正弦定理、余弦定理、解三角形

一、单选题

1．在$\triangle ABC$中，已知$B=120^\circ$，$AC=\sqrt{19}$，$AB=2$，则$BC=$（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．3

2．$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$a\sin A-b\sin B=4c\sin C$，$\cos A=-\frac{1}{4}$，则$\frac{b}{c}=$

A．6　　B．5　　C．4　　D．3

3．若在$\triangle ABC$中，$\sin(A+B)\sin(A-B)=(\sin C)^2$，则此三角形的形状是（　　）

A．等腰三角形　　B．直角三角形

C．等边三角形　　D．等腰直角三角形

4．已知a，b，c分别为△ABC内角A，B，C的对边，$a^2-b^2=\frac{1}{3}c^2$，$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{6}c^2$，则$A=$（　）

A．45°　　B．60°　　C．120°　　D．150°

5．已知ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，AD为角A的角平分线，交BC于D，$B=\frac{\pi}{4}$，$AD=2\sqrt{2}$，$BD=2$，则$b=$

A．$2\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{6}$

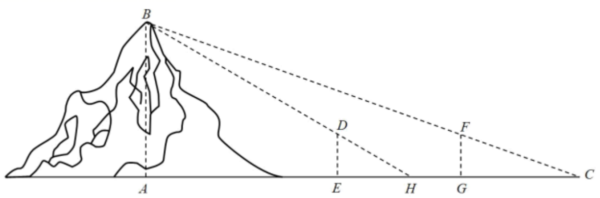
6．已知在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为$a,b,c,\cos A=\frac{2}{3},b=2,c=3$.则$BC$边上的高为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

7．已知ΔABC中，A，B，C的对边分别是a，b，c，且$b=3$，$c=3\sqrt{3}$，$B=30^\circ$，则AB边上的中线的长为

A．$\frac{3\sqrt{7}}{2}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{3}{2}$或$\frac{3\sqrt{7}}{2}$　　D．$\frac{3}{4}$或$\frac{3\sqrt{7}}{2}$

8．魏晋时刘徽撰写的《海岛算经》是关测量的数学著作，其中第一题是测海岛的高．如图，点E，H，G在水平线AC上，DE和FG是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”，EG称为“表距”，GC和EH都称为“表目距”，GC与EH的差称为“表目距的差”则海岛的高$AB=$（　　）



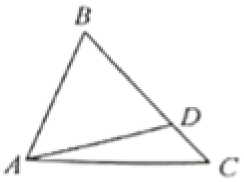
A．$\dfrac{表高\times表距}{表目距的差}+表高$　　B．$\dfrac{表高\times表距}{表目距的差}-表高$

C．$\dfrac{表高\times表距}{表目距的差}+表距$　　D．$\dfrac{表高\times表距}{表目距的差}-表距$

9．在ΔABC中，角A,B,C所对的边分别是a,b,c，已知$a\in\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right)$，$b=1,$且$ab\cos C+c\cos A=abc$，则$\cos B$的取值范围为（　　）

A．$\left(\dfrac{7}{12},\dfrac{3}{4}\right)$　　B．$\left(\dfrac{7}{12},\dfrac{2}{3}\right)$　　C．$\left(0,\dfrac{3}{4}\right)$　　D．$\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$

10．如图，在$\triangle ABC$中，$\cos\angle BAC=\dfrac{1}{4}$，点$D$在线段$BC$上，且$BD=3DC$，$AD=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，则$\triangle ABC$的面积的最大值为（　　）



A．$3\sqrt{2}$　　B．4　　C．$\sqrt{15}$　　D．$2\sqrt{3}$

11．在$\triangle ABC$中角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$(a-b)(\sin A+\sin B)=\sin C(b+c)$，$b+c=2$，则$\triangle ABC$的面积的最大值为（　　）

