等比数列及其前 n 项和

一、单选题

1．已知数列$\{a_n\}$为等比数列，其前n项和为S_n，若$a_2a_6=-2a_7$，$S_3=-6$，则$a_6=$（　　）.

A．-2或 32　　B．-2或 64　　C．2 或-32　　D．2 或-64

2．在等比数列$\{a_n\}$中，若a_2，a_9是方程$x^2-x-6=0$的两根，则$a_5\cdot a_6$的值为

A．6　　B．-6　　C．-1　　D．1

3．记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和.若$S_2=4$，$S_4=6$，则$S_6=$（　　）

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

4．记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和．若$a_5-a_3=12$，$a_6-a_4=24$，则$\frac{S_n}{a_n}=$（　　）

A．2^n-1　　B．$2-2^{1-n}$　　C．$2-2^{n-1}$　　D．$2^{1-n}-1$

5．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n=2a_n-1$，则$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$

A．$2n-1$　　B．2^{n-1}　　C．2^n-1　　D．$2n+1$

6．已知正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_9=a_8+2a_7$，若存在两项a_m，a_n，使得$a_ma_n=2a_1^2$，则$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}$的最小值为

A．$2\sqrt{2}$　　B．$\frac{8}{3}$　　C．3　　D．$3\sqrt{2}$

7．数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{m+n}=a_ma_n$，若$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+10}=2^{15}-2^5$，则$k=$（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

8．已知等比数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，且满足公比$0<q<1$，$b_1<0$，则下列说法不正确的是（　　）

A．S_n一定单调递减　　B．b_n一定单调递增

C．式子$b_n-S_n\geqslant 0$恒成立　　D．可能满足$b_k=S_k$，且$k\neq 1$

9．等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，已知向量$\vec{a}=(a_4,a_5)$，$\vec{b}=(a_7,a_6)$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，则

$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\ldots+\log_2 a_{10}=$(　　)

A．12　　B．10　　C．5　　D．$2+\log_2 5$

10．在递增的数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}$，若$a_1+a_m=130, a_2\cdot a_{m-1}=256$，且前$m$项和$S_m=170$，则$m=$

（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

11．已知S_n是等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若存在$m\in\mathbf{N}^*$，满足$\frac{S_{2m}}{S_m}=9,\frac{a_{2m}}{a_m}=\frac{5m+1}{m-1}$，则数列$\{a_n\}$的公比为（　　）

A．-2　　B．2　　C．-3　　D．3

12．设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=1$，$S_{n+1}=2S_n+1$，则$S_7=$（　　）

A．63　　B．127　　C．128　　D．256

13．为了更好地解决就业问题，国家在2020年提出了“地摊经济”为响应国家号召，有不少地区出台了相关政策去鼓励“地摊经济”.某摊主2020年4月初向银行借了免息贷款8000元，用于进货，因质优价廉，供不应求，据测算：每月获得的利润是该月初投入资金的20%，每月底扣除生活费800元，余款作为资金全部用于下月再进货，如此继续，预计到2021年3月底该摊主的年所得收入为（　　）

（取$(1.2)^{11}=7.5$，$(1.2)^{12}=9$）

A．24000元　　B．26000元　　C．30000元　　D．32000元

二、多选题

14．已知正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_4=2a_2+a_3$，若设其公比为q，前n项和为S_n，则（　　）

A．$q=2$　　B．$a_n=2^n$　　C．$S_{10}=2047$　　D．$a_n+a_{n+1}<a_{n+2}$

15．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n\cdot a_{n+1}=2^n$，$n\in\mathbf{N}_+$，则下列说法正确的是（　　）

A．$a_4=4$　　B．$\{a_{2n}\}$是等比数列

C．$a_{2n}-a_{2n-1}=2^{n-1}$　　D．$a_{2n-1}+a_{2n}=2^{n+1}$

16．已知$n,m\in\mathbf{N}^*$，将数列$\{4n+1\}$与数列$\{5^m\}$的公共项从小到大排列得到数列$\{a_n\}$，则（　　）

A．$a_n=5n$　　B．$a_n=5^n$

C．$\{a_n\}$的前n项和$\frac{5(5^n-1)}{4}$　　D．$\{a_n\}$的前n项和为$\frac{5(25^n-1)}{24}$

17．已知S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，且$a_1=1$，$\frac{1}{a_{n+1}\cdot a_n}=2^n$，则（　　）

A．数列$\{a_n\}$是等比数列　　B．$a_{n+1}\le a_n$恒成立

C．$S_n<3$恒成立　　D．$S_n\le 2$恒成立

18．（多选题）设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，其前 n 项和为S_n，前 n 项积为T_n，并满足条件

$a_1>1, a_{2019}a_{2020}>1$，$\dfrac{a_{2019}-1}{a_{2020}-1}<0$，下列结论正确的是（　　）

A．$S_{2019}<S_{2020}$　　B．$a_{2019}a_{2021}-1<0$

C．T_{2020}是数列$\{T_n\}$中的最大值　　D．数列$\{T_n\}$无最大值

三、填空题

19．记 S_n为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和.若 $a_1=1$，$S_3=\dfrac{3}{4}$，则 S_4=____________.

