空间几何体、表面积体积

一、单选题

1．已知圆锥的底面半径为$\sqrt{2}$，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的母线长为（　　）

A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．4　　D．$4\sqrt{2}$

2．已知A,B,C为球O的球面上的三个点，$\odot O_1$为$\triangle ABC$的外接圆，若$\odot O_1$的面积为4π，$AB=BC=AC=OO_1$，则球O的表面积为（　　）

A．64π　　B．48π　　C．36π　　D．32π

3．埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥，以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积，则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

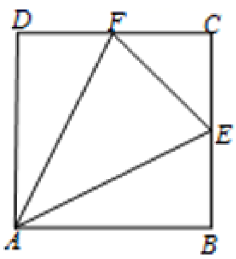
4．正四棱台的上、下底面的边长分别为2，4，侧棱长为2，则其体积为（　　）

A．$20+12\sqrt{3}$　　B．$28\sqrt{2}$　　C．$\frac{56}{3}$　　D．$\frac{28\sqrt{2}}{3}$

5．已如A，B，C是半径为1的球O的球面上的三个点，且$AC\perp BC,AC=BC=1$，则三棱锥$O-ABC$的体积为（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{12}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{12}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{4}$

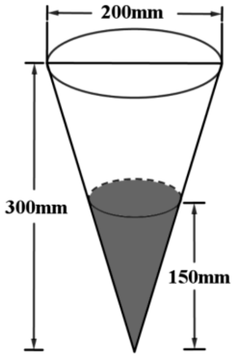
6．如图，边长为2的正方形$ABCD$中，E,F分别是BC,CD的中点，现在沿AE,AF及EF把这个正方形折成一个四面体，使B,C,D三点重合，重合后的点记为P，则四面体$P-AEF$的高为



A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{2}{3}$

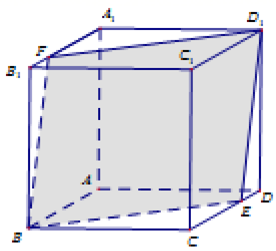
C．$\frac{3}{4}$　　D．1

7．定义：24 小时内降水在平地上积水厚度（mm）来判断降雨程度．其中小雨（<10mm），中雨（10mm-25mm），大雨（25mm-50mm），暴雨（50mm-100mm），小明用一个圆锥形容器接了 24 小时的雨水，如图，则这天降雨属于哪个等级（ ）



A．小雨　　B．中雨　　C．大雨　　D．暴雨

8．在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为线段 CD 和 A_1B_1 上的动点，且满足 $CE=A_1F$，则四边形 D_1FBE 所围成的图形（如图所示阴影部分）分别在该正方体有公共顶点的三个面上的正投影的面积之和（　　）



A．有最小值 $\frac{3}{2}$　　B．有最大值 $\frac{5}{2}$　　C．为定值 3　　D．为定值 2

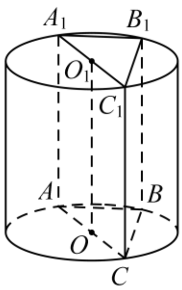
9．已知△ABC 是面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ 的等边三角形，且其顶点都在球 O 的球面上.若球 O 的表面积为 16 π，则 O 到平面 ABC 的距离为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．1　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

10．两个圆锥的底面是一个球的同一截面，顶点均在球面上，若球的体积为 $\frac{32\pi}{3}$，两个圆锥的高之比为$1:3$，则这两个圆锥的体积之和为（　　）

A．3π　　B．4π　　C．9π　　D．12π

11．如图，圆柱内有一个三棱柱，三棱柱的底面为等腰直角三角形，且此三角形内接于圆柱的底面圆.如果圆柱的侧面积为16π，其底面直径与母线长相等，则此三棱柱的体积为（　　）



A．16π　　B．16　　C．$\dfrac{16}{\pi}$　　D．$\dfrac{16}{3}$

12．在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PBC\perp$平面 ABC，$\angle ACB=90°$，$BC=PC=2$，若 $AC=PB$，则三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为（　　）

A．$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$　　B．$\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$　　C．$\dfrac{16\sqrt{3}}{27}$　　D．$\dfrac{32\sqrt{3}}{27}$

13．北斗三号全球卫星导航系统是我国航天事业的重要成果．在卫星导航系统中，地球静止同步卫星的轨道位于地球赤道所在平面，轨道高度为36000km（轨道高度是指卫星到地球表面的距离）．将地球看作是一个球心为 O，半径 r 为6400km 的球，其上点 A 的纬度是指OA 与赤道平面所成角的度数．地球表面上能直接观测到一颗地球静止同步轨道卫星点的纬度最大值为α，记卫星信号覆盖地球表面的表面积为

