

## 平面向量

## 一、单选题

1. 已知向量  $\vec{a} = (2, 3)$ ,  $\vec{b} = (3, 2)$ , 则  $|\vec{a} - \vec{b}| =$

- A.  $\sqrt{2}$  B. 2  
C.  $5\sqrt{2}$  D. 50

2. 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  是  $AB$  边上的中点, 则  $\vec{CB} =$  ( )

- A.  $2\vec{CD} + \vec{CA}$  B.  $\vec{CD} - 2\vec{CA}$  C.  $2\vec{CD} - \vec{CA}$  D.  $\vec{CD} + 2\vec{CA}$

3. 已知非零向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , 则“ $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ ”是“ $\vec{a} = \vec{b}$ ”的 ( )

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件

4. 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 6$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$ , 则  $\cos \langle \vec{a}, \vec{a} + \vec{b} \rangle =$  ( )

- A.  $-\frac{31}{35}$  B.  $-\frac{19}{35}$  C.  $\frac{17}{35}$  D.  $\frac{19}{35}$

5. 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}|2\vec{a} - \vec{b}|$ , 则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  夹角为 ( )

- A.  $30^\circ$  B.  $45^\circ$  C.  $60^\circ$  D.  $120^\circ$

6. 已知向量  $\vec{a} = (1, 3)$ ,  $\vec{b} = (3, 2)$ , 向量  $\vec{a}$  在向量  $\vec{b}$  上的投影等于 ( )

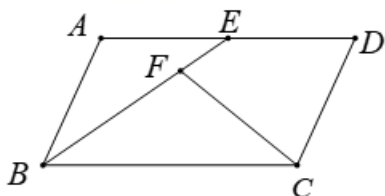
- A.  $\frac{9\sqrt{10}}{10}$  B. 9 C. -3 D.  $\frac{9\sqrt{13}}{13}$

7. 设向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $\theta$ , 定义  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的“向量积”:  $\vec{a} \times \vec{b}$  是一个向量, 它的模  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$ , 若

$\vec{a} = (-\sqrt{3}, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$ , 则  $|\vec{a} \times \vec{b}| =$  ( )

- A.  $\sqrt{3}$  B. 2 C.  $2\sqrt{3}$  D. 4

8. 如图, 平行四边形  $ABCD$  中,  $E$  是  $AD$  的中点,  $F$  在线段  $BE$  上, 且  $BF = 3FE$ , 记  $\vec{a} = \vec{BA}$ ,  $\vec{b} = \vec{BC}$ , 则  $\vec{CF} =$  ( )



- A.  $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$       B.  $\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$       C.  $-\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}$       D.  $\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{5}{8}\vec{b}$

9. 已知平面向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 其中  $|\vec{b}|=2$ , 向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}-\vec{a}$  的夹角为  $150^\circ$ , 则  $|\vec{a}|$  的最大值为 ( )

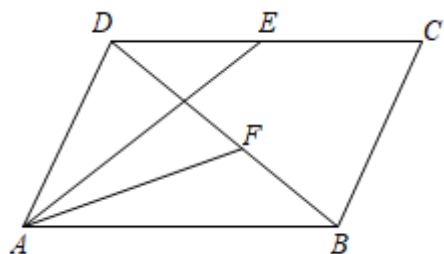
- A.  $2\sqrt{3}$       B. 3      C. 4      D.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

10. 已知向量  $\vec{a}=(2,7)$ ,  $\vec{b}=(x,-3)$ , 且  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为钝角, 则实数  $x$  的取值范围为

- A.  $(-\infty, \frac{21}{2})$       B.  $(-\frac{6}{7}, \frac{21}{2})$   
C.  $(-\infty, \frac{6}{7})$       D.  $(-\infty, -\frac{6}{7}) \cup (-\frac{6}{7}, \frac{21}{2})$

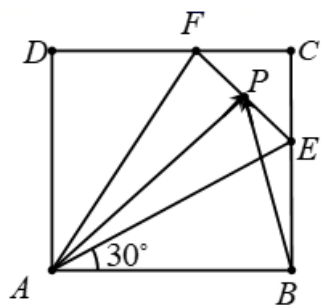
11. 如图, 在平行四边形  $ABCD$  中, 点  $E$  是  $CD$  的中点, 点  $F$  为线段  $BD$  上的一动点, 若

