

数列的综合应用

一、单选题

1. 等比数列的前 n 项和, 前 $2n$ 项和, 前 $3n$ 项的和分别为 A, B, C , 则 ()

A. $A+B=C$

B. $B^2=AC$

C. $(A+B)-C=B^2$

D. $A^2+B^2=A(B+C)$

2. 数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_5=b_6$, 则

A. $a_3+a_7 \leq b_4+b_8$

B. $a_3+a_7 \geq b_4+b_8$

C. $a_3+a_7 \neq b_4+b_8$

D. $a_3+a_7=b_4+b_8$

3. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_5=S_4+S_3$, 且 $a_1=1$, 则 $S_{10}=()$

A. 45

B. 55

C. 81

D. 100

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1}+a_n=0$, $a_2=-\frac{4}{3}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 10 项和等于

A. $-6(1-3^{-10})$

B. $\frac{1}{9}(1-3^{-10})$

C. $3(1-3^{-10})$

D. $3(1+3^{-10})$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\sin \frac{n\pi}{3}$, 则 $a_1+a_2+a_4+a_5+a_7+a_8+a_{10}+a_{11}+a_{13}+\cdots+a_{28}+a_{29}=()$

A. 0

B. $\sqrt{3}$

C. $-\sqrt{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 2 的等比数列, S_n 是其前 n 项和, 且 $\frac{S_6}{S_3}=\frac{65}{64}$, 则数列 $\{\log_2 a_n\}$ 前 20 项和为 ()

A. -360

B. -380

C. 360

D. 380

7. 已知函数 $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+1$, 则 $f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2}{2021}\right)+\cdots+f\left(\frac{2019}{2021}\right)+f\left(\frac{2020}{2021}\right)$ 的值为 ()

A. 1

B. 2

C. 2020

D. 2021

8. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1=1$, $a_{n+1}^2=2S_n+n+1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 设数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则 T_n 的取值范围为

A. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

B. $(0,1)$

C. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

D. $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 是 1 为首项, 2 为公差的等差数列, $\{b_n\}$ 是 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 设 $c_n=a_{b_n}$,

$T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n, (n \in N^*)$, 则当 $T_n < 2019$ 时, n 的最大值是

- A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -9$, $a_5 = -1$. 记 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n (n=1, 2, \dots)$, 则数列 $\{T_n\}$ ().

- A. 有最大项, 有最小项 B. 有最大项, 无最小项
C. 无最大项, 有最小项 D. 无最大项, 无最小项

11. 我们把 $F_n = 2^{2^n} + 1 (n=0, 1, 2, \dots)$ 叫“费马数”(费马是十七世纪法国数学家). 设 $a_n = \log_2(F_n - 1)$,

$n=1, 2, 3, \dots$, 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则使不等式 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n > 2021 - 2n$ 成立的正整数 n 的最小值是 ()

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 116

12. 科技创新离不开科研经费的支撑, 在一定程度上, 研发投入被视为衡量“创新力”的重要指标.“十三五”时期我国科技实力和创新能力大幅提升, 2020 年我国全社会研发经费投入达到了 24426 亿元, 总量稳居世界第二, 其中基础研究经费投入占研发经费投入的比重是 6.16%.“十四五”规划《纲要草案》提出, 全社会研发经费投入年均增长要大于 7%, 到 2025 年基础研究经费占比要达到 8% 以上, 请估计 2025 年我国基础研究经费为 ()

- A. 1500 亿元左右 B. 1800 亿元左右 C. 2200 亿元左右 D. 2800 亿元左右

二、多选题

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 4, 且满足 $2(n+1)a_n - na_{n+1} = 0 (n \in N^*)$, 则 ()

- A. $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为等差数列
B. $\{a_n\}$ 为递增数列
C. $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 4$
D. $\left\{\frac{a_n}{2^{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{n^2 + n}{2}$

14. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的首项为 2, 前 n 项和为 S_n , 且 $\frac{(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n)}{2} + S_n + a_n = S_{n+1} + 1$,

$b_n = \frac{1}{a_n + a_{n+1} - 2}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若 $T_n < 16$, 则 n 的值可以为 ()

- A. 543 B. 542
C. 546 D. 544

15. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_n + a_{n+1} = 3^n$, 则称 $\{a_n\}$ 为“和等比数列”. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且

$a_1 = 1$, 则下列对“和等比数列”的判断中正确的有 ()

A. $a_{2020} = \frac{3^{2020} - 1}{4}$

B. $a_{2020} = \frac{3^{2021} - 1}{4}$

C. $S_{2021} = \frac{3^{2022} - 1}{8}$

D. $S_{2021} = \frac{3^{2023} - 1}{8}$

16. 下面是按照一定规律画出一列“树形图”.



