

数列的概念、通项公式

一、单选题

1. 下列说法正确的是 ()

A. 数列 1, 3, 5, 7 与数集 $\{1, 3, 5, 7\}$ 是一样的

B. 数列 1, 2, 3 与数列 3, 2, 1 是相同的

C. 数列 $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ 是递增数列

D. 数列 $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 是摆动数列

2. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n = n^2 + 2n$, 则 $a_{2021} = ()$.

A. 4043

B. 4042

C. 4041

D. 2021

3. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $a_1 = 1$, 则 $a_6 = ()$

A. 32

B. 62

C. 63

D. 64

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_n - a_{n+1} = 2a_{n+1} \cdot a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_5 = ()$

A. $\frac{1}{9}$

B. 9

C. $\frac{1}{10}$

D. 10

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = -3n^2 + 88n$, 则数列 $\{a_n\}$ 各项中最大项是 ()

A. 第 13 项

B. 第 14 项

C. 第 15 项

D. 第 16 项

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = 2a_n - 2$, 若存在两项 a_n, a_m , 使得 $a_n \cdot a_m = 64$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{16}{n}$ 的最小值为 ()

A. $\frac{21}{5}$

B. $\frac{25}{6}$

C. $\frac{9}{2}$

D. $\frac{17}{3}$

7. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + \ln(1 + \frac{1}{n})$, 则 $a_n =$

A. $2 + \ln n$

B. $2 + (n-1)\ln n$

C. $2 + n \ln n$

D. $1 + n + \ln n$

8. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_n = 3a_{n-1} + 3^n (n \geq 2)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = ()$

A. 2×3^n

B. $\frac{3^n}{n}$

C. $n \cdot 3^n$

D. $\frac{n}{3^n}$

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_n \in \{0, 1, 2, 3\}$, $a_n \neq a_{n+1}$, $a_n = a_{n+3}$, 则 S_{100} 可能的不同取值的个数为 ()

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 12

10. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1=1$, $a_{n+1}=3S_n(n \geq 1)$, 则 a_n 等于 ()

- A. $3 \times 4n$ B. $3 \times 4n+1$
 C. $\begin{cases} 1, (n=1) \\ 3 \times 4^{n-2}, (n \geq 2) \end{cases}$ D. $\begin{cases} 1, (n=1) \\ 3 \times 4^{n-2}+1, (n \geq 2) \end{cases}$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_{n+1}+S_n=\frac{n^2-19n}{2}(n \in \mathbb{N}^*)$, 若 $a_{10} < a_{11}$, 则 S_n 取最小值时 n 的值为 ()

- A. 10 B. 9 C. 11 D. 12

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}(n \in \mathbb{N}^*)$. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 ()

- A. $\frac{3}{2} < S_{100} < 3$ B. $3 < S_{100} < 4$ C. $4 < S_{100} < \frac{9}{2}$ D. $\frac{9}{2} < S_{100} < 5$

13. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=a, a_{n+1}=a_n^2+b, n \in \mathbb{N}^*$, 则 ()

- A. 当 $b=\frac{1}{2}, a_{10} > 10$ B. 当 $b=\frac{1}{4}, a_{10} > 10$
 C. 当 $b=-2, a_{10} > 10$ D. 当 $b=-4, a_{10} > 10$

二、多选题

14. 已知 S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1=2, a_n=1-\frac{1}{a_{n-1}}(n \geq 2)$, 则下列选项错误的是 ()

- A. $a_{2021}=2$ B. $S_{2021}=1012$
 C. $a_{3n} \cdot a_{3n+1} \cdot a_{3n+2}=1$ D. $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的周期数列

15. 南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中出现了如图所示的形状, 后人称为“三角垛”. “三角垛”的最上层有 1 个球, 第二层有 3 个球, 第三层有 6 个球, ..., 设各层球数构成一个数列 $\{a_n\}$, 则 ()