$S=2\pi r^2(1-\cos\alpha)$（单位：km^2），则 S 占地球表面积的百分比约为（　　）

A．26%　　B．34%　　C．42%　　D．50%

14．在一个圆锥内有一个半径为R的半球，其底面与圆锥的底面重合，且与圆锥的侧面相切，若该圆锥体积的最小值为$\dfrac{9\pi}{2}$，则$R=$

A．1　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$2\sqrt{3}$

15．如图，在四边形$ABCD$中，$AB=BC=2$，$\angle ABC=90°$，$DA=DC=\sqrt{6}$，现沿对角线AC折起，使得平面$DAC\perp$平面ABC，此时点A，B，C，D在同一个球面上，则该球的体积是（　　）．

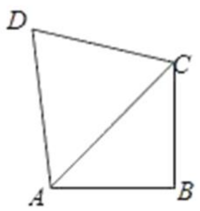


图1

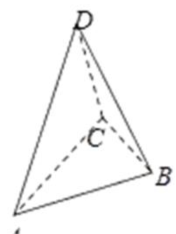
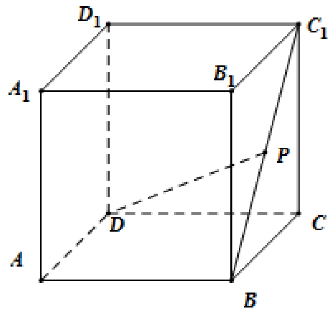


图2

A. $\frac{9}{2}\pi$　　B. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$　　C. $\frac{27}{2}\pi$　　D. 12π

二、多选题

16．如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为线段 BC_1 上的动点，下列说法正确的是（　　）



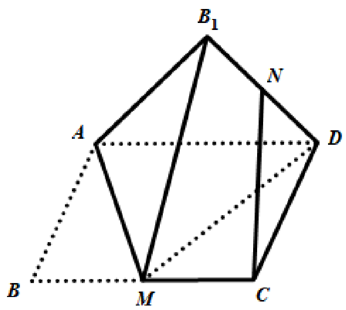
A．对任意点 P，$DP//$ 平面 AB_1D_1

B．三棱锥 $P-A_1DD_1$ 的体积为 $\frac{1}{6}$

C．线段 DP 长度的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

D．存在点 P，使得 DP 与平面 ADD_1A_1 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$

17．如图，矩形 $ABCD$ 中，M 为 BC 的中点，将 $\triangle ABM$ 沿直线 AM 翻折成 $\triangle AB_1M$，连结 B_1D，N 为 B_1D 的中点，则在翻折过程中，下列说法中所有正确的是（　　）



A．存在某个位置，使得 $CN\perp AB$

B．翻折过程中，CN 的长是定值

C．若 $AB=BM$，则 $AM\perp B_1D$

D．若 $AB=BM=1$，当三棱锥 B_1-AMD 的体积最大时，三棱锥 B_1-AMD 的外接球的表面积是 4π

18．向体积为 1 的正方体密闭容器内注入体积为 $x\left(0<x<1\right)$ 的液体，旋转容器，下列说法正确的是（　　）

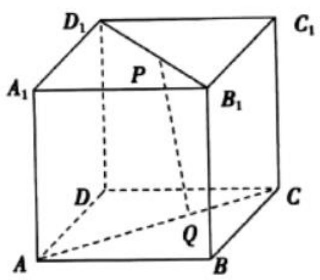
A．当 $x=\frac{1}{2}$ 时，容器被液面分割而成的两个几何体完全相同

B．$\forall x\in\left(0,1\right)$，液面都可以成正三角形形状

C．当液面与正方体的某条体对角线垂直时，液面面积的最大值为 $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

D．当液面恰好经过正方体的某条体对角线时，液面边界周长的最小值为$2\sqrt{5}$

19．如图所示，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P，Q分别是线段B_1D_1，AC上的动点，则下列说法正确的有（　　）



A．线段PQ长度的最小值为2

B．满足$PQ=2\sqrt{2}$的情况只有4种

C．无论P，Q如何运动，直线PQ都不可能与BD_1垂直

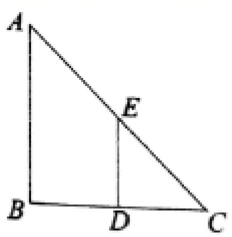
D．三棱锥$P-ABQ$的体积大小只与点Q的位置有关，与点P的位置无关

三、填空题

20．已知一个圆柱的轴截面为正方形，其侧面积为S_1，与该圆柱等底等高的圆锥的侧面积为S_2，则$\frac{S_2}{S_1}$的值为___.

