等式与不等式

一、单选题

1．已知集合 $A=\left\{x\left|2x^2+x-6\le 0\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|\frac{x+3}{x-1}<0\right.\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\left\{x\left|-2\le x<1\right.\right\}$　　B．$\left\{x\left|-2\le x\le 1\right.\right\}$　　C．$\left\{x\left|-4\le x<2\right.\right\}$　　D．$\left\{x\left|\frac{3}{2}<x<2\right.\right\}$

2．设 $x\in\mathbf{R}$，则“$|x|<2$”是“$\sqrt{x}<4$”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$,给出下列条件：①$a^2>b^2$；②$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；③ $ac^2>bc^2$，则使得 $a>b$ 成立的充分而不必要条件是

A．①　　B．②　　C．③　　D．①②③

4．已知 $a>b$，$c>d$，则下列关系式正确的是（　　）

A．$ac+bd>ad+bc$　　B．$ac+bd<ad+bc$

C．$ac>bd$　　D．$ac<bd$

5．已知 p：$(a+1)^2\le 1$；q：$\forall x\in R,ax^2-ax-1<0$，则 p 是 q 的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．若正数 m,n 满足 $2m+n=1$，则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为

A．$3+2\sqrt{2}$　　B．$3+\sqrt{2}$

C．$2+2\sqrt{2}$　　D．3

7．若 $a>0$，$b>0$，且 $a+\frac{1}{b}=1$，则下列不等式错误的是（　　）

A．$2^a+2^{\frac{1}{b}}\ge 2\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{b}}\le\sqrt{2}$

C．$\frac{2}{a}+b\ge 6$　　D．$\log_2 a-\log_2 b\le -2$

8．已知函数 $f(x)=|\ln(x-1)|$，若 f（a）＝f（b），则 a+2b 的取值范围为

A．（4，+∞）　　B．$[3+2\sqrt{2},+\infty)$　　C．［6，+∞）　　D．$(4,3+2\sqrt{2}]$

9．已知奇函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调函数，若正实数 a，b 满足 $f(2a)+f(b-4)=0$ 则 $\frac{1}{a+1}+\frac{2}{b}$ 的最小值是（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．2　　D．4

10．设 a，b 为正数，若圆 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 关于直线 $ax-by+1=0$ 对称，则 $\frac{a+2b}{ab}$ 的最小值为（　　）

A．9　　B．8　　C．6　　D．10

11．设 a，b，c 为实数，且 $a<b<0$，则下列不等式正确的是（　　）

A．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B．$ac^2<bc^2$　　C．$\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$　　D．$a^2>ab>b^2$

12．已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+3y=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$，则 y 的最大值为（　　）

A．1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．2　　D．$\frac{1}{3}$

13．已知 $x>2,y>1,(x-2)(y-1)=4$，则 $x+y$ 的最小值是（　　）

A．1　　B．4　　C．7　　D．$3+\sqrt{17}$

14．古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，称为黄金分割比例)，著名的“断臂维纳斯”便是如此．此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为 105cm，头顶至脖子下端的长度为 26 cm，则其身高可能是

A．165 cm　　B．175 cm　　C．185 cm　　D．190cm

15．若 x，y，z 是正数，且 $3^x=4^y=12^z$，$\frac{x+y}{z}\in(n,n+1)$，$n\in N$，则 n 的值是

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

二、多选题

16．已知 a，b，$c\in\mathbf{R}$，且 $a+b=2$，则下列判断正确的是（　　）

A．若 $a>b$，则 $a|c|>b|c|$　　B．若 $a<b$，则 $c-a>c-b$

C．$\frac{2}{2^a}+\frac{1}{2^b}\geq\sqrt{2}$　　D．$a^2+b^2\geq 2$

17．若 $x>1$，$y>2$，且满足 $xy-2x=y$，则 $\frac{1}{x-1}+\frac{8}{y-2}$ 的值可以为（　　）

A．$\frac{7}{2}$　B．3　C．4　D．$\frac{11}{2}$

18．已知实数 x，y 满足 $-3<x+2y<2,-1<2x-y<4$, 则（　　）

A．x 的取值范围为 $(-1,2)$

B．y 的取值范围为 $(-2,1)$

C．$x+y$ 的取值范围为 $(-3,3)$

D．$x-y$ 的取值范围为 $(-1,3)$

19．已知 a，b 为正数，$a^2+4b^2=3$，则（　　）

A．ab 的最大值为 $\frac{3}{4}$

B．$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 的最小值为 3

C．$a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值为 $\frac{7}{4}$

D．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

三、填空题

20． 设 $x\in\mathbf{R}$，使不等式 $3x^2+x-2<0$ 成立的 x 的取值范围为__________.

21．已知 $5x^2y^2+y^4=1(x,y\in R)$，则 x^2+y^2 的最小值是_______.

22．设实数 a，b，c，满足 $a+b=2c-1$，$a^2+b^2=c^2+2c-3$，则 ab 的取值范围是_____.

23．已知 $a>0$, $b>0$，且 $ab=1$，则 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}$ 的最小值为_________.

24．在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$\angle ABC=120°$，$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D，且 $BD=1$，则 $4a+c$ 的最小值为________.