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

二、多选题

12．在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，下列说法中正确的是（　　）

A．若$\triangle ABC$为锐角三角形且$A>B$，则$\sin A>\cos B$

B．若$\sin 2A=\sin 2B$，则$\triangle ABC$为等腰三角形

C．若$A>B$，则$\sin A>\sin B$

D．若$a=8$，$c=10$，$B=60°$，则符合条件的$\triangle ABC$有两个

13．在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，则能确定B为钝角的是（　　）

A．$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}>0$

B．A,C均为锐角，且$\sin A>\cos C$

C．A,C均为锐角，且$\tan A+\tan B+\tan C<0$

D．$a^2+c^2>b^2$

14．$\triangle ABC$内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$a=3$，$b=2$，$\sin B=\sin 2A$，则（　　）

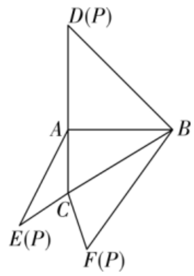
A． $\sin B=\frac{4\sqrt{2}}{9}$　　B． $\cos A=-\frac{1}{3}$　　C． $c=3$　　D． $S_{\Delta ABC}=2\sqrt{2}$

三、填空题

15．记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，面积为$\sqrt{3}$，$B=60°$，$a^2+c^2=3ac$，则$b=$________.

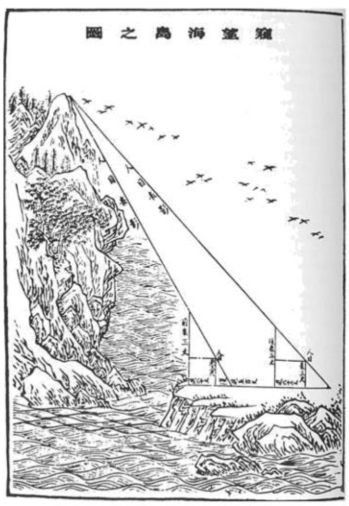
16．$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.若$b=6,a=2c,B=\frac{\pi}{3}$，则$\triangle ABC$的面积为__________.

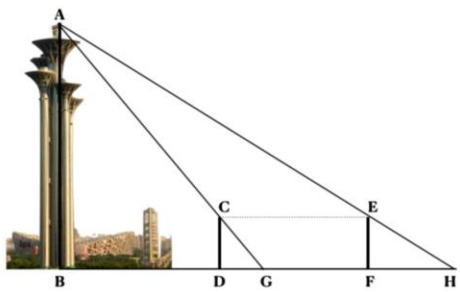
17．如图，在三棱锥$P–ABC$的平面展开图中，AC=1，$AB=AD=\sqrt{3}$，$AB\perp AC$，$AB\perp AD$，$\angle CAE$=30°，则$\cos\angle FCB$=______________.



18．在$\triangle ABC$中，$\angle B=60°,AB=2$，M是BC的中点，$AM=2\sqrt{3}$，则$AC=$___________，$\cos\angle MAC=$___________.

19．魏晋南北朝(公元$220-581$)时期，中国数学在测量学取得了长足进展.刘徽提出重差术，应用中国传统的出入相补原理，通过多次观测，测量山高水深等数值，进而使中国的测量学达到登峰造极的地步，超越西方约一千年，关于重差术的注文在唐代成书，因其第一题为测量海岛的高度和距离(图 1)，故题为《海岛算经》受此题启发，小清同学依照此法测量奥林匹克公园奥林匹克塔的高度和距离(示意图如图 2 所示)，录得以下是数据(单位：米)：前表却行$DG=1$，表高$CD=EF=2$，后表却行$FH=3$，表间$DF=244$.则塔高$AB=$__________米，前表去塔远近$BD=$__________米.





四、解答题

20．在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$3\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}$.

（1）求$\sin C$；

（2）若$c=2$，$a+b=4$，求$\triangle ABC$的面积.

21．$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c.已知B=150°.

（1）若$a=\sqrt{3}c$，$b=2\sqrt{7}$，求$\triangle ABC$的面积；

（2）若$\sin A+\sqrt{3}\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求$C$.

22．记$\triangle ABC$是内角A，B，C的对边分别为a，b，c.已知$b^2=ac$，点D在边AC上，$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

（1）证明：$BD=b$；

（2）若$AD=2DC$，求$\cos\angle ABC$.

23．已知$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$(a-c)(\sin A+\sin C)-\sin B(a-b)=0$.

（1）求C；

（2）若$S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}$，$c=2$，求$\triangle ABC$周长.