21．已知正方体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，M、N分别为BB_1、AB的中点，则三棱锥A-NMD_1的体积为____________

22．如图，在$Rt\Delta ABC$中，$AB=BC=1$，D和E分别是边BC和AC上一点，$DE\perp BC$，将ΔCDE沿DE折起到点P位置，则该四棱锥$P-ABDE$体积的最大值为_______.

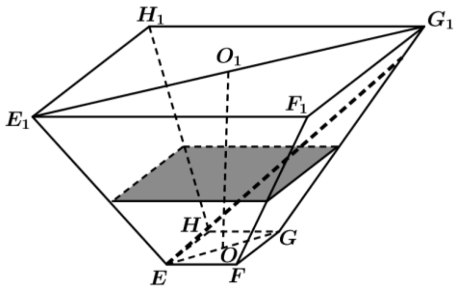


23．三棱锥$P-ABC$的4个顶点在半径为$\sqrt{2}$的球面上，$PA\perp$平面ABC，$\triangle ABC$是边长为$\sqrt{3}$的正三角形，则点A到平面PBC的距离为______.

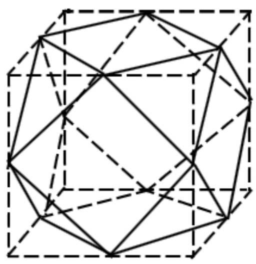
24．已知直四棱柱$ABCD$–$A_1B_1C_1D_1$的棱长均为2，$\angle BAD$=60°．以D_1为球心，$\sqrt{5}$为半径的球面与侧面

BCC_1B_1 的交线长为________.

25．如图，水平放置的正四棱台形玻璃容器的高为27cm，两底面对角线 EG，E_1G_1 的长分别为 25cm 和 97 cm.在容器中注入水，水深为 8cm.现有一根玻璃棒 l，其长度为 39cm.(容器厚度、玻璃棒粗细均忽略不计)，将 l 放在容器中，l 的一端置于点 E 处，另一端置于于侧棱 GG_1 上，则 l 浸没在水中部分的长度为___________cm.



26．半正多面体(*semiregularsolid*)亦称“阿基米德多面体”，是由边数不全相同的正多边形围成的多面体，体现了数学的对称美.以正方体每条棱的中点为顶点构造一个半正多面体，如图，它由八个正三角形和六个正方形构成，若它的所有棱长都为 1，则该半正多面体外接球的表面积为___________；若该半正多面体可以在一个正四面体内任意转动，则该正四面体体积最小值为___________.

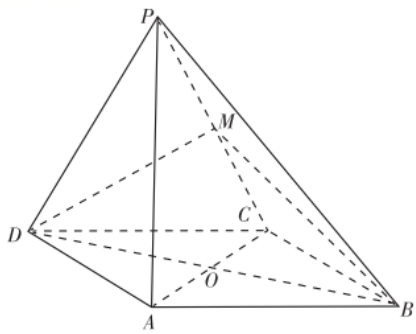


四、解答题

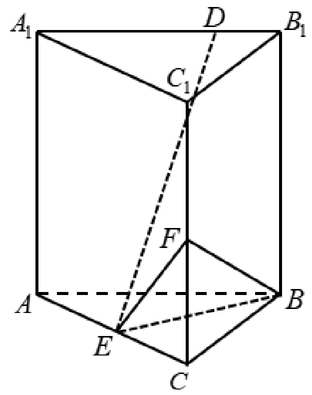
27．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，$PA\perp$平面 $ABCD$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，M 是 PC 的中点.

（1）求证：平面 $PAC\perp$平面 MBD；

（2）若 $PB\perp PD$，三棱锥 $P-ABD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，求四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面积.



28．已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 AA_1B_1B 为正方形，$AB=BC=2$，E，F 分别为 AC 和 CC_1 的中点，$BF\perp A_1B_1$.



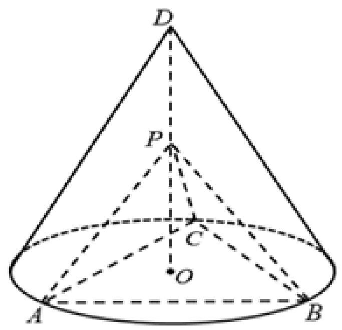
（1）求三棱锥 $F-EBC$ 的体积；

（2）已知 D 为棱 A_1B_1 上的点，证明：$BF\perp DE$.