$\vec{AF} = x\vec{AE} + y\vec{DC}$  ( $x > 0, y > 0$ ), 则  $\frac{2-3x}{4y^2+1}$  的最大值为 ( )



- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{3}{4}$       C. 1      D. 2

12. 如图, 在正方形  $ABCD$  中, 边长为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $E$  是  $BC$  边上的一点,  $\angle EAB = 30^\circ$ , 以  $A$  为圆心,  $AE$  为半径画弧交  $CD$  于点  $F$ ,  $P$  是弧  $EF$  上 (包括边界点) 任一点, 则  $\vec{AP} \cdot \vec{BP}$  的取值范围是 ( )



- A.  $\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right]$       B.  $\left[\frac{1}{4}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$       C.  $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$       D.  $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

## 二、多选题

13. 已知向量  $\vec{a}=(2,-1)$ ,  $\vec{b}=(-3,2)$ ,  $\vec{c}=(1,1)$ , 则 ( )

- A.  $\vec{a} \parallel \vec{b}$       B.  $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{c}$

C.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

D.  $\vec{c} = 5\vec{a} + 3\vec{b}$

14. 已知正方形  $ABCD$  的边长为 2, 向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足  $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + \vec{b}$ , 则 ( )

A.  $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$

B.  $\vec{a} \perp \vec{b}$

C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$

D.  $(4\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$

15. 在直角梯形  $ABCD$  中,  $CD \parallel AB$ ,  $AB \perp BC$ ,  $CD = 1$ ,  $AB = BC = 2$ ,  $E$  为线段  $BC$  的中点, 则 ( )

A.  $\vec{AC} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

B.  $\vec{DE} = \frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD}$

C.  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 2$

D.  $\vec{AE} \cdot \vec{AC} = 6$

16. 已知  $O$  为坐标原点, 点  $P_1(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $P_2(\cos \beta, -\sin \beta)$ ,  $P_3(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$ ,  $A(1, 0)$ , 则 ( )

A.  $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}|$

B.  $|\overrightarrow{AP_1}| = |\overrightarrow{AP_2}|$

C.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}$

D.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3}$

### 三、填空题

17. 已知向量  $\vec{a} = (2, 5)$ ,  $\vec{b} = (\lambda, 4)$ , 若  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 则  $\lambda =$ \_\_\_\_\_.

18. 已知向量  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ,  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} =$ \_\_\_\_\_.

19. 已知向量  $\vec{a} = (1, 3)$ ,  $\vec{b} = (3, 4)$ , 若  $(\vec{a} - \lambda\vec{b}) \perp \vec{b}$ , 则  $\lambda =$ \_\_\_\_\_.

20. 设向量  $\vec{a} = (m, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, 2)$ , 且  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ , 则  $m =$ \_\_\_\_\_.

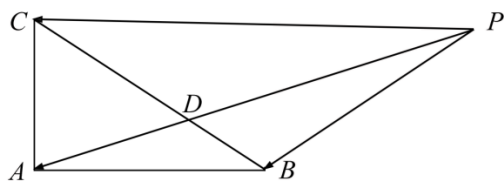
21. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 3$ ,  $BC = 2$ ,  $AC = \sqrt{7}$ , 则  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} =$ \_\_\_\_\_.

22. 已知  $\vec{a}, \vec{b}$  为单位向量, 且  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , 若  $\vec{c} = 2\vec{a} - \sqrt{5}\vec{b}$ , 则  $\cos \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle =$ \_\_\_\_\_.

23. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$ , 已知  $BC$  边上的中线  $AD = 3$ , 则  $\triangle ABC$  面积的最大值为\_\_\_\_\_.

24. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 4$ ,  $AC = 3$ ,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $D$  在边  $BC$  上, 延长  $AD$  到  $P$ , 使得  $AP = 9$ , 若

$\overrightarrow{PA} = m\overrightarrow{PB} + (\frac{3}{2} - m)\overrightarrow{PC}$  ( $m$  为常数), 则  $CD$  的长度是\_\_\_\_\_.



25.  $\vec{a} = (2, 1)$ ,  $\vec{b} = (2, -1)$ ,  $\vec{c} = (0, 1)$ , 则  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} =$ \_\_\_\_\_;  $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ \_\_\_\_\_.

26. 已知正方形  $ABCD$  的边长为 2, 点  $P$  满足  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ , 则  $|\overrightarrow{PD}| =$  \_\_\_\_\_;  $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} =$  \_\_\_\_\_.

27. 在边长为 1 的等边三角形  $ABC$  中,  $D$  为线段  $BC$  上的动点,  $DE \perp AB$  且交  $AB$  于点  $E$ .  $DF \parallel AB$  且交  $AC$  于点  $F$ , 则  $|2\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF}|$  的值为 \_\_\_\_\_;  $(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}) \cdot \overrightarrow{DA}$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

#### 四、解答题

28. 已知向量  $\vec{a} = (1, \cos \alpha)$ ,  $\vec{b} = (\frac{1}{3}, \sin \alpha)$ ,  $\alpha \in (0, \pi)$

(1) 若  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 求  $\sin 2\alpha$  的值;

(2) 若  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 求  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$  值.

29. 在  $\triangle ABC$  中,  $BC$  的中点为  $D$ , 设向量  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ .

(1) 用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示向量  $\overrightarrow{AD}$ ;

(2) 若向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 60^\circ$ , 求  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$  的值.

30. 在  $\triangle ABC$  中,  $2\cos^2 \frac{A-B}{2} \cos B - \sin(A-B) \sin B + \cos(A+C) = -\frac{3}{5}$ .

(1) 求  $\cos A$  的值;

(2) 若  $a = 4\sqrt{2}$ ,  $b = 5$ , 求  $\overrightarrow{BA}$  在  $\overrightarrow{AC}$  方向上的投影.

## 参考答案

1. A 2. C 3. B 4. D 5. C 6. D 7. B 8. D 9. C 10. D 11. A 12. B

13. BD 14. AD 15. ABD 16. AC

17.  $\frac{8}{5}$  18.  $-\frac{9}{2}$  19.  $\frac{3}{5}$  20. -2 21. 3 22.  $\frac{2}{3}$  23.  $9\sqrt{3}$  24.  $\frac{18}{5}$ 25. 0 3 26.  $\sqrt{5}$  -1 27. 1  $\frac{11}{20}$ 28. 【解析】(1) 由  $\vec{a} \perp \vec{b}$  得,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{3} + \sin \alpha \cos \alpha = 0$ ,

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha = -\frac{1}{3},$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{2}{3}$$

(2) 由  $\vec{a} // \vec{b}$  得,

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \cos \alpha, \tan \alpha = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{\frac{1}{3} + 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{2}{3}} = -2.$$

29. 【解析】(1)  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b};$$

$$(2) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \vec{a} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \times 3^2 + \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \cos 60^\circ = 6,$$

所以  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6$ .30. 【解析】(1) 由  $2 \cos^2 \frac{A-B}{2} \cos B - \sin(A-B) \sin B + \cos(A+C) = -\frac{3}{5}$ 

$$\text{可得 } \cos(A-B) \cos B - \sin(A-B) \sin B = -\frac{3}{5},$$

$$\text{即 } \cos(A-B+B) = -\frac{3}{5},$$

$$\text{即 } \cos A = -\frac{3}{5},$$

$$(2) \text{由余弦定理可知 } (4\sqrt{2})^2 = 5^2 + c^2 - 2 \times 5c \times \left(-\frac{3}{5}\right),$$

解得  $c=1$ ,  $c=-7$  (舍去).

$$\text{向量 } \overrightarrow{BA} \text{ 在 } \overrightarrow{AC} \text{ 方向上的投影: } |\overrightarrow{BA}| \cos(\pi - A) = -c \cos A = \frac{3}{5}.$$