24．在①$ac=\sqrt{3}$，②$c\sin A=3$，③$c=\sqrt{3}b$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求c的值；若问题中的三角形不存在，说明理由.

问题：是否存在$\triangle ABC$，它的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\sin A=\sqrt{3}\sin B$，$C=\frac{\pi}{6}$，________?

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

25．在$\triangle ABC$中，角A、B、C所对的边长分别为a、b、c，$b=a+1$，$c=a+2$..

（1）若$2\sin C=3\sin A$，求$\triangle ABC$的面积；

（2）是否存在正整数a，使得$\triangle ABC$为钝角三角形?若存在，求出a的值；若不存在，说明理由.

26．已知在$\triangle ABC$中，$c=2b\cos B$，$C=\frac{2\pi}{3}$.

（1）求B的大小；

（2）在下列三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在且唯一确定，并求出BC边上的中线的长度.

①$c=\sqrt{2}b$；②周长为$4+2\sqrt{3}$；③面积为$S_{\Delta ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$；

27．ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$a\sin\frac{A+C}{2}=b\sin A$.

（1）求B；

（2）若ΔABC为锐角三角形，且$c=1$，求ΔABC面积的取值范围.

28．在$\triangle ABC$中，a,b,c分别为内角A,B,C的对边，且满足$\frac{b}{a}=\frac{\cos B+1}{\sqrt{3}\sin A}$.

（1）求B的大小；

（2）从①$a=2c$，②$b=2$，③$A=\frac{\pi}{4}$这三个条件中任选两个，补充在下面的问题中，并解决问题.

问题：已知____________，____________，若$\triangle ABC$存在，求$\triangle ABC$的面积，若$\triangle ABC$不存在，请说明理由.

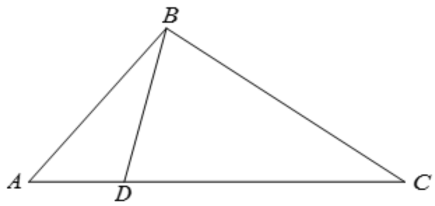
注：如果选择多个条件解答，按第一个解答计分.

29．$\triangle ABC$ 中，$\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C=\sin B\sin C$.

（1）求 A；

（2）若 $BC=3$，求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

30．已知 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$3c\cos B+2b\sin B\sin C=0$，$D$ 是 $\triangle ABC$ 边 AC 上一点，$BD=\sqrt{2}$.



（1）若 $BD\perp BC$，$AB=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，求 AD；

（2）若 $CD=2AD$，求 $2AB+BC$ 的最大值.

参考答案

1．D　2．A　3．B　4．A　5．A　6．D　7．C　8．A　9．A　10．C　11．B

12．AC　13．AC　14．ACD

15．$2\sqrt{2}$　16．$6\sqrt{3}$　17．$-\frac{1}{4}$　18．$2\sqrt{13}$　$\frac{2\sqrt{39}}{13}$　19．246　　122

20.　全国 II 卷普通高等学校招生全国统一考试 2021 届高三数学（理）试题（黑卷）

【解析】（1）由$3\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}=1+\cos C$知，$\cos C=\frac{1}{2}$，又$C\in(0,\pi)$

故$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$

（2）由余弦定理知，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-2ab-ab$，

则$2^2=4^2-3ab$，$ab=4$

故三角形面积为$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

21.　2020 年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标 I）

【解析】（1）由余弦定理可得$b^2=28=a^2+c^2-2ac\cdot\cos150^\circ=7c^2$，

$\therefore c=2,a=2\sqrt{3},\therefore\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}$；

（2）$\because A+C=30^\circ$，

$\therefore\sin A+\sqrt{3}\sin C=\sin(30^\circ-C)+\sqrt{3}\sin C$

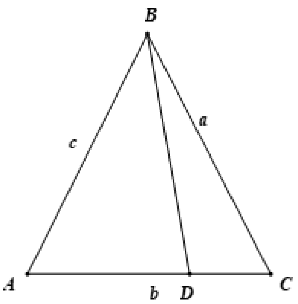
$=\frac{1}{2}\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C=\sin(C+30^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\because 0^\circ<C<30^\circ,\therefore 30^\circ<C+30^\circ<60^\circ$，

$\therefore C+30^\circ=45^\circ,\therefore C=15^\circ$.