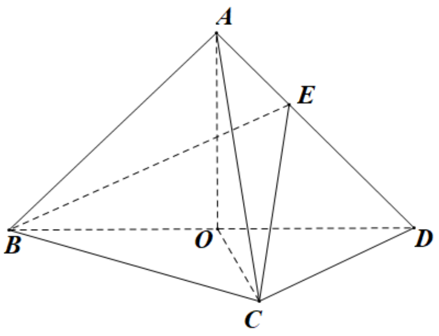
29．如图，D 为圆锥的顶点，O 是圆锥底面的圆心，$\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形，P 为 DO 上一点，$\angle APC=90°$.

（1）证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PAC；

（2）设 $DO=\sqrt{2}$，圆锥的侧面积为 $\sqrt{3}\pi$，求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.



30．如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD， $AB=AD$， O 为 BD 的中点.



（1）证明：$OA\perp CD$；

（2）若 $\triangle OCD$ 是边长为 1 的等边三角形，点 E 在棱 AD 上， $DE=2EA$，且二面角 $E-BC-D$ 的大小为 $45°$，求三棱锥 $A-BCD$ 的体积.

参考答案

1．B　2．A　3．C　4．D　5．A　6．B　7．B　8．D　9．C　10．B　11．B　12．D　13．C　14．B

15．A　16．ABC　17．BD　18．ACD　19．ABD

20．$\frac{\sqrt{5}}{4}$　21．$\frac{1}{3}$　22．$\frac{\sqrt{3}}{27}$　23．$\frac{6}{5}$　24．$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$．　25．32.5　26．4π　　$8\sqrt{3}$

27.【解析】(1) $\because PA\perp$平面$ABCD$，$BD\subset$平面$ABCD$，

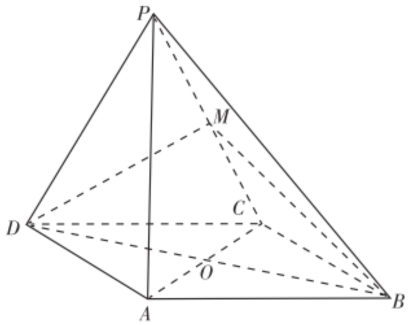
$\therefore PA\perp BD$，

又$\because$底面$ABCD$是菱形，$\therefore BD\perp AC$，

又$\because PA\cap AC=A$，$PA\subset$平面PAC，$AC\subset$平面PAC，

$\therefore BD\perp$平面PAC，

又$\because BD\subset$平面MBD，$\therefore$平面$PAC\perp$平面MBD．



(2) 设菱形$ABCD$的边长为x，

$\because \angle ABC=\frac{\pi}{3}$，$\therefore \angle BAD=\frac{2}{3}\pi$，

在ΔABD中，$BD^2=AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cos\angle BAD=2x^2-2x^2\left(-\frac{1}{2}\right)=3x^2$，

$\therefore BD=\sqrt{3}x$，

又$\because PA\perp$平面$ABCD$，$AB=AD$，$PB\perp PD$，$\therefore PB=PD=\frac{\sqrt{6}}{2}x$，

$\therefore PA=\sqrt{PB^2-AB^2}=\sqrt{\frac{3}{2}x^2-x^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，

又$S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD=\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$，

$\therefore V_{三棱锥P-ABD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABD}\cdot PA=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\therefore x=2$，

$\therefore PA=\sqrt{2}$，$PB=PD=\sqrt{6}$，

$\because \angle ABC=\frac{\pi}{3}$，$\therefore AC=AB=2$．

又$\because PA\perp$平面$ABCD$，$\therefore PC=PB=\sqrt{6}$，

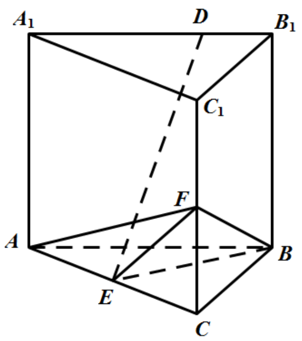
∴四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面积等于

$2S_{\Delta PAB}+2S_{\Delta PBC}$

$=2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2+2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{(\sqrt{6})^2-1}\times2$

$=2(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

28.【解析】(1)如图所示，连结 AF，



由题意可得：$BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，

由于 $AB\perp BB_1$，$BC\perp AB$，$BB_1\cap BC=B$，故 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1，

