等差数列及其前 n 项和

一、单选题

1．记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n. 若$a_6=16$，$S_5=35$，则$\{a_n\}$的公差为

A．3　B．2　C．-2　D．-3

2．已知$\{a_n\}$是等差数列，且a_2+1是a_1和a_4的等差中项，则$\{a_n\}$的公差为（　　）

A．1　B．2　C．-2　D．-1

3．在等差数列$\{a_n\}$中，a_3，a_9是方程$x^2+24x+12=0$的两根，则数列$\{a_n\}$的前 11 项和等于

A．66　B．132　C．-66　D．-132

4．已知$\{a_n\}$为递增的等差数列，$a_3\cdot a_4=15$，$a_2+a_5=8$，若$a_n=21$，则$n=$（　　）

A．9　B．10　C．11　D．12

5．已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+2a_5=15$，S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，则$S_7=$（　　）

A．30　B．35　C．40　D．45

6．$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个等差数列，其中$\dfrac{a_k}{b_k}(1\le k\le 5)$为常值，$a_1=288$，$a_5=96$，$b_1=192$，则$b_3=$（　　）

A．64　B．128　C．256　D．512

7．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$a_1=-\dfrac{2}{3},S_n+\dfrac{1}{S_n}+2=a_n\left(n\ge 2\right)$，则下面选项为等差数列的是（　　）

A．$\{S_n+1\}$　B．$\{S_n-1\}$　C．$\left\{\dfrac{1}{S_n+1}\right\}$　D．$\left\{\dfrac{1}{S_n-1}\right\}$

8．已知数列$\{a_n\}$是等差数列，若$a_1+a_2+a_3=1$，$a_4+a_5+a_6=3$，则$a_7+a_8+a_9=$（　　）

A．5　B．4　C．9　D．7

9．已知数列$\{a_n\}$中，$a_2=4$，$a_{m+n}=a_m+a_n$，则$a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{19}=$（　　）

A．95　B．145　C．270　D．520

10．北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所，分上、中、下三层，上层中心有一块圆形石板(称为天心石)，环绕天心石砌 9 块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加 9 块，下一层的第一环比上一层的最后一环多 9 块，向外每环依次也增加 9 块，已知每层环数相同，且下层比中层多 729 块，则三层共有扇面形石板(不含天心石)（ ）

A．3699 块　　B．3474 块　　C．3402 块　　D．3339 块

11．等差数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$前n项和分别为S_n与T_n，且$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{2n+2}{n+3}$，则$\dfrac{2a_6}{b_1+b_{17}}=$（　　）

A．$\dfrac{6}{5}$　　B．$\dfrac{7}{6}$　　C．1　　D．$\dfrac{20}{9}$

12．已知数列$\{a_n\}$是等比数列，数列$\{b_n\}$是等差数列，若$a_2\cdot a_6\cdot a_{10}=3\sqrt{3}$，$b_1+b_6+b_{11}=7\pi$，则$\tan\dfrac{b_2+b_{10}}{1-a_3\cdot a_9}$的值是

A．1　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$-\sqrt{3}$

13．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，公差$d\neq0$，$\dfrac{a_1}{d}\leq1$．记$b_1=S_2$，$b_{n+1}=S_{2n+2}-S_{2n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，下列等式不可能成立的是（　　）

A．$2a_4=a_2+a_6$　　B．$2b_4=b_2+b_6$　　C．$a_4^2=a_2a_8$　　D．$b_4^2=b_2b_8$

14．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_7>S_8$，$S_8=S_9<S_{10}$，则下面结论错误的是（　　）

A．$a_9=0$　　B．$S_{15}>S_{14}$

C．$d<0$　　D．S_8与S_9均为S_n的最小值

二、多选题

15．已知数列$\{a_n\}$的前n项和是S_n，则下列结论正确的是（　　）

A．若数列$\{S_n\}$为等差数列，则数列$\{a_n\}$为等差数列

B．若数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，则数列$\{a_n\}$为等差数列

C．若数列$\{a_n\}$和$\left\{\dfrac{a_n^2}{n}\right\}$均为等差数列，则$S_3=2a_3$

D．若数列$\{a_n\}$和$\{a_n^2\}$均为等差数列，则数列$\{a_n\}$是常数数列

16.《九章算术》是我国古代的数学名著，书中有如下问题："今有五人分五钱，令上二人所得与下三人等．问各得几何．"其意思为"已知甲、乙、丙、丁、戊五人分 5 钱，甲、乙两人所得与丙、丁、戊三人所得相同，且甲、乙、丙、丁、戊所得依次成等差数列．问五人各得多少钱？"（"钱"是古代的一种重量单位）．关于这个问题，下列说法正确的是（　　）