22.　2021 年全国新高考 I 卷数学试题

【解析】



（1）由题设，$BD=\frac{a\sin C}{\sin\angle ABC}$，由正弦定理知：$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin\angle ABC}$，即$\frac{\sin C}{\sin\angle ABC}=\frac{c}{b}$，

$\therefore BD=\dfrac{ac}{b}$，又 $b^2=ac$，

$\therefore BD=b$，得证.

（2）由题意知：$BD=b, AD=\dfrac{2b}{3}, DC=\dfrac{b}{3}$，

$\therefore \cos\angle ADB=\dfrac{b^2+\dfrac{4b^2}{9}-c^2}{2b\cdot\dfrac{2b}{3}}=\dfrac{\dfrac{13b^2}{9}-c^2}{\dfrac{4b^2}{3}}$，同理 $\cos\angle CDB=\dfrac{b^2+\dfrac{b^2}{9}-a^2}{2b\cdot\dfrac{b}{3}}=\dfrac{\dfrac{10b^2}{9}-a^2}{\dfrac{2b^2}{3}}$，

$\because \angle ADB=\pi-\angle CDB$，

$\therefore \dfrac{\dfrac{13b^2}{9}-c^2}{\dfrac{4b^2}{3}}=\dfrac{a^2-\dfrac{10b^2}{9}}{\dfrac{2b^2}{3}}$，整理得 $2a^2+c^2=\dfrac{11b^2}{3}$，又 $b^2=ac$，

$\therefore 2a^2+\dfrac{b^4}{a^2}=\dfrac{11b^2}{3}$，整理得 $6a^4-11a^2b^2+3b^4=0$，解得 $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{1}{3}$ 或 $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{3}{2}$，

由余弦定理知：$\cos\angle ABC=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{a^2}{2b^2}$，

当 $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{1}{3}$ 时，$\cos\angle ABC=\dfrac{7}{6}>1$ 不合题意；当 $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{3}{2}$ 时，$\cos\angle ABC=\dfrac{7}{12}$；

综上，$\cos\angle ABC=\dfrac{7}{12}$.

23.　全国 2021 届高三高考数学（文）演练试卷

【解析】（1）因为 $(a-c)(\sin A+\sin C)-\sin B(a-b)=0$，所以 $(a-c)(a+c)-b(a-b)=0$，

所以 $a^2-c^2-ab+b^2=0$，所以 $c^2=a^2+b^2-ab=a^2+b^2-2ab\cos C$，

所以 $2\cos C=1$ 且 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$；

（2）因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=2\sqrt{3}$，所以 $ab=8$，

又因为 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-3ab=4$，

所以 $(a+b)^2-3\times 8=4$，所以 $a+b=2\sqrt{7}$，

所以周长为 $a+b+c=2\sqrt{7}+2$，

24.　2020 年新高考全国卷 I 数学高考试题（山东）

【解析】解法一：

由 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$ 可得：$\frac{a}{b}=\sqrt{3}$，

不妨设 $a=\sqrt{3}m, b=m(m>0)$，

则：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=3m^2+m^2-2\times\sqrt{3}m\times m\times\frac{\sqrt{3}}{2}=m^2$，即$c=m$.

选择条件①的解析：

据此可得：$ac=\sqrt{3}m\times m=\sqrt{3}m^2=\sqrt{3}$，$\therefore m=1$，此时$c=m=1$.

选择条件②的解析：

据此可得：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{m^2+m^2-3m^2}{2m^2}=-\frac{1}{2}$，

则：$\sin A=\sqrt{1-(-\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，此时：$c\sin A=m\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$，则：$c=m=2\sqrt{3}$.

选择条件③的解析：

可得$\frac{c}{b}=\frac{m}{m}=1$，$c=b$，

与条件$c=\sqrt{3}b$矛盾，则问题中的三角形不存在.