其中, 第 2 个图比第 1 个图多 2 个“树枝”, 第 3 个图比第 2 个图多 4 个“树枝”, 第 4 个图比第 3 个图多 8 个

“树枝”. 假设第 n 个图的树枝数为 a_n , 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 则下列说法正确的是 ()

A. $a_n = 2^{n-1}$

B. $a_{n+1} = a_n + 2^n$

C. $S_n = 2a_n - n$

D. $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} = 2a_{2n} - n + 1$

三、填空题

17. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $4a_1, 2a_4, a_7$ 成等差数列, 则 $\frac{a_3 + a_5}{a_{11} + a_9} =$ _____.

18. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} - a_n - 1 = 2^n$, 则 $a_n =$ _____.

19. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , 若 $a_1 = -24, a_4 = -\frac{8}{9}$, 则当 T_n 取最大值时, n 的值为 _____.

20. 数列 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 S_1, S_m, S_n 成等比数列 ($m > 1$), 则正整数 n 值为 _____.

21. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列. 已知数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - n + 2^n - 1 (n \in \mathbf{N}^+)$, 则 $d + q$ 的值是 _____.

22. 某校学生在研究民间剪纸艺术时, 发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折, 规格为 $20\text{dm} \times 12\text{dm}$ 的长方形纸, 对折 1 次共可以得到 $10\text{dm} \times 12\text{dm}$, $20\text{dm} \times 6\text{dm}$ 两种规格的图形, 它们的面积之和 $S_1 = 240\text{dm}^2$, 对折 2 次共可以得到 $5\text{dm} \times 12\text{dm}$, $10\text{dm} \times 6\text{dm}$, $20\text{dm} \times 3\text{dm}$ 三种规格的图形, 它们的面积之和 $S_2 = 180\text{dm}^2$, 以此类推, 则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为 _____; 如果对折 n 次, 那

么 $\sum_{k=1}^n S_k =$ _____ dm^2 .

四、解答题

23. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_1=1$ ，_____，在以下三个条件中任选一个填入以上横线上，并求数列 $\{a_{n+1}-S_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

① $a_{n+1}=2S_n+2$ ； ② $a_{n+1}=2a_n+1$ ； ③ $2S_n=a_{n+1}+1$.

24. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1$ ， $b_1=0$ ， $4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$ ， $4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$.

(1) 证明： $\{a_n+b_n\}$ 是等比数列， $\{a_n-b_n\}$ 是等差数列；

(2) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

25. 设 $\{a_n\}$ 是公比不为1的等比数列， a_1 为 a_2 ， a_3 的等差中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的公比；

(2) 若 $a_1=1$ ，求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

26. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 4$, $a_3 - a_1 = 8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 为数列 $\{\log_3 a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m + S_{m+1} = S_{m+3}$, 求 m .

27. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{na_n}{3}$. 已知 $a_1, 3a_2, 9a_3$ 成等差数列.

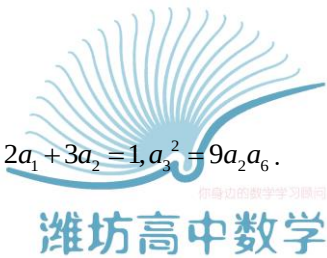
(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 和 T_n 分别为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 证明: $T_n < \frac{S_n}{2}$.

28. 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $2a_1 + 3a_2 = 1, a_3^2 = 9a_2a_6$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \dots + \log_3 a_n$, 求数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .



29. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, 其前 n 项和为 S_n , 满足 $S_6 = 39$, 且 a_2, a_4, a_{12} 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = 2^{a_n} + a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

30. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, $a_1 = b_1 = 1, a_5 = 5(a_4 - a_3), b_5 = 4(b_4 - b_3)$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证: $S_n S_{n+2} < S_{n+1}^2 (n \in \mathbf{N}^*)$;

(III) 对任意的正整数 n , 设 $c_n = \begin{cases} \frac{(3a_n - 2)b_n}{a_n a_{n+2}}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$ 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

参考答案

1. D 2. B 3. D 4. C 5. A 6. A 7. C 8. D 9. A 10. B 11. B 12. D

13. BD 14. AB 15. AC 16. BC

17. $\frac{1}{4}$ 18. $2^n + n - 2$ 19. 4 20. 8 21. 4 22. 5 $720 - \frac{15(3+n)}{2^{n-4}}$ 23. 【解析】选条件①时, 因为 $a_{n+1} = 2S_n + 2$, 所以 $S_{n+1} - S_n = 2S_n + 2$,所以 $S_{n+1} = 3S_n + 2$, 整理得 $S_{n+1} + 1 = 3(S_n + 1)$,所以 $\{S_n + 1\}$ 为首项为 2, 公比为 3 的等比数列, 所以 $S_n + 1 = 2 \times 3^{n-1}$, 即 $S_n = 2 \times 3^{n-1} - 1$ 因为 $a_{n+1} = 2S_n + 2$,所以 $a_{n+1} - S_n = S_n + 2 = 2 \times 3^{n-1} + 1$,所以数列 $\{a_{n+1} - S_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = (2 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + \cdots + 2 \times 3^{n-1}) + (1 + 1 + \cdots + 1) = 3^n + n - 1$.即 $T_n = 3^n + n - 1$ 选条件②时, $a_{n+1} = 2a_n + 1$;整理得: $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$,故数列 $\{a_n + 1\}$ 是以 $a_1 + 1 = 2$ 为首项, 2 为公比的等比数列.所以 $a_n = 2^n - 1$,故 $a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$,所以 $a_{n+1} - S_n = 2^{n+1} - 1 - \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} - n \right) = n + 1$,所以 $\{a_{n+1} - S_n\}$ 为等差数列,所以数列 $\{a_{n+1} - S_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{1}{2} \times n \times (2 + n + 1) = \frac{n(n+3)}{2}$.选条件③时, 由于 $2S_n = a_{n+1} + 1$ ①,当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = a_n + 1$, ②,

①-②得: $a_{n+1} = 3a_n$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以1为首项, 3为公比的等比数列,

$$\text{所以 } S_n = \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{3^n-1}{2},$$

$$\text{则 } a_{n+1} - S_n = S_n - 1 = \frac{3^n-1}{2} - 1 = \frac{3^n-3}{2},$$

所以数列 $\{a_{n+1} - S_n\}$ 的前 n 项和

$$T_n = \frac{1}{2}(3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n) - \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{3}{2}\right) = \frac{3^{n+1} - 3 - 6n}{4}.$$

$$\text{即 } T_n = \frac{3^{n+1} - 3 - 6n}{4}$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{3^{n+1} - 3 - 6n}{4}.$$

24. 【解析】(1)由题意可知 $4a_{n+1} = 3a_n - b_n + 4$, $4b_{n+1} = 3b_n - a_n - 4$, $a_1 + b_1 = 1$, $a_1 - b_1 = 1$,

所以 $4a_{n+1} + 4b_{n+1} = 3a_n - b_n + 4 + 3b_n - a_n - 4 = 2a_n + 2b_n$, 即 $a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$,

所以数列 $\{a_n + b_n\}$ 是首项为1、公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, $a_n + b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

因为 $4a_{n+1} - 4b_{n+1} = 3a_n - b_n + 4 - (3b_n - a_n - 4) = 4a_n - 4b_n + 8$,

所以 $a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n + 2$, 数列 $\{a_n - b_n\}$ 是首项1、公差为2的等差数列, $a_n - b_n = 2n - 1$.

(2)由(1)可知, $a_n + b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_n - b_n = 2n - 1$,

所以 $a_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n + a_n - b_n) = \frac{1}{2^n} + n - \frac{1}{2}$, $b_n = \frac{1}{2}[a_n + b_n - (a_n - b_n)] = \frac{1}{2^n} - n + \frac{1}{2}$.

