

空间点线面之间的位置关系

一、单选题

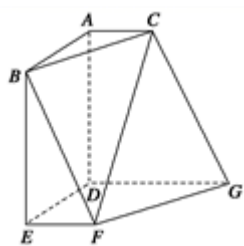
1. 下列命题正确的是 ()

- A. 三点确定一个平面
 B. 三条相交直线确定一个平面
 C. 对于直线 a 、 b 、 c ，若 $a \parallel b$ ， $b \parallel c$ ，则 $a \parallel c$
 D. 对于直线 a 、 b 、 c ，若 $a \perp b$ ， $b \perp c$ ，则 $a \parallel c$

2. 已知直线 l ， a ， b ，平面 α ， β ，则 $l \perp \alpha$ 的一个充分条件可以是 ()

- A. $a \subset \alpha$ ， $b \subset \alpha$ ， $a \perp l$ ， $b \perp l$ B. $\beta \perp \alpha$ ， $l \parallel \beta$
 C. $l \perp \beta$ ， $\beta \parallel \alpha$ D. $a \parallel \alpha$ ， $l \perp a$

3. 如图，在多面体 $ABC-DEFG$ 中，平面 $ABC \parallel$ 平面 $DEFG$ ， $EF \parallel DG$ ，且 $AB = DE$ ， $DG = 2EF$ ，则 ()

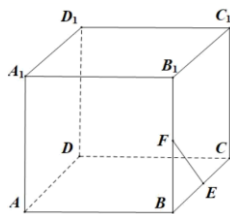


- A. $BF \parallel$ 平面 $ACGD$ B. $CF \parallel$ 平面 $ABED$
 C. $BC \parallel FG$ D. 平面 $ABED \parallel$ 平面 CGF

4. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， P 为 B_1D_1 的中点，则直线 PB 与 AD_1 所成的角为 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

5. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 、 F 分别为 BC 、 BB_1 的中点，则下列直线中与直线 EF 相交的是 ()

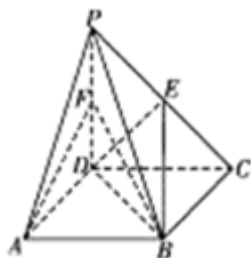


- A. 直线 AA_1 B. 直线 A_1B_1 C. 直线 A_1D_1 D. 直线 B_1C_1

6. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为棱 A_1D_1 上的动点, O 为底面 $ABCD$ 的中心, E, F 分别是 A_1B_1, C_1D_1 的中点, 下列平面中与 OM 扫过的平面平行的是

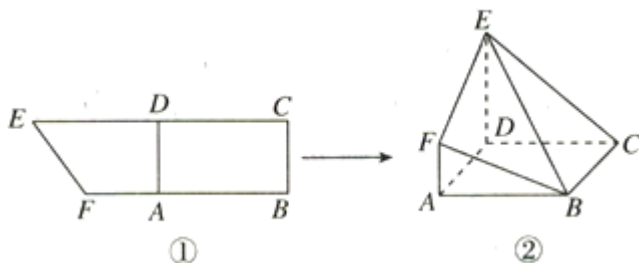
- A. 平面 ABB_1A_1 B. 平面 BCC_1B_1 C. 平面 $BCFE$ D. 平面 DCC_1D_1

7. 《九章算术》中, 将四个面都为直角三角形的四面体称之为“鳖臑”. 在如图所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是正方形, 且 $PD=CD$, 点 E, F 分别为 PC, PD 的中点, 则图中的鳖臑有



- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

8. 如图所示, 在直角梯形 $BCEF$ 中, $\angle CBF = \angle BCE = 90^\circ$, A, D 分别是 BF, CE 上的点, $AD \parallel BC$, 且 $AB = DE = 2BC = 2AF$ (如图①). 将四边形 $ADEF$ 沿 AD 折起, 连接 BE, BF, CE (如图②). 在折起的过程中, 下列说法中错误的个数是 ()

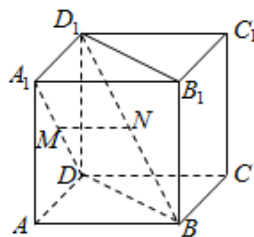


- ① $AC \parallel$ 平面 BEF ;
 ② B, C, E, F 四点不可能共面;
 ③ 若 $EF \perp CF$, 则平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$;
 ④ 平面 BCE 与平面 BEF 可能垂直.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