20．已知等比数列$\{a_n\}$的公比为q，且$16a_1$，$4a_2$，a_3成等差数列，则q的值是____________.

21．设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，写出$\{a_n\}$的一个通项公式$a_n=$__________，满足下面两个条件：①$\{a_n\}$是单调递减数列；②$\{S_n\}$是单调递增数列.

22．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n, a_1=1, S_n=2a_{n+1}$，则$S_n=$____________.

23．在疫情防控过程中，某医院一次性收治患者 127 人.在医护人员的精心治疗下，第 15 天开始有患者治愈出院，并且恰有其中的 1 名患者治愈出院.如果从第 16 天开始，每天出院的人数是前一天出院人数的 2 倍，那么第 19 天治愈出院患者的人数为______________，第______________天该医院本次收治的所有患者能全部治愈出院.

24．英国著名物理学家牛顿用“作切线”的方法求函数零点时，给出的“牛顿数列”在航空航天中应用广泛，若数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，则称数列$\{x_n\}$为牛顿数列.如果函数$f(x)=x^2-4$，数列$\{x_n\}$为牛顿数列，设$a_n=\ln\dfrac{x_n+2}{x_n-2}$，且$a_1=1$，$x_n>2$.则$a_{2021}=$________；数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，则$S_{2021}=$________.

四、解答题

25．记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$S_n=n^2$，等比数列$\{b_n\}$满足$b_1=a_1$，$b_3=a_5$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求$\{b_n\}$的前n项和T_n.

26．已知公比大于1的等比数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_4=20, a_3=8$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求$a_1a_2-a_2a_3+\ldots+(-1)^{n-1}a_na_{n+1}$.

27．已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_2=18$，$S_4=90$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=15-\log_2\left(\dfrac{1}{3}a_n\right)$，记数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_n$及$T_n$的最大值.

28．已知公比大于1的等比数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_4=20, a_3=8$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记b_m为$\{a_n\}$在区间$(0,m](m\in\mathbf{N}^*)$中的项的个数，求数列$\{b_m\}$的前100项和S_{100}.

29．已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，满足$a_{n+1}=2a_n+1$，且$a_1+2a_2=a_3$.

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（2）求使得$S_n\le 121$成立的n的最大值.

30．已知等差数列$\left\{a_n\right\}$的公差为$d>1$，前n项和为S_n，满足$S_3=9$，a_1,a_2,a_5成等比数列.

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式

（2）若$b_n=2^{n-1}$，判断a_n与$b_n\left(n\in N^*\right)$的大小，并说明理由.

参考答案

1．B　2．B　3．A　4．B　5．B　6．C　7．C　8．D　9．C　10．B　11．B　12．B　13．D

14．ABD　15．ABC　16．BC　17．BC　18．AB

19．$\frac{5}{8}$.　20．4　21．$\left(\frac{1}{2}\right)^n$（答案不唯一）　22．$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$　23．16　　21　24．2^{2020}　　$2^{2021}-1$

25.【解析】（1）当$n=1$时，$a_1=S_1=1$，

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-(n-1)^2$

$=2n-1$，

因为$a_1=1$适合上式，

所以$a_n=2n-1\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$.

（2）由（1）得$b_1=1$，$b_3=9$，

设等比数列$\{b_n\}$的公比为q，则$b_3=b_1\cdot q^2=9$，解得$q=\pm 3$，

当$q=3$时，$T_n=\frac{1\cdot\left(1-3^n\right)}{1-3}=\frac{3^n}{2}-\frac{1}{2}$，

当$q=-3$时，$T_n=\frac{1\cdot\left[1-(-3)^n\right]}{1-(-3)}=\frac{1}{4}-\frac{(-3)^n}{4}$.

26.【解析】(1) 设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>1)$，则$\begin{cases}a_2+a_4=a_1q+a_1q^3=20\\ a_3=a_1q^2=8\end{cases}$，

整理可得：$2q^2-5q+2=0$，

$\because q>1, q=2, a_1=2$，

数列的通项公式为：$a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$.

(2)由于：$(-1)^{n-1}a_na_{n+1}=(-1)^{n-1}\times 2^n\times 2^{n+1}=(-1)^{n-1}2^{2n+1}$，故：

$a_1a_2-a_2a_3+\ldots+(-1)^{n-1}a_na_{n+1}$

$=2^3-2^5+2^7-2^9+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot 2^{2n+1}$

$$=\frac{2^3\left[1-\left(-2^2\right)^n\right]}{1-\left(-2^2\right)}=\frac{8}{5}-(-1)^n\frac{2^{2n+3}}{5}.$$

27.【解析】（1）设数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，若$q=1$，有$S_4=4a_1$，$S_2=2a_1$，而$S_4=90\neq 2S_4=36$，故$q\neq 1$，

则$\begin{cases}S_2=\dfrac{a_1\left(1-q^2\right)}{1-q}=18\\ S_4=\dfrac{a_1\left(1-q^4\right)}{1-q}=\dfrac{a_1\left(1+q^2\right)\left(1-q^2\right)}{1-q}=90\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=6\\ q=2\end{cases}$.