A．甲得钱是戊得钱的 2 倍　　B．乙得钱比丁得钱多$\frac{1}{2}$钱

C．甲、丙得钱的和是乙得钱的 2 倍　　D．丁、戊得钱的和比甲得钱多$\frac{1}{3}$钱

17．设正项等差数列$\{a_n\}$满足$(a_1+a_{10})^2=2a_2a_9+20$，则（　　）

A．a_2a_9的最大值为10　　B．a_2+a_9的最大值为$2\sqrt{10}$

C．$\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_9^2}$的最大值为$\frac{1}{5}$　　D．$a_2^4+a_9^4$的最小值为200

三、填空题

18．设S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_5=5a_5+5$，则公差$d=$___________．

19．记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_1\neq0$，$a_2=3a_1$，则$\frac{S_{10}}{S_5}=$___________．

20．设S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_4=2S_3-2$，$2a_5-a_6=7$，则$S_8=$___________．

21．已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d=-2, a_8+a_9=1$，S_n为其前n项和，则$|S_n|$的最小值为___________．

22．已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若$S_4=10$，$S_8=36$，当$n\in N^*$时，$\frac{a_n}{S_{n+3}}$的最大值为______．

23．设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_2=-3$，$S_5=-10$，则$a_5=$__________，S_n的最小值为__________．

24．设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_6+a_7=1$，则$S_{12}=$___________，若$a_7<0$，则使得不等式$S_n<0$成立的最小整数$n=$___________．

四、解答题

25．已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，记S_n为$\{a_n\}$的前n项和，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立．

①数列$\{a_n\}$是等差数列；②数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列；③$a_2=3a_1$．

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分．

26．设$\{a_n\}$是等差数列，$a_1=-10$，且a_2+10，a_3+8，a_4+6成等比数列．

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）记$\{a_n\}$的前n项和为S_n，求S_n的最小值．

27．记S_n是公差不为0的等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_3=S_5, a_2a_4=S_4$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n；

（2）求使$S_n>a_n$成立的n的最小值．

28．已知S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，公差$d=-2$，且a_1，a_3，a_4成等比数列.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$，求$T_n$．

29．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_2=20$，$S_n=4n^2+kn$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_1=3$，$b_n-b_{n-1}=a_{n-1}(n\geq 2)$，求数列$\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

30．记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，b_n为数列$\{S_n\}$的前n项积，已知$\dfrac{2}{S_n}+\dfrac{1}{b_n}=2$.

（1）证明：数列$\{b_n\}$是等差数列;

（2）求$\{a_n\}$的通项公式.

参考答案

1．A 2．B 3．D 4．D 5．B 6．B 7．C 8．A 9．C 10．C 11．A 12．D 13．D 14．C

15．BCD 16．AC 17．ABD

18．$-\frac{1}{2}$ 19．4． 20．64 21．8 22．$\frac{1}{7}$ 23．0． -10．

25．【解析】选①②作条件证明③：

设$\sqrt{S_n}=an+b(a>0)$，则$S_n=(an+b)^2$，

当$n=1$时，$a_1=S_1=(a+b)^2$；

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(an+b)^2-(an-a+b)^2=a(2an-a+2b)$；

因为$\{a_n\}$也是等差数列，所以$(a+b)^2=a(2a-a+2b)$，解得$b=0$；

所以$a_n=a^2(2n-1)$，所以$a_2=3a_1$.

选①③作条件证明②：

因为$a_2=3a_1$，$\{a_n\}$是等差数列，

所以公差$d=a_2-a_1=2a_1$，

所以$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n^2a_1$，即$\sqrt{S_n}=\sqrt{a_1}n$，

因为$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=\sqrt{a_1}(n+1)-\sqrt{a_1}n=\sqrt{a_1}$，

所以$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列.

选②③作条件证明①：

设$\sqrt{S_n}=an+b(a>0)$，则$S_n=(an+b)^2$，

当$n=1$时，$a_1=S_1=(a+b)^2$；

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(an+b)^2-(an-a+b)^2=a(2an-a+2b)$；

因为$a_2=3a_1$，所以$a(3a+2b)=3(a+b)^2$，解得$b=0$或$b=-\frac{4a}{3}$；

当$b=0$时，$a_1=a^2, a_n=a^2(2n-1)$，当$n\geq 2$时，a_n-$a_{n-1}=2a^2$满足等差数列的定义，此时$\{a_n\}$为等差数列；

当$b=-\frac{4a}{3}$时，$\sqrt{S_n}=an+b=an-\frac{4}{3}a$，$\sqrt{S_1}=-\frac{a}{3}<0$不合题意，舍去.

综上可知$\{a_n\}$为等差数列.

26.【解析】(Ⅰ)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

因为a_2+10，a_3+8，a_4+6成等比数列，所以$(a_3+8)^2=(a_2+10)(a_4+6)$，

即$(2d-2)^2=d(3d-4)$，解得$d=2$，所以$a_n=-10+2(n-1)=2n-12$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知$a_n=2n-12$，

所以$S_n=\dfrac{-10+2n-12}{2}\times n=n^2-11n=(n-\dfrac{11}{2})^2-\dfrac{121}{4}$；

当$n=5$或者$n=6$时，S_n取到最小值-30.