9. 如图已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, M, N 分别是 A_1D, D_1B 的中点, 则 ()

- A. 直线 A_1D 与直线 D_1B 垂直, 直线 $MN \parallel$ 平面 $ABCD$
 B. 直线 A_1D 与直线 D_1B 平行, 直线 $MN \perp$ 平面 BDD_1B_1



C. 直线 A_1D 与直线 D_1B 相交, 直线 $MN \parallel$ 平面 $ABCD$

D. 直线 A_1D 与直线 D_1B 异面, 直线 $MN \perp$ 平面 BDD_1B_1

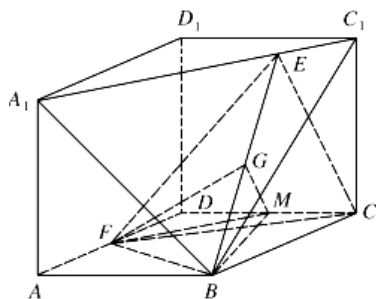
10. 如图, 四边形 $ABCD$, A_1ADD_1 , C_1CDD_1 均为正方形. 动点 E 在线段 A_1C_1 上, F, G, M 分别是 AD , BE , CD 的中点, 则下列选项正确的是 ()

A. $GM \parallel CE$

B. $BM \perp$ 平面 CC_1F

C. 存在点 E , 使得平面 $BEF \parallel$ 平面 CC_1D_1D

D. 存在点 E , 使得平面 $BEF \perp$ 平面 AA_1C_1C



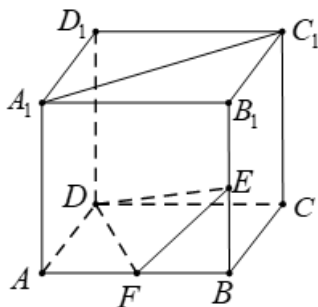
11. 如图, 在直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $AB = \sqrt{2}AD$, E, F 分别为 BB_1, AB 的中点, 则 ()

A. $AC_1 \parallel$ 平面 DEF 且 $A_1C_1 \perp DF$

B. $A_1C_1 \parallel$ 平面 DEF 且 A_1C_1 与 DF 不垂直

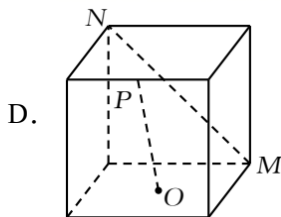
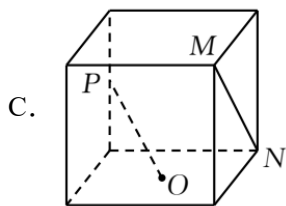
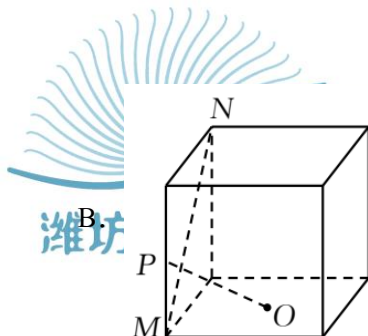
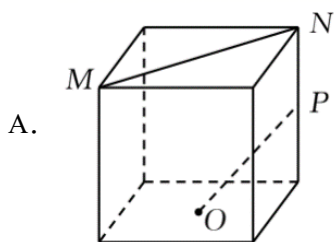
C. A_1C_1 与平面 DEF 相交且 $A_1C_1 \perp DF$

D. A_1C_1 与平面 DEF 相交且 A_1C_1 与 DF 不垂直



二、多选题

12. 如图, 在正方体中, O 为底面的中心, P 为所在棱的中点, M, N 为正方体的顶点. 则满足 $MN \perp OP$ 的是 ()



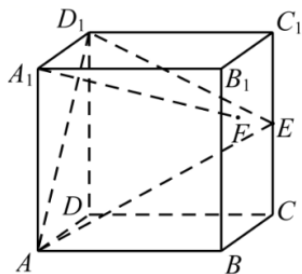
13. 设 m, n 是不同的直线, α, β, γ 是三个不同的平面, 则正确命题是 ()