- A. $a_4 = 12$ B. $a_{n+1} = a_n + n + 1$ C. $a_{100} = 5050$ D. $2a_{n+1} = a_n \cdot a_{n+2}$

16. 数列 $\{F_n\}$: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... 称为斐波那契数列, 是由十三世纪意大利数学家列昂纳多·斐波那契以兔子繁殖为例子而引入的, 故又称为“兔子数列”. 该数列从第三项开始, 每项等于其前相邻两项之和. 记数列 $\{F_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则下列结论正确的是 ()

- A. $S_5 = F_7 - 1$ B. $S_5 = S_6 - 1$
C. $S_{2019} = F_{2021} - 1$ D. $S_{2019} = F_{2020} - 1$

17. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n = a_{n+1} + \ln(1 + a_{n+1})$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则 ()

- A. 存在 n 使 $a_n \leq 0$ B. 任意 n 使 $a_n > 0$
C. $a_n < a_{n+1}$ D. $a_n > a_{n+1}$

三、填空题

18. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则 $\frac{2}{7}$ 是这个数列的第 _____ 项.

19. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = a$, $a_{n+1} = (a_n + 1)\cos n\pi$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_{2019} = -2019$, 则 $a =$ _____.

20. 已知数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, 且 $a_n \cdot a_{n+1} = \frac{n}{n+2}$, 则 $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2n} =$ _____.

21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n = 2^{n+1} - 2$, $n \in \mathbb{N}^*$, 则 $a_3 =$ _____.

22. 将正奇数按如图所示的规律排列:

1

3 5 7

9 11 13 15 17

19 21 23 25 27 29 31

.....



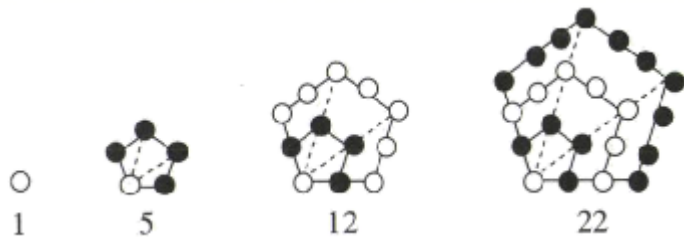
则 2019 在第 _____ 行, 从左向右第 _____ 个数

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 中各项是从 1、0、-1 这三个整数中取值的数列, S_n 为其前 n 项和, 定义 $b_n = (a_n + 1)^2$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若 $S_{30} = -1$, $T_{30} = 51$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 30 项中 0 的个数为 _____ 个.

24. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = 2^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则 $a_3 =$ _____, $a_n =$ _____.

25. 毕达哥拉斯学派是古希腊哲学家毕达哥拉斯及其信徒组成的学派, 他们把美学视为自然科学的一个组成部分. 美表现在数量比例上的对称与和谐, 和谐起于差异的对立, 美的本质在于和谐. 他们常把数描绘

成沙滩上的沙粒或小石子，并由它们排列而成的形状对自然数进行研究. 如图所示，图形的点数分别为 1, 5, 12, 22, …，总结规律并以此类推下去，第 8 个图形对应的点数为_____，若这些数构成一个数列，记为数列 $\{a_n\}$ ，则 $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_{21}}{21} =$ _____.



四、解答题

26. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 2$, $a_n + a_{n-1} = 4n - 2 (n \geq 2)$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 + 3b_2 + 7b_3 + \cdots + (2^n - 1)b_n = a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

27. 设各项均为正的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $4S_n = (a_n + 1)^2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = S_n \cos \frac{2n\pi}{3}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $3n$ 项的和 T_{3n} .

28. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_n = a_{n+1} + 2a_n a_{n+1}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{3^n}{a_n}$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

29. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, n \text{ 为奇数}, \\ a_n, n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

(1) 求 a_2 , a_3 , a_4 , 并求 a_n ;

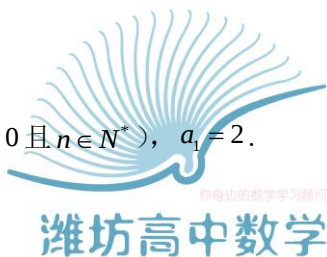
(2) 求 $\{a_n\}$ 的前 100 项和 S_{100} .

30. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} = 3a_n + 2$ ($n > 0$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$), $a_1 = 2$.

(1) 求 a_2 , a_3 , a_4 ;

(2) 归纳猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并证明;

(3) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .



参考答案

1. D 2. A 3. C 4. A 5. C 6. A 7. A 8. C 9. D 10. C 11. A 12. A 13. A

14. AC 15. BC 16. AC 17. BD

18. 6 19. 1010 20. $\frac{1}{2n+1}$ 21. 8 22. 32 49. 23. 7 24. $\frac{4}{3}$ $a_n = \frac{2^{n-1}}{n}$ 25. 92 336

26. 【解析】(I) 由 $a_n + a_{n-1} = 4n - 2 (n \geq 2)$ 可化为 $(a_n - 2n) + (a_{n-1} - 2n + 2) = 0$.

令 $c_n = a_n - 2n$, 则 $c_n + c_{n-1} = 0$, 即 $c_n = -c_{n-1}$.

因为 $a_1 = 2$, 所以 $c_1 = a_1 - 2 = 0$,

所以 $c_n = 0$,

即 $a_n - 2n = 0$, 故 $a_n = 2n$.

(II) 由 $b_1 + 3b_2 + 7b_3 + \cdots + (2^n - 1)b_n = a_n$,

可知 $b_1 + 3b_2 + 7b_3 + \cdots + (2^{n-1} - 1)b_{n-1} = a_{n-1} (n \geq 2)$,

两式作差得 $(2^n - 1)b_n = a_n - a_{n-1} = 2 (n \geq 2)$,

即 $b_n = \frac{2}{2^n - 1} (n \geq 2)$.

又当 $n=1$ 时, 也 $b_1 = a_1 = 2$ 满足上式,

故 $b_n = \frac{2}{2^n - 1}$.

27. 【解析】(1) 令 $n=1$, 则 $4S_1 = 4a_1 = (a_1 + 1)^2$, 可得 $(a_1 - 1)^2 = 0$, 得 $a_1 = 1$;

当 $n \geq 2$ 时, 由 $4S_n = (a_n + 1)^2 = a_n^2 + 2a_n + 1$ 可得 $4S_{n-1} = a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} + 1$,

两式相减得 $a_n^2 - a_{n-1}^2 - 2a_n - 2a_{n-1} = 0$, 即 $(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 2) = 0$,

由数列 $\{a_n\}$ 的各项为正, 可得 $a_n - a_{n-1} = 2$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列.

即数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$;

(2) 由 $a_n = 2n-1$ 得 $S_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$, 则有 $b_n = n^2 \cos \frac{2n\pi}{3}$,

$$\text{因为 } b_{3n} + b_{3n-1} + b_{3n-2} = (3n)^2 \cos 2n\pi + (3n-1)^2 \cos\left(2n\pi - \frac{2\pi}{3}\right) + (3n-2)^2 \cos\left(2n\pi - \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= 9n^2 - \frac{(3n-1)^2 + (3n-2)^2}{2} = 9n - \frac{5}{2},$$

$$\text{因此, } T_{3n} = \frac{n\left(\frac{13}{2} + 9n - \frac{5}{2}\right)}{2} = \frac{9n^2 + 4n}{2}.$$

28. 【解析】(1) 因为 $a_n = a_{n+1} + 2a_n a_{n+1}$, 令 $n=1$, 则 $a_1 = a_2 + 2a_1 a_2$, 又 $a_2 = \frac{1}{3}$,