故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=6\times 2^{n-1}=3\times 2^n$.

（2）由$b_n=15-\log_2 2^n=15-n$，

则$T_n=\dfrac{n(14+15-n)}{2}=-\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{29n}{2}$.

由二次函数$y=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{29x}{2}$的对称轴为$x=-\dfrac{\frac{29}{2}}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{29}{2}$，

故当$n=14$或 15 时T_n有最大值，其最大值为$\dfrac{14\times 15}{2}=105$.

28.【解析】（1）由于数列$\{a_n\}$是公比大于1的等比数列，设首项为a_1，公比为q，依题意有

$\begin{cases}a_1q+a_1q^3=20\\ a_1q^2=8\end{cases}$，解得解得$a_1=2,q=2$，或$a_1=32,q=\dfrac{1}{2}$(舍)，

所以$a_n=2^n$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n$.

（2）由于$2^1=2,2^2=4,2^3=8,2^4=16,2^5=32,2^6=64,2^7=128$，所以

b_1对应的区间为：$(0,1]$，则$b_1=0$；

b_2,b_3对应的区间分别为：$(0,2],(0,3]$，则$b_2=b_3=1$，即有 2 个1；

b_4,b_5,b_6,b_7对应的区间分别为：$(0,4],(0,5],(0,6],(0,7]$，则$b_4=b_5=b_6=b_7=2$，即有2^2个2；

$b_8,b_9,\cdots,b_{15}$对应的区间分别为：$(0,8],(0,9],\cdots,(0,15]$，则$b_8=b_9=\cdots=b_{15}=3$，即有$2^3$个$3$；

$b_{16},b_{17},\cdots,b_{31}$对应的区间分别为：$(0,16],(0,17],\cdots,(0,31]$，则$b_{16}=b_{17}=\cdots=b_{31}=4$，即有$2^4$个$4$；

$b_{32},b_{33},\cdots,b_{63}$对应的区间分别为：$(0,32],(0,33],\cdots,(0,63]$，则$b_{32}=b_{33}=\cdots=b_{63}=5$，即有$2^5$个$5$；

$b_{64},b_{65},\cdots,b_{100}$ 对应的区间分别为：$(0,64],(0,65],\cdots,(0,100]$，则 $b_{64}=b_{65}=\cdots=b_{100}=6$，即有 37 个 6.

所以 $S_{100}=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+5\times2^5+6\times37=480$.

29.【解析】(1) $a_{n+1}=2a_n+1$，即 $a_{n+1}+1=2a_n+2$，$\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，

因为 $a_1+2a_2=a_3$，$a_3=2a_2+1$，所以 $a_1=1$，$a_1+1=2$，

则数列 $\{a_n+1\}$ 是以 2 为首项、2 为公比的等比数列，$a_n+1=2^n$，$a_n=2^n-1$.

(2) 因为 $a_n=2^n-1$，

所以 $S_n=2^1+2^2+\cdots+2^n-n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$，

因为 $S_n\le121$，所以 $2^{n+1}-n-2?121$，$2^{n+1}-n\le123$，

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以解得 $1\le n\le6$，使得 $S_n\le121$ 成立的 n 的最大值为 6.

30.【解析】(1) 根据题中条件，可得 $\begin{cases}S_3=3(a_1+d)=9\\ a_2{}^2=a_1a_5\\ d>1\end{cases}$，即 $\begin{cases}a_1+d=3\\ (a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)\\ d>1\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a_1=1\\ d=2\end{cases}$，所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$；

(2) 由 (1) 知 $a_n=2n-1$，

则 $b_n-a_n=2^{n-1}-2n+1$，令 $f(n)=2^{n-1}-2n+1$，

则 $f(n+1)-f(n)=2^n-2(n+1)+1-2^{n-1}+2n-1=2^{n-1}-2$，

当 $n\ge3$ 时，$f(n+1)-f(n)=2^{n-1}-2>0$，即 $f(n)=2^{n-1}-2n+1$ 在 $n\ge3$ 上单调递增；

所以 $f(n)\ge f(3)=4-6+1=-1$；

又 $f(1)=2^{1-1}-2+1=0$，$f(2)=2-4+1=-1$，$f(3)=4-6+1=-1$，$f(4)=8-8+1=1$，

所以当 $n\ge4$ 时，$f(n)>0$，即 $b_n>a_n$；

当 $n=2$ 或 3 时，$f(n)<0$，即 $b_n<a_n$；

当 $n=1$ 时，$f(n)=0$，即 $b_n=a_n$；

综上，当 $n\le3$ 时，$b_n\le a_n$；当 $n\ge4$ 时，$b_n>a_n$.