25. 【解析】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , a_1 为 a_2, a_3 的等差中项,

$$\because 2a_1 = a_2 + a_3, a_1 \neq 0, \therefore q^2 + q - 2 = 0,$$

$$\because q \neq 1, \therefore q = -2;$$

(2) 设 $\{na_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1, a_n = (-2)^{n-1}$,

$$S_n = 1 \times 1 + 2 \times (-2) + 3 \times (-2)^2 + \cdots + n \times (-2)^{n-1}, \quad ①$$

$$-2S_n = 1 \times (-2) + 2 \times (-2)^2 + 3 \times (-2)^3 + \cdots + (n-1) \times (-2)^{n-1} + n \times (-2)^n, \quad ②$$

$$\text{①}-\text{②得, } 3S_n = 1 + (-2) + (-2)^2 + \cdots + (-2)^{n-1} - n(-2)^n$$

$$= \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} - n(-2)^n = \frac{1-(1+3n)(-2)^n}{3},$$

$$\therefore S_n = \frac{1-(1+3n)(-2)^n}{9}.$$

26. 【解析】(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

根据题意, 有 $\begin{cases} a_1 + a_1 q = 4 \\ a_1 q^2 - a_1 = 8 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 3 \end{cases}$,

所以 $a_n = 3^{n-1}$;

(2) 令 $b_n = \log_3 a_n = \log_3 3^{n-1} = n-1$,

所以 $S_n = \frac{n(0+n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$,

根据 $S_m + S_{m+1} = S_{m+3}$, 可得 $\frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{(m+2)(m+3)}{2}$,

整理得 $m^2 - 5m - 6 = 0$, 因为 $m > 0$, 所以 $m = 6$,

27. 【解析】因为 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列且 $a_1, 3a_2, 9a_3$ 成等差数列,

所以 $6a_2 = a_1 + 9a_3$, 所以 $6a_1 q = a_1 + 9a_1 q^2$,

即 $9q^2 - 6q + 1 = 0$, 解得 $q = \frac{1}{3}$, 所以 $a_n = (\frac{1}{3})^{n-1}$,

所以 $b_n = \frac{na_n}{3} = \frac{n}{3^n}$.

(2) 证明: 由 (1) 可得 $S_n = \frac{1 \times (1 - \frac{1}{3^n})}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{3^n})$,

$T_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n}$, ①

$\frac{1}{3}T_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}}$, ②

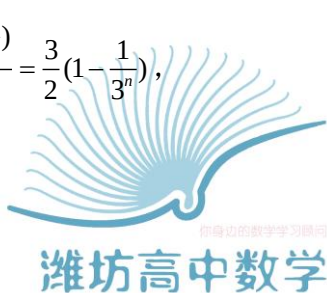
①-②得 $\frac{2}{3}T_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{\frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3^n})}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n}) - \frac{n}{3^{n+1}}$,

所以 $T_n = \frac{3}{4}(1 - \frac{1}{3^n}) - \frac{n}{2 \cdot 3^n}$,

所以 $T_n - \frac{S_n}{2} = \frac{3}{4}(1 - \frac{1}{3^n}) - \frac{n}{2 \cdot 3^n} - \frac{3}{4}(1 - \frac{1}{3^n}) = -\frac{n}{2 \cdot 3^n} < 0$,

所以 $T_n < \frac{S_n}{2}$.

28. 【解析】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,



由 $a_3^2 = 9a_2a_6$ 得 $a_3^2 = 9a_4^2$,

所以 $q^2 = \frac{1}{9}$. 由条件可知 $q > 0$, 故 $q = \frac{1}{3}$.

由 $2a_1 + 3a_2 = 1$ 得 $2a_1 + 3a_1q = 1$, 所以 $a_1 = \frac{1}{3}$.