25．若 $a>0$，$b>0$，则 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$ 的最小值为____________.

26．已知函数 $f(x)=\sqrt{x}\ln(3-x)$，则不等式 $f(\lg x)>0$ 的解集为________.

27．2021 年全国有部分省推行“3＋2＋1”新高考模式，选择性考试科目中，首选科目成绩直接以原始成绩呈现；再选科目化学、生物、政治、地理成绩以等级赋分转换后的等级成绩呈现.等级赋分以 30 分作为赋分起点，满分为 100 分，将考生每门再选科目考试的原始成绩从高到低划定为 A，B，C，D，E 五个等级，各等级人数所占比例分别为 15%，35%，13%和 2%.转换基数为实际参加该再选科目考试并取得有效成绩的人数.转换时，将 A 至 E 等级内的考生原始成绩，依照等比例转换法则，分别转换到 100~86 分、85~71 分、70~56 分、55~41 分、40~30 分五个等级分数区间，根据转换公式计算，四舍五入得到考生的等级成绩.等级赋分转换公式为 $\frac{Y_2-Y}{Y-Y_1}=\frac{T_2-X}{X-T_1}$，$Y_1$，$Y_2$ 分别表示某等级原始分数区间的下限和上限；T_1，T_2 分别表示相应等级的赋分区间的下限和上限；Y 表示考生的原始成绩，X 表示考生转换后的等级成绩.考生原始成绩正好为原始分数区间上限或下限时，不需要按转换公式计算，相应的赋分区间的上限或下限分数即为该考生的等级成绩.某校的一次统考中，甲同学选考科目生物成绩原始分 91 分，属于 A 档，这次原始成绩的 A 档的最低分 90 分，最高分 100 分，则甲同学赋分后的生物成绩约为____________.

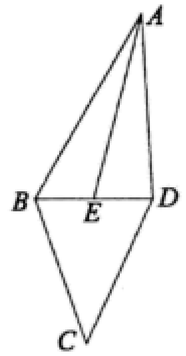
28．已知正实数a,b满足$a+2b=1$，则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为_______；$2a^2+b^2$的最小值为__.

四、解答题

29．如图，在四边形$ABCD$中，$AB=4$，$AD=2\sqrt{3}$，E为BD的中点，$AE=\sqrt{13}$.

（1）求BD；

（2）若$C=\frac{\pi}{6}$，求ΔBCD面积的最大值.



30．某化工厂引进一条先进生产线生产某种化工产品，其生产的总成本y万元与年产量x吨之间的函数关系可以近似地表示为$y=\frac{x^2}{5}-24x+2000$，已知此生产线的年产量最小为60吨，最大为110吨.

（1）年产量为多少吨时，生产每吨产品的平均成本最低?并求最低平均成本;

（2）若每吨产品的平均出厂价为24万元，且产品能全部售出，则年产量为多少吨时，可以获得最大利润?并求最大利润.

参考答案

1．A　2．D　3．C　4．A　5．A　6．A　7．C　8．B　9．B　10．A　11．D　12．D　13．C　14．B

15．B　16．BCD　17．CD　18．ABD　19．AB

20．$(-1,\frac{2}{3})$　21．$\frac{4}{5}$　22．$\left[\frac{11}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{11}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$　23．4　24．9　25．$2\sqrt{2}$

26．$(1,100)$　27．87　28．9　$\frac{2}{9}$

29．【解析】（1）设 $BE=x(x>0)$，则 $BD=2x$，

由余弦定理，得 $\cos\angle ABD=\frac{AB^2+BE^2-AE^2}{2AB\cdot BE}=\frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}$，

即 $\frac{16+x^2-13}{8x}=\frac{16+4x^2-12}{16x}$，

解得 $x=1$，所以 $BD=2$.

（2）在 ΔBCD 中，由余弦定理得 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos C$，

即 $4=BC^2+CD^2-\sqrt{3}BC\cdot CD\ \geq 2BC\cdot CD-\sqrt{3}BC\cdot CD=\left(2-\sqrt{3}\right)BC\cdot CD$，

所以 $BC\cdot CD\leq\frac{4}{2-\sqrt{3}}=4\left(2+\sqrt{3}\right)$，

当且仅当 $BC=CD=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ 时，等号成立.

$S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin C=\frac{1}{4}BC\cdot CD\leq 2+\sqrt{3}$，

所以 ΔBCD 面积的最大值为 $2+\sqrt{3}$.

30．【解析】（1）$\frac{y}{x}=\frac{x}{5}+\frac{2000}{x}-24$，　$x\in[60,110]$

$\geq 2\sqrt{\frac{x}{5}\cdot\frac{2000}{x}}-24=16$

当且仅当 $\frac{x}{5}=\frac{2000}{x}$ 时，即 $x=100$ 取“=”，符合题意；

∴年产量为 100 吨时，平均成本最低为 16 万元.

（2）$L(x)=24x-\left(\frac{x^2}{5}-24x+2000\right)=-\frac{1}{5}(x-120)^2+880$

又∵ $60\leq x\leq 110$，∴当 $x=110$ 时，$L(x)_{\max}=860$.

答：年产量为 110 吨时，最大利润为 860 万元.