A. 若 $m \perp \alpha, n \perp \beta, \alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel n$ B. 若 $\alpha \cap \gamma = m, \beta \cap \gamma = n, m \parallel n$, 则 $\alpha \parallel \beta$

C. 若 $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$, 则 $\alpha \parallel \beta$

D. 若 $\alpha \parallel \beta$, $\beta \parallel \gamma$, $m \perp \alpha$, 则 $m \perp \gamma$

14. 在正方体 AC_1 中, E 是棱 CC_1 的中点, F 是侧面 BCC_1B_1 内的动点, 且 A_1F 与平面 D_1AE 的垂线垂直, 如图所示, 下列说法正确的是 ()



A. 点 F 的轨迹是一条线段

B. A_1F 与 BE 是异面直线

C. A_1F 与 D_1E 不可能平行

D. 三棱锥 $F-ABD_1$ 的体积为定值

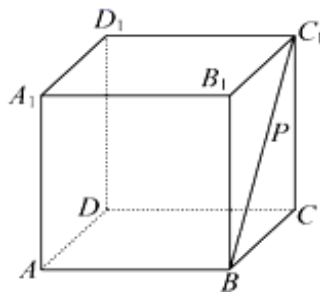
15. 如图, 点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的面对角线 BC_1 上运动, 则其中正确的结论是 ()

A. 三棱锥 C_1-AB_1P 的体积不变

B. $A_1P \parallel$ 平面 ACD_1

C. DP 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值最大值为 $\frac{1}{3}$

D. 平面 $PDB_1 \perp$ 平面 ACD_1



三、填空题

16. 已知 l, m 是平面 α 外的两条不同直线. 给出下列三个论断:

① $l \perp m$; ② $m \parallel \alpha$; ③ $l \perp \alpha$.

以其中的两个论断作为条件, 余下的一个论断作为结论, 写出一个正确的命题: _____.

17. 在棱长为 4 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 BC 和 C_1D_1 的中点, 经过点 A, E, F 的平面把正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截成两部分, 则截面与 BCC_1B_1 的交线段长为 _____.

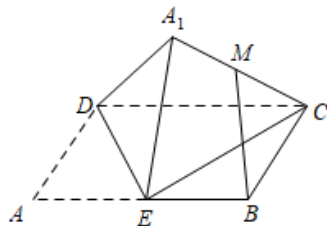
18. 如图, 长为 4, 宽为 2 的矩形纸片 $ABCD$ 中, E 为边 AB 的中点, 将 $\angle A$ 沿直线 DE 翻转至 $\triangle A_1DE$ ($A_1 \notin$ 平面 $ABCD$), 若 M 为线段 A_1C 的中点, 则在 $\triangle ADE$ 翻转过程中, 下列正确的命题序号是 _____.

① $MB \parallel$ 平面 A_1DE ;

②异面直线 BM 与 A_1E 所成角是定值;

③三棱锥 A_1-ADE 体积的最大值是 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$;

④一定存在某个位置, 使 $DE \perp A_1C$

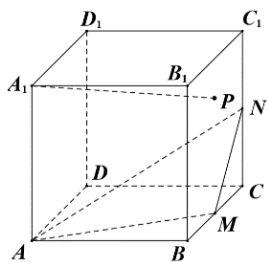


19. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是底面正方形 $ABCD$ 的中心, M 和 N 分别是棱 D_1D 和 A_1B_1 的中点, 现有下面四个结论:

- ①直线 $ON \perp$ 平面 ACM ; ②直线 $ON \parallel$ 平面 AA_1D_1D ;
 ③直线 $BC_1 \perp$ 平面 CDN ; ④直线 BD_1 与平面 ACM 相交.

则其中正确结论的序号是_____.

20. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 M, N 分别是棱 BC, CC_1 的中点, 则异面直线 AN 与 BC 所成角的余弦值为_____; 若动点 P 在正方形 BCC_1B_1 (包括边界) 内运动, 且 $PA_1 \parallel$ 平面 AMN , 则线段 PA_1 的长度范围是_____.