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{3^n}$.

$$(2) b_n = \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \dots + \log_3 a_n = -(1+2+\dots+n) = -\frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{故 } \frac{1}{b_n} = -\frac{2}{n(n+1)} = -2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} = -2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = -\frac{2n}{n+1}$$

所以数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 $-\frac{2n}{n+1}$

29. 【解析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 公差为 d ($d \neq 0$),

$$\because S_6 = 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 39 \quad \therefore a_1 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2}d \quad \text{①},$$

a_2, a_4, a_{12} 成等比数列得: $(a_1 + d) \cdot (a_1 + 11d) = (a_1 + 3d)^2$, 整理得: $d^2 + 3a_1d = 0$,

$$\because d \neq 0, \therefore d = -3a_1 \quad \text{②},$$

由①②解得: $d = 3, a_1 = -1, \therefore a_n = -1 + 3(n-1) = 3n-4$

(2) 由(1)得: $b_n = 2^{3n-4} + 3n-4$, 由于 $\frac{2^{a_n}}{2^{a_{n-1}}} = 2^d = 8$ ($n \geq 2$) 为常数, $\therefore$ 数列 $\{2^{a_n}\}$ 为公比为 8 的等比数列,

$$\therefore T_n = 2^{-1} + 2^2 + 2^5 + \dots + 2^{3n-4} + (-1) + 2 + 5 + \dots + (3n-4)$$

$$= \frac{2^{-1}(1-8^n)}{1-8} + \frac{(-1+3n-4)n}{2} = \frac{8^n}{14} + \frac{3n^2}{2} - \frac{5n}{2} - \frac{1}{14}.$$

30. 【解析】(I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q .

由 $a_1 = 1, a_5 = 5(a_4 - a_3)$, 可得 $d = 1$.

从而 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n$.

由 $b_1 = 1, b_5 = 4(b_4 - b_3)$,

又 $q \neq 0$, 可得 $q^2 - 4q + 4 = 0$, 解得 $q = 2$,

从而 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^{n-1}$.

(II) 证明: 由 (I) 可得 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$,

$$\text{故 } S_n S_{n+2} = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3), \quad S_{n+1}^2 = \frac{1}{4} (n+1)^2 (n+2)^2,$$

$$\text{从而 } S_n S_{n+2} - S_{n+1}^2 = -\frac{1}{2} (n+1)(n+2) < 0,$$

所以 $S_n S_{n+2} < S_{n+1}^2$.

$$\text{(III) 当 } n \text{ 为奇数时, } c_n = \frac{(3a_n - 2)b_n}{a_n a_{n+2}} = \frac{(3n-2)2^{n-1}}{n(n+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^{n-1}}{n},$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } c_n = \frac{a_{n-1}}{b_{n+1}} = \frac{n-1}{2^n},$$

$$\text{对任意的正整数 } n, \text{ 有 } \sum_{k=1}^n c_{2k-1} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2^{2k}}{2k+1} - \frac{2^{2k-2}}{2k-1} \right) = \frac{2^{2n}}{2n+1} - 1,$$

$$\text{和 } \sum_{k=1}^n c_{2k} = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{4^k} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \cdots + \frac{2n-3}{4^{n-1}} + \frac{2n-1}{4^n} \quad ①$$

$$\text{由 } ① \text{ 得 } \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n c_{2k} = \frac{1}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{5}{4^4} + \cdots + \frac{2n-3}{4^n} + \frac{2n-1}{4^{n+1}} \quad ②$$

$$\text{由 } ①② \text{ 得 } \frac{3}{4} \sum_{k=1}^n c_{2k} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \cdots + \frac{2}{4^n} - \frac{2n-1}{4^{n+1}} = \frac{\frac{2}{4} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} - \frac{2n-1}{4^{n+1}},$$

$$\text{由于 } \frac{\frac{2}{4} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} - \frac{2n-1}{4^{n+1}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{4^n} - \frac{1}{4} - \frac{2n-1}{4^n} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{12} - \frac{6n+5}{3 \times 4^{n+1}},$$

$$\text{从而得: } \sum_{k=1}^n c_{2k} = \frac{5}{9} - \frac{6n+5}{9 \times 4^n}.$$

$$\text{因此, } \sum_{k=1}^{2n} c_k = \sum_{k=1}^n c_{2k-1} + \sum_{k=1}^n c_{2k} = \frac{4^n}{2n+1} - \frac{6n+5}{9 \times 4^n} - \frac{4}{9}.$$

$$\text{所以, 数列 } \{c_n\} \text{ 的前 } 2n \text{ 项和为 } \frac{4^n}{2n+1} - \frac{6n+5}{9 \times 4^n} - \frac{4}{9}.$$

