)=0$，所以$BF\perp DE$.

（2）设平面DFE的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

因为$\overrightarrow{EF}=(-1,1,1),\overrightarrow{DE}=(1-a,1,-2)$，

所以$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-x+y+z=0\\(1-a)x+y-2z=0\end{cases}$. 令$z=2-a$，则$\vec{m}=(3,1+a,2-a)$

因为平面BCC_1B_1的法向量为$\overrightarrow{BA}=(2,0,0)$，

设平面BCC_1B_1与平面DEF的二面角的平面角为θ，则$|\cos\theta|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{BA}|}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{BA}|}=\dfrac{6}{2\times\sqrt{2a^2-2a+14}}=\dfrac{3}{\sqrt{2a^2-2a+14}}$.

当$a=\dfrac{1}{2}$时，$2a^2-2a+4$取最小值为$\dfrac{27}{2}$，

此时$\cos\theta$取最大值为$\dfrac{3}{\sqrt{\dfrac{27}{2}}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

所以$(\sin\theta)_{\min}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，此时$B_1D=\dfrac{1}{2}$.