而 $BF\subset$ 平面 BCC_1B_1，故 $AB\perp BF$，

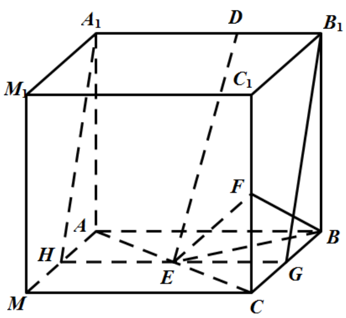
从而有 $AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{4+5}=3$，

从而 $AC=\sqrt{AF^2-CF^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$，

则 $AB^2+BC^2=AC^2$，$\therefore AB\perp BC$，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}s_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)=1$，$V_{F-EBC}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BCE}\times CF=\frac{1}{3}\times1\times1=\frac{1}{3}$.

(2)由(1)的结论可将几何体补形为一个棱长为 2 的正方体 $ABCM-A_1B_1C_1M_1$，如图所示，取棱 AM,BC 的中点 H,G，连结 A_1H,HG,GB_1，



正方形 BCC_1B_1 中，G,F 为中点，则 $BF\perp B_1G$，

又 $BF\perp A_1B_1, A_1B_1\bigcap B_1G=B_1$，

故 $BF\perp$平面 A_1B_1GH，而 $DE\subset$平面 A_1B_1GH，

从而 $BF\perp DE$.

29.【解析】(1) 连接 OA,OB,OC，$\because D$ 为圆锥顶点，O 为底面圆心，$\therefore OD\perp$平面 ABC，

$\because P$ 在 DO 上，$OA=OB=OC, \therefore PA=PB=PC$，

$\because \triangle ABC$ 是圆内接正三角形，$\therefore AC=BC$，$\triangle PAC\cong\triangle PBC$，

$\therefore \angle APC=\angle BPC=90^\circ$，即 $PB\perp PC, PA\perp PC$，

$PA\bigcap PB=P, \therefore PC\perp$平面 $PAB, PC\subset$平面 PAC，$\therefore$ 平面 $PAB\perp$平面 PAC；

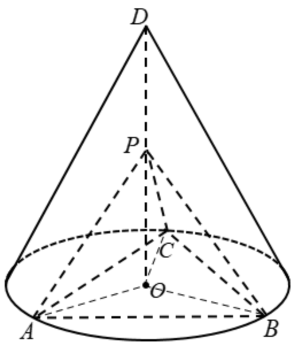
(2) 设圆锥的母线为 l，底面半径为 r，圆锥的侧面积为 $\pi rl=\sqrt{3}\pi, rl=\sqrt{3}$，

$OD^2=l^2-r^2=2$，解得 $r=1, l=\sqrt{3}$，$AC=2r\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，

在等腰直角三角形 APC 中，$AP=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

在 $Rt\triangle PAO$ 中，$PO=\sqrt{AP^2-OA^2}=\sqrt{\dfrac{6}{4}-1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}PO\cdot S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 3=\dfrac{\sqrt{6}}{8}$.



30.【解析】(1) 因为 AB=AD,O 为 BD 中点，所以 AO⊥BD

因为平面 ABD$\bigcap$平面 BCD=BD,平面 ABD⊥平面 BCD，$AO\subset$平面 ABD，

因此 AO⊥平面 BCD，

因为 $CD\subset$平面 BCD，所以 AO⊥CD

(2)作 EF⊥BD 于 F, 作 FM⊥BC 于 M,连 FM

因为 AO⊥平面 BCD，所以 AO⊥BD, AO⊥CD

所以 EF⊥BD, EF⊥CD, $BD\cap CD=D$,因此 EF⊥平面 BCD，即 EF⊥BC

因为 FM⊥BC，$FM \cap EF = F$,所以 BC⊥平面 EFM，即 BC⊥ME

则$\angle EMF$为二面角 E-BC-D 的平面角，$\angle EMF = \dfrac{\pi}{4}$

因为$BO = OD$,$\triangle OCD$为正三角形,所以$\triangle BCD$为直角三角形

因为$DE = 2EA$,$\therefore FM = \dfrac{1}{2}BF = \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{3}) = \dfrac{2}{3}$

从而 EF=FM=$\dfrac{2}{3}$ $\therefore AO = 1$

$\because AO \perp$平面 BCD,

所以$V = \dfrac{1}{3}AO \cdot S_{\triangle BCD} = \dfrac{1}{3}\times 1\times\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$