解法二：$\because sinA=\sqrt{3}sinB, C=\frac{\pi}{6}, B=\pi-(A+C)$,

$\therefore sinA=\sqrt{3}\,sin(A+C)=\sqrt{3}\,sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$,

$sinA=\sqrt{3}\,sin(A+C)=\sqrt{3}sinA\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}cosA\cdot\frac{1}{2}$ ，

$\therefore sinA=-\sqrt{3}cosA$, $\therefore tanA=-\sqrt{3}$, $\therefore A=\frac{2\pi}{3}$, $\therefore B=C=\frac{\pi}{6}$,

若选①，$ac=\sqrt{3}$, $\because a=\sqrt{3}b=\sqrt{3}c$, $\therefore\sqrt{3}c^2=\sqrt{3}$, $\therefore$ c=1;

若选②，$csinA=3$, 则$\frac{\sqrt{3}c}{2}=3$, $c=2\sqrt{3}$;

若选③, 与条件$c=\sqrt{3}b$矛盾.

25.　2021 年全国新高考 II 卷数学试题

【解析】(1) 因为$2\sin C=3\sin A$，则$2c=2(a+2)=3a$，则$a=4$，故$b=5$，$c=6$，

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{8}$，所以，$C$为锐角，则$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，

因此，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times5\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$；

(2) 显然$c>b>a$，若$\triangle ABC$为钝角三角形，则C为钝角，

由余弦定理可得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+(a+1)^2-(a+2)^2}{2a(a+1)}=\frac{a^2-2a-3}{2a(a+1)}<0$，

解得$-1<a<3$，则$0<a<3$，

由三角形三边关系可得$a+a+1>a+2$，可得$a>1$，$\because a\in Z$，故$a=2$.

26.　2021 年北京市高考数学试题

【解析】（1）$\because c=2b\cos B$，则由正弦定理可得 $\sin C=2\sin B\cos B$，

$\therefore \sin 2B=\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\because C=\dfrac{2\pi}{3}$，$\therefore B\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，$2B\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

$\therefore 2B=\dfrac{\pi}{3}$，解得 $B=\dfrac{\pi}{6}$；

（2）若选择①：由正弦定理结合（1）可得 $\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，

与 $c=\sqrt{2}b$ 矛盾，故这样的 $\triangle ABC$ 不存在；

若选择②：由（1）可得 $A=\dfrac{\pi}{6}$，

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，

则由正弦定理可得 $a=b=2R\sin\dfrac{\pi}{6}=R$，

$c=2R\sin\dfrac{2\pi}{3}=\sqrt{3}R$，

则周长 $a+b+c=2R+\sqrt{3}R=4+2\sqrt{3}$，

解得 $R=2$，则 $a=2,c=2\sqrt{3}$，

由余弦定理可得 BC 边上的中线的长度为：

$\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+1^2-2\times2\sqrt{3}\times1\times\cos\dfrac{\pi}{6}}=\sqrt{7}$；

若选择③：由（1）可得 $A=\dfrac{\pi}{6}$，即 $a=b$，

则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}a^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，解得 $a=\sqrt{3}$，

则由余弦定理可得 BC 边上的中线的长度为：

$\sqrt{b^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-2\times b\times\dfrac{a}{2}\times\cos\dfrac{2\pi}{3}}=\sqrt{3+\dfrac{3}{4}+\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

27.　2019 年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标III）

【解析】(1)根据题意 $a\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin A$，由正弦定理得 $\sin A\sin\dfrac{A+C}{2}=\sin B\sin A$，因为 $0<A<\pi$，故 $\sin A>0$，消去 $\sin A$ 得 $\sin\dfrac{A+C}{2}=\sin B$.

$0<B<\pi$，$0<\dfrac{A+C}{2}<\pi$ 因为故 $\dfrac{A+C}{2}=B$ 或者 $\dfrac{A+C}{2}+B=\pi$，而根据题意 $A+B+C=\pi$，故 $\dfrac{A+C}{2}+B=\pi$ 不成立，所以 $\dfrac{A+C}{2}=B$，又因为 $A+B+C=\pi$，代入得 $3B=\pi$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

(2)因为$\triangle ABC$是锐角三角形，由（1）知$B=\frac{\pi}{3}$， $A+B+C=\pi$得到$A+C=\frac{2}{3}\pi$，

故$\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2}\\0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，解得$\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$.