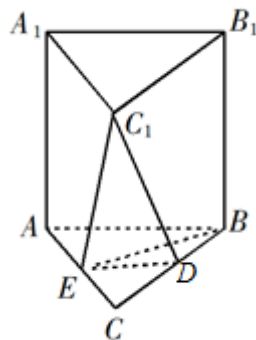


四、解答题

21. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别为 BC, AC 的中点, $AB=BC$.

求证: (1) $A_1B_1 \parallel$ 平面 DEC_1 ;

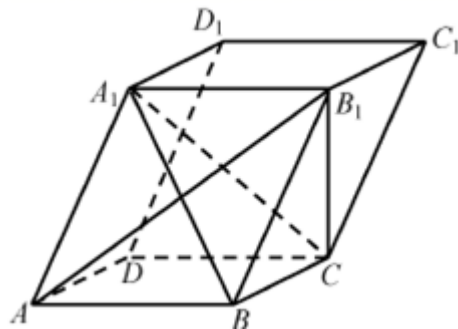
(2) $BE \perp C_1E$.



22. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = AB, AB_1 \perp B_1C_1$.

求证: (1) $AB \parallel$ 平面 A_1B_1C ;

(2) 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 A_1BC .

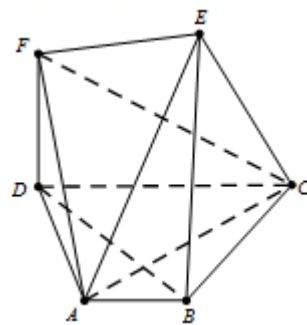


23. 如图, 在多面体 $EFABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB \perp BC$, $EB \perp$ 平面 $ABCD$, $BE \parallel DF$,

$CD = 2BC = 4AB = 4$, $BE = 2DF = 4$.

(I) 求证: $AC \perp EF$;

(II) 求三棱锥 $A-CDF$ 的体积.

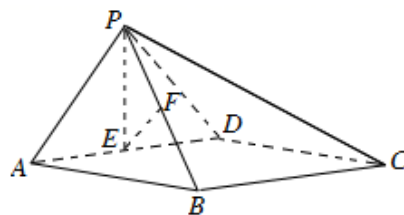


24. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \perp PD$, $PA = PD$, E 、 F 分别为 AD 、 PB 的中点.

(I) 求证: $PE \perp BC$;

(II) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD ;

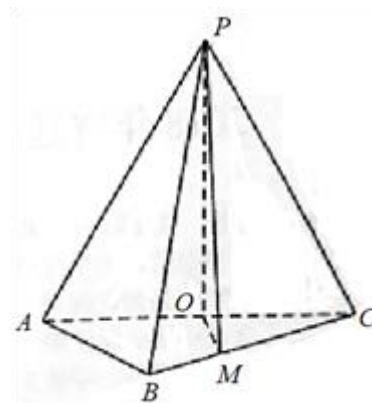
(III) 求证: $EF \parallel$ 平面 PCD .



25. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB = BC = 2\sqrt{2}$, $PA = PB = PC = AC = 4$, O 为 AC 的中点.

(1) 证明: $PO \perp$ 平面 ABC ;

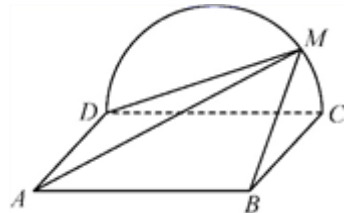
(2) 若点 M 在棱 BC 上, 且 $MC = 2MB$, 求点 C 到平面 POM 的距离.



26. 如图, 矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 CD 所在平面垂直, M 是 CD 上异于 C, D 的点.

(1) 证明: 平面 $AMD \perp$ 平面 BMC ;

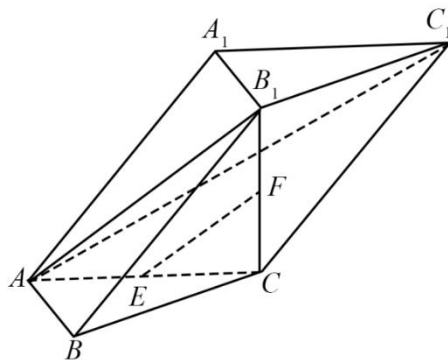
(2) 在线段 AM 上是否存在点 P , 使得 $MC \parallel$ 平面 PBD ? 说明理由.



27. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC$, $B_1C \perp$ 平面 ABC , E, F 分别是 AC, B_1C 的中点.

(1) 求证: $EF \parallel$ 平面 AB_1C_1 ;

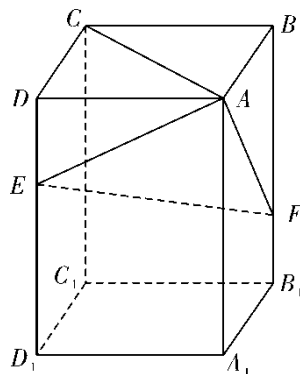
(2) 求证: 平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABB_1 .



28. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别在棱 DD_1, BB_1 上, 且 $2DE = ED_1, BF = 2FB_1$. 证明:

(1) 当 $AB = BC$ 时, $EF \perp AC$;

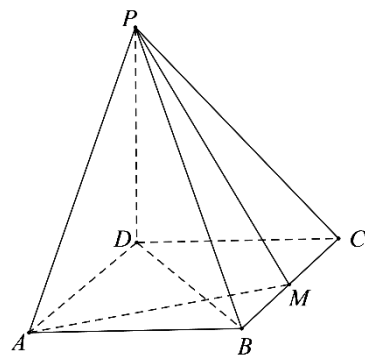
(2) 点 C_1 在平面 AEF 内.



29. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, M 为 BC 的中点, 且 $PB \perp AM$.

(1) 证明: 平面 $PAM \perp$ 平面 PBD ;

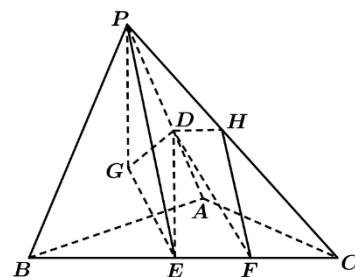
(2) 若 $PD = DC = 1$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



30. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle PAB$ 是正三角形, G 是 $\triangle PAB$ 的重心, D, E, H 分别是 PA, BC, PC 的中点, 点 F 在 BC 上, 且 $BF = 3FC$.

(1) 求证: 平面 $DFH \parallel$ 平面 PGE ;

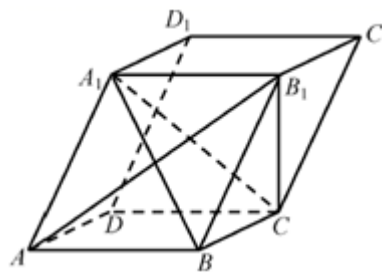
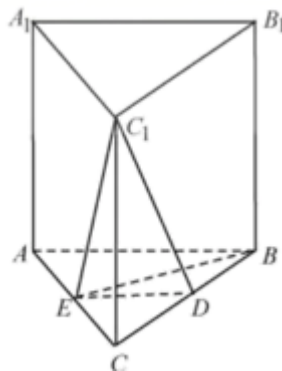
(2) 若 $PB \perp AC, AB = AC = 2, BC = 2\sqrt{2}$, 求三棱锥 $P-DEG$ 的体积.