27.【解析】(1)由等差数列的性质可得：$S_5=5a_3$，则：$a_3=5a_3, \therefore a_3=0$，

设等差数列的公差为d，从而有：$a_2a_4=(a_3-d)(a_3+d)=-d^2$，

$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=(a_3-2d)+(a_3-d)+a_3+(a_3-d)=-2d$，

从而：$-d^2=-2d$，由于公差不为零，故：$d=2$，

数列的通项公式为：$a_n=a_3+(n-3)d=2n-6$.

(2)由数列的通项公式可得：$a_1=2-6=-4$，则：$S_n=n\times(-4)+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2-5n$，

则不等式$S_n>a_n$即：$n^2-5n>2n-6$，整理可得：$(n-1)(n-6)>0$，

解得：$n<1$或$n>6$，又n为正整数，故n的最小值为7.

28.【解析】(Ⅰ)由题意得$a_3^2=a_1a_4$，得$(a_1+2d)^2=a_1(a_1+3d)$，

代入$d=-2$，解得$a_1=8$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=10-2n$.

(Ⅱ)因为$a_n=10-2n$，可知$a_5=0$，当$n<5$时，$a_n>0$；当$n>5$时，$a_n<0$.

所以当$n\le 5$时，$T_n=S_n=-n^2+9n$，

当$n>5$时，$T_n=a_1+a_2+\cdots+a_5-(a_6+\cdots+a_n)=-S_n+2S_5=n^2-9n+40$.

综上，$T_n=\begin{cases}-n^2+9n, n\le 5\\ n^2-9n+40, n>5\end{cases}$.

29.【解析】(1)由题意，数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=4n^2+kn$，

可得 $S_1=4+k$， $S_2=16+2k$，

因为 $a_2=20$，所以 $16+2k-(4+k)=20$，解得 $k=8$，

所以 $a_1=S_1=12$， $S_n=4n^2+8n$，

因为当 $n\geq 2$ 时， $S_{n-1}=4(n-1)^2+8(n-1)$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=4n^2+8n-4(n-1)^2-8(n-1)=8n+4$.

当 $n=1$ 时，符合上式，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=8n+4$.

（2）由（1）知 $a_{n-1}=8n-4$，可得 $b_n-b_{n-1}=8n-4(n\geq 2)$，

所以 $b_2-b_1=12$，

$b_3-b_2=20$，

$b_4-b_3=28$，

……，

$b_n-b_{n-1}=8n-4$，

所以 $b_n-b_1=12+20+28+\cdots+8n-4=\dfrac{(n-1)(12+8n-4)}{2}=4n^2-4$，

又由 $b_1=3$，可得 $b_n=4n^2-1(n\geq 2)$，

当 $n=1$ 时， $b_1=3$，满足上式，

所以 $b_n=4n^2-1$.

所以 $\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

所以 $T_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$.

30.【解析】(1) 由已知 $\dfrac{2}{S_n}+\dfrac{1}{b_n}=2$ 得 $S_n=\dfrac{2b_n}{2b_n-1}$,且 $b_n\neq 0$， $b_n\neq\dfrac{1}{2}$，

取 $n=1$,由 $S_1=b_1$ 得 $b_1=\dfrac{3}{2}$，

由于 b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积，

所以$\frac{2b_1}{2b_1-1}\cdot\frac{2b_2}{2b_2-1}\cdots\frac{2b_n}{2b_n-1}=b_n$，

所以$\frac{2b_1}{2b_1-1}\cdot\frac{2b_2}{2b_2-1}\cdots\frac{2b_{n+1}}{2b_{n+1}-1}=b_{n+1}$，

所以$\frac{2b_{n+1}}{2b_{n+1}-1}=\frac{b_{n+1}}{b_n}$，

由于$b_{n+1}\neq 0$

所以$\frac{2}{2b_{n+1}-1}=\frac{1}{b_n}$，即$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}$,其中$n\in N^*$

所以数列$\{b_n\}$是以$b_1=\frac{3}{2}$为首项，以$d=\frac{1}{2}$为公差等差数列;

（2）由（1）可得，数列$\{b_n\}$是以$b_1=\frac{3}{2}$为首项，以$d=\frac{1}{2}$为公差的等差数列，

$\therefore b_n=\frac{3}{2}+(n-1)\times\frac{1}{2}=1+\frac{n}{2}$，

$S_n=\frac{2b_n}{2b_n-1}=\frac{2+n}{1+n}$，

当 n=1 时，$a_1=S_1=\frac{3}{2}$，

当 n≥2 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2+n}{1+n}-\frac{1+n}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}$，显然对于 n=1 不成立，

$$\therefore a_n=\begin{cases}\frac{3}{2},n=1\\-\frac{1}{n(n+1)},n\geq 2\end{cases}.$$