所以 $a_1 = 1$,

对 $a_n = a_{n+1} + 2a_n a_{n+1}$ 两边同时除以 $a_n a_{n+1}$, 得 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2$,

又因为 $\frac{1}{a_1} = 1$, 所以 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列,

所以 $\frac{1}{a_n} = 1 + 2(n-1) = 2n-1$, 故 $a_n = \frac{1}{2n-1}$;

(2) 由 (1) 得: $b_n = (2n-1) \cdot 3^n$

所以 $T_n = 1 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^n$,

则 $3T_n = 1 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^{n+1}$

两式相减得 $-2T_n = 3 + 2(3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n) - (2n-1) \cdot 3^{n+1}$

所以 $-2T_n = 3 + 2 \times \frac{3^2 - 3^{n+1}}{1-3} + (1-2n) \cdot 3^{n+1} = (2-2n) \cdot 3^{n+1} - 6$

故 $T_n = (n-1) \cdot 3^{n+1} + 3$

29. 【解析】: (1) $a_2 = a_1 + 1 = 2$, $a_3 = a_2 + 1 = 3$, $a_4 = a_3 + 1 = 4$.

当 $k \in \mathbb{N}^*$ 时, 由题意, 得 $a_{2k} = a_{2k-1} + 1$, $a_{2k+1} = a_{2k}$.

于是 $a_{2k+1} = a_{2k-1} + 1$, 即 $a_{2k+1} - a_{2k-1} = 1$.

所以, $\{a_{2k-1}\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列,

所以 $a_{2k-1} = a_1 + (k-1) \cdot 1 = k$, 即 n 为奇数时, $a_n = \frac{n+1}{2}$.

当 n 为偶数时, $a_n = a_{n-1} + 1 = \frac{(n-1)+1}{2} + 1 = \frac{n+2}{2}$.

$$\text{所以, } a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, n \text{ 为奇数,} \\ \frac{n+2}{2}, n \text{ 为偶数.} \end{cases};$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 法 1: } S_{100} &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{99}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{100}) \\ &= (1+2+3+\cdots+50) + (2+3+4+\cdots+51) \\ &= \frac{(1+50) \times 50}{2} + \frac{(2+51) \times 50}{2} = 2600 \end{aligned}$$

法 2: 由 (1), 当 $k \in \mathbb{N}^*$ 时, $a_{2k-1} = k$, $a_{2k} = k+1$.

令 $b_k = a_{2k-1} + a_{2k}$, 则 $b_k = 2k+1$.

$$\begin{aligned} S_{100} &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{99} + a_{100}) = b_1 + b_2 + \cdots + b_{50} \\ &= \frac{b_1 + b_{50}}{2} \times 50 = \frac{3+101}{2} \times 50 = 2600. \end{aligned}$$

30. 【解析】(1) $a_1 = 2$, 令 $n=1$ 得, $a_2 = 3a_1 + 2 = 8$,

令 $n=2$ 得, $a_3 = 3a_2 + 2 = 26$,

令 $n=3$ 得, $a_4 = 3a_3 + 2 = 80$;

(2) 由于 $a_1 = 3^1 - 1$, $a_2 = 3^2 - 1$, $a_3 = 3^3 - 1$, $a_4 = 3^4 - 1$, ...,

故猜想 $a_n = 3^n - 1$. 证明如下:

因为 $a_{n+1} = 3a_n + 2$, 所以 $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$, 所以 $\frac{a_{n+1} + 1}{a_n + 1} = 3$.

又因为 $a_1 + 1 = 3$, 所以数列 $\{a_n + 1\}$ 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列.

所以 $a_n + 1 = 3^n$, 即 $a_n = 3^n - 1$;

$$(3) S_n = (3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n) - (1 + 1 + 1 + \cdots + 1) = \frac{3(1-3^n)}{1-3} - n = \frac{3^{n+1}}{2} - n - \frac{3}{2}.$$