参考答案

1. C 2. C 3. A 4. D 5. D 6. C 7. C 8. B 9. A 10. B 11. C

12. BC 13. AD 14. ABD 15. BD

16. 如果 $l \perp \alpha$, $m \parallel \alpha$, 则 $l \perp m$ 或如果 $l \perp \alpha$, $l \perp m$, 则 $m \parallel \alpha$.17. $\frac{10}{3}$ 18. ①②③ 19. ②③ 20. $\frac{2}{3}$ $[\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{5}]$ 21. 【解析】(1) 因为 D, E 分别为 BC, AC 的中点,所以 $ED \parallel AB$.在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \parallel A_1B_1$,所以 $A_1B_1 \parallel ED$.又因为 $ED \subset$ 平面 DEC_1 , $A_1B_1 \not\subset$ 平面 DEC_1 ,所以 $A_1B_1 \parallel$ 平面 DEC_1 .(2) 因为 $AB=BC$, E 为 AC 的中点, 所以 $BE \perp AC$.因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直棱柱, 所以 $CC_1 \perp$ 平面 ABC .又因为 $BE \subset$ 平面 ABC , 所以 $CC_1 \perp BE$.因为 $C_1C \subset$ 平面 A_1ACC_1 , $AC \subset$ 平面 A_1ACC_1 , $C_1C \cap AC = C$,所以 $BE \perp$ 平面 A_1ACC_1 .因为 $C_1E \subset$ 平面 A_1ACC_1 , 所以 $BE \perp C_1E$.22. 【解析】证明: (1) 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB \parallel A_1B_1$.因为 $AB \not\subset$ 平面 A_1B_1C , $A_1B_1 \subset$ 平面 A_1B_1C ,所以 $AB \parallel$ 平面 A_1B_1C .(2) 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 ABB_1A_1 为平行四边形.又因为 $AA_1=AB$, 所以四边形 ABB_1A_1 为菱形.因此 $AB_1 \perp A_1B$.又因为 $AB_1 \perp B_1C_1$, $BC \parallel B_1C_1$,所以 $AB_1 \perp BC$.又因为 $A_1B \cap BC = B$, $A_1B \subset$ 平面 A_1BC , $BC \subset$ 平面 A_1BC ,所以 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BC .因为 $AB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 ,所以平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 A_1BC .23. 【解析】(I) $\because EB \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$ $\therefore EB \perp AC$ 

$\because AB \perp BC, AB \parallel CD \quad \therefore \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$

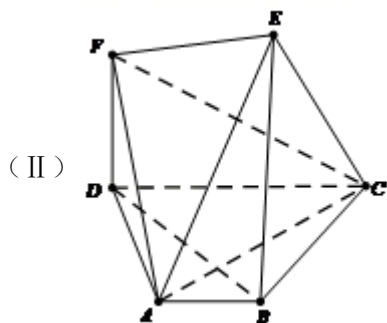
又 $CD = 2BC = 4AB = 4 \quad \therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{1}{2} \quad \therefore \triangle ABC \sim \triangle BCD$

则 $\angle CAB = \angle DBC$

$\therefore \angle ABD + \angle DBC = 90^\circ \quad \therefore \angle ABD + \angle CAB = 90^\circ \quad \therefore AC \perp BD$

又 $EB \cap BD = B \quad \therefore AC \perp \text{平面 } DBEF$

又 $EF \subset \text{平面 } DBEF \quad \therefore AC \perp EF$



三棱锥 $A-CDF$ 的体积:

$$V_{A-CDF} = V_{F-ADC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ADC} \cdot DF = \frac{1}{3} S_{\triangle BDC} \cdot DF = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot DF = \frac{8}{3}$$

24. 【解析】(I) $\because PA = PD$, 且 E 为 AD 的中点, $\therefore PE \perp AD$.

$\because$ 底面 $ABCD$ 为矩形, $\therefore BC \parallel AD$, $\therefore PE \perp BC$;

(II) $\because$ 底面 $ABCD$ 为矩形, $\therefore AB \perp AD$.

$\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $AB \not\subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore AB \perp$ 平面 PAD , 又 $PD \subset$ 平面 PAD , $\therefore AB \perp PD$.

又 $PA \perp PD$, $PA \cap AB = A$, $PA, AB \not\subset$ 平面 PAB , $\therefore PD \perp$ 平面 PAB ,

$\because PD \subset$ 平面 PCD , $\therefore$ 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD ;

(III) 如图, 取 PC 中点 G , 连接 FG, GD .

$\because F, G$ 分别为 PB 和 PC 的中点,

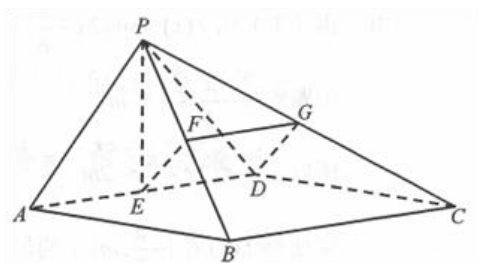
$\therefore FG \parallel BC$, 且 $FG = \frac{1}{2} BC$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形, 且 E 为 AD 的中点,

$\therefore ED \parallel BC, DE = \frac{1}{2} BC$,

$\therefore ED \parallel FG$, 且 $ED = FG$, $\therefore$ 四边形 $EFGD$ 为平行四边形,

$\therefore EF \parallel GD$, 又 $EF \not\subset$ 平面 PCD , $GD \subset$ 平面 PCD , $\therefore EF \parallel$ 平面 PCD .

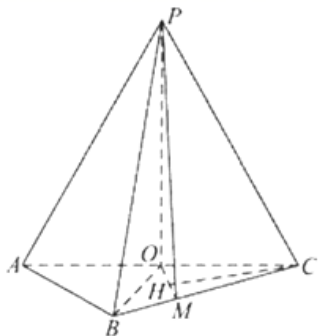


25. 【解析】(1) 因为 $AP = CP = AC = 4$, O 为 AC 的中点, 所以 $OP \perp AC$, 且 $OP = 2\sqrt{3}$.

连结 OB . 因为 $AB=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 且 $OB \perp AC$, $OB=\frac{1}{2}AC=2$.

由 $OP^2 + OB^2 = PB^2$ 知, $OP \perp OB$.

由 $OP \perp OB$, $OP \perp AC$ 知 $PO \perp$ 平面 ABC .



(2) 作 $CH \perp OM$, 垂足为 H . 又由 (1) 可得 $OP \perp CH$, 所以 $CH \perp$ 平面 POM .

故 CH 的长为点 C 到平面 POM 的距离.

由题设可知 $OC=\frac{1}{2}AC=2$, $CM=\frac{2}{3}BC=\frac{4\sqrt{2}}{3}$, $\angle ACB=45^\circ$.

所以 $OM=\frac{2\sqrt{5}}{3}$, $CH=\frac{OC \cdot MC \cdot \sin \angle ACB}{OM}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

所以点 C 到平面 POM 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

26. 【解析】(1) 由题设知, 平面 $CMD \perp$ 平面 $ABCD$, 交线为 CD .

因为 $BC \perp CD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BC \perp$ 平面 CMD , 故 $BC \perp DM$.

因为 M 为 CD 上异于 C, D 的点, 且 DC 为直径, 所以 $DM \perp CM$.

又 $BC \cap CM=C$, 所以 $DM \perp$ 平面 BMC .

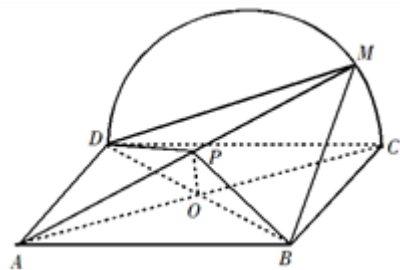
而 $DM \subset$ 平面 AMD , 故平面 $AMD \perp$ 平面 BMC .

(2) 当 P 为 AM 的中点时, $MC \parallel$ 平面 PBD .

证明如下: 连结 AC 交 BD 于 O . 因为 $ABCD$ 为矩形, 所以 O 为 AC 中点.

连结 OP , 因为 P 为 AM 中点, 所以 $MC \parallel OP$.

$MC \not\subset$ 平面 PBD , $OP \subset$ 平面 PBD , 所以 $MC \parallel$ 平面 PBD .



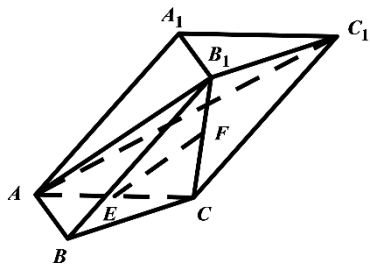
27. 【解析】(1) 由于 E, F 分别是 AC, B_1C 的中点, 所以 $EF \parallel AB_1$.

由于 $EF \not\subset$ 平面 $AB_1C_1, AB_1 \subset$ 平面 AB_1C_1 , 所以 $EF \parallel$ 平面 AB_1C_1 .

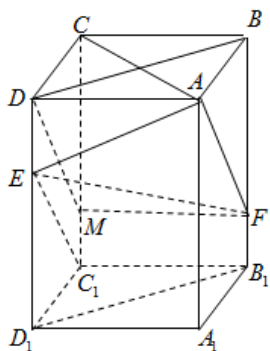
(2) 由于 $B_1C \perp$ 平面 $ABC, AB \subset$ 平面 ABC , 所以 $B_1C \perp AB$.

由于 $AB \perp AC, AC \cap B_1C = C$, 所以 $AB \perp$ 平面 AB_1C ,

由于 $AB \subset$ 平面 ABB_1 , 所以平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABB_1 .



28. 【解析】



(1) 因为长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 所以 $BB_1 \perp$ 平面 $ABCD \therefore AC \perp BB_1$,

因为长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1, AB = BC$, 所以四边形 $ABCD$ 为正方形 $\therefore AC \perp BD$

因为 $BB_1 \cap BD = B, BB_1, BD \subset$ 平面 BB_1D_1D , 因此 $AC \perp$ 平面 BB_1D_1D ,

因为 $EF \subset$ 平面 BB_1D_1D , 所以 $AC \perp EF$;

(2) 在 CC_1 上取点 M 使得 $CM = 2MC_1$, 连 DM, MF ,

因为 $D_1E = 2ED, DD_1 \parallel CC_1, DD_1 = CC_1$, 所以 $ED = MC_1, ED \parallel MC_1$,

所以四边形 DMC_1E 为平行四边形, $\therefore DM \parallel EC_1$

因为 $MF \parallel DA, MF = DA$, 所以 M, F, A, D 四点共面, 所以四边形 $MFAD$ 为平行四边形,

$\therefore DM \parallel AF, \therefore EC_1 \parallel AF$, 所以 E, C_1, A, F 四点共面,

因此 C_1 在平面 AEF 内

29. 【解析】(1) 因为 $PD \perp$ 底面 $ABCD, AM \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PD \perp AM$,

又 $PB \perp AM, PB \cap PD = P$,

所以 $AM \perp$ 平面 PBD ,

而 $AM \subset$ 平面 PAM ,

所以平面 $PAM \perp$ 平面 PBD .

(2) 由 (1) 可知, $AM \perp$ 平面 PBD , 所以 $AM \perp BD$,

从而 $\triangle DAB \sim \triangle ABM$, 设 $BM = x$, $AD = 2x$,

则 $\frac{BM}{AB} = \frac{AB}{AD}$, 即 $2x^2 = 1$, 解得 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $AD = \sqrt{2}$.

因为 $PD \perp$ 底面 $ABCD$,

故四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $V = \frac{1}{3} \times (1 \times \sqrt{2}) \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

30. 【解析】(1) 证明: 连结 BG , 由题意可得 BG 与 GD 共线, 且 $BG = 2GD$,

$\because E$ 是 BC 的中点, $BF = 3FC$, $\therefore F$ 是 CE 的中点,

$$\therefore \frac{BG}{GD} = \frac{BE}{EF} = 2,$$

$\therefore GE \parallel DF$, $GE \not\subset$ 平面 PGE ; $DF \not\subset$ 平面 PGE ;

$\therefore DF \parallel$ 平面 PGE ,

$\because H$ 是 PC 的中点,

$\therefore FH \parallel PE$, $PE \subset$ 平面 PGE , $FH \not\subset$ 平面 PGE ;

$\therefore FH \parallel$ 平面 PGE ,

$\because DF \cap FH = F$, $DF \subset$ 平面 DEF , $FH \subset$ 平面 DEF ,

$\therefore$ 平面 $DFH \parallel$ 平面 PGE ;

(2) $\because AB = AC = 2, BC = 2\sqrt{2}$,

$\therefore AB^2 + AC^2 = 8 = BC^2$, $\therefore AB \perp AC$,

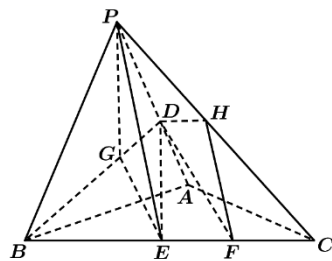
$\because PB \perp AC, AB \cap PB = B$, $\therefore AC \perp$ 平面 PAB ,

$\because \triangle PAB$ 是正三角形, $\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \sqrt{3}$,

$$\therefore V_{P-DEG} = V_{E-PDG} = \frac{1}{3} V_{E-PBD} = \frac{1}{6} V_{E-PAB} = \frac{1}{12} V_{C-PAB}.$$

$$= \frac{1}{12} \times \frac{1}{3} S_{\triangle PAB} \cdot AC = \frac{1}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

即三棱锥 $P-DEG$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{18}$.



潍坊高中数学