又应用正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$， $c=1$，

由三角形面积公式有：

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B=\frac{1}{2}c^2\frac{a}{c}\cdot\sin B=\frac{1}{2}c^2\frac{\sin A}{\sin C}\cdot\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-C)}{\sin C}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{3}\cos C-\cos\frac{2\pi}{3}\sin C}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sin\frac{2\pi}{3}\frac{1}{\tan C}-\cos\frac{2\pi}{3})=\frac{3}{8}\frac{1}{\tan C}+\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

又因$\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2},\tan C>\frac{\sqrt{3}}{3}$,故$\frac{\sqrt{3}}{8}<\frac{3}{8}\frac{1}{\tan C}+\frac{\sqrt{3}}{8}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故$\frac{\sqrt{3}}{8}<S_{\triangle ABC}<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故$S_{\triangle ABC}$的取值范围是$(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2})$

28.　山东省泰安肥城市 2021 届高三高考适应性训练数学试题（二）

【解析】（1）因为$\frac{b}{a}=\frac{\cos B+1}{\sqrt{3}\sin A}$，由正弦定理可得

$\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\cos B+1}{\sqrt{3}\sin A}$

因为$\sin A\neq 0$

所以$\sqrt{3}\sin B-\cos B=1$即$\sin(B-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$

因为$0<B<\pi$

所以$-\frac{\pi}{6}<B-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$

因为$B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$即$B=\frac{\pi}{3}$

（2）若选择条件①②，

由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

可得$4=4c^2+c^2-2c^2$，解得$c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故$a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

若选择条件②③

由正弦定理可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}+3}{3}$

若选择条件①③

这样的三角形不存在，理由如下：

在三角形ABC中，$A=\frac{\pi}{4}$，$B=\frac{\pi}{3}$，

所以$C=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$，

所以$A<C$，所以$a<c$

又因为$a=2c$

所以$a>c$与$a<c$矛盾

所以这样的三角形不存在

29. 2020 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 II）

【解析】（1）由正弦定理可得：$BC^2-AC^2-AB^2=AC\cdot AB$，

$\therefore\cos A=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=-\frac{1}{2}$，

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{2\pi}{3}$.

（2）由余弦定理得：$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos A=AC^2+AB^2+AC\cdot AB=9$，

即$(AC+AB)^2-AC\cdot AB=9$.

$\because AC\cdot AB\le\left(\frac{AC+AB}{2}\right)^2$（当且仅当$AC=AB$时取等号），

$\therefore 9=(AC+AB)^2-AC\cdot AB\ge(AC+AB)^2-\left(\frac{AC+AB}{2}\right)^2=\frac{3}{4}(AC+AB)^2$，

解得：$AC+AB\le 2\sqrt{3}$（当且仅当$AC=AB$时取等号），

$\therefore\triangle ABC$周长$L=AC+AB+BC\le 3+2\sqrt{3}$，$\therefore\triangle ABC$周长的最大值为$3+2\sqrt{3}$.

30. 福建省南安第一中学 2021 届高三二模数学试题

【解析】(1) $3c\cos B+2b\sin B\sin C=0$，$3\sin C\cos B+2\sin B\sin B\sin C=0$，

$\sin C\neq 0, 3\cos B+2\sin^2 B=0$， $2\cos^2 B-3\cos B-2=0$， $\cos B=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \angle ABC=\dfrac{2}{3}\pi$， $\because BD\perp BC$， $\angle ABD=\dfrac{1}{6}\pi$，

在$\triangle ABD$中，由余弦定理得， $AD^2=\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2+\sqrt{2}^2-2\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{2}\cos\dfrac{1}{6}\pi=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore AD=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

（2）解法一： $\cos\angle ABC=-\dfrac{1}{2}$， 因为$CD=2AD$， 所以$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DA}$， 即$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}=2(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD})$，

整理得到$\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$， 两边平方后有$\overrightarrow{BD}^2=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{BA}^2+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{BC}^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，

所以$2=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{BA}^2+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{BC}^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$即$2=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{BA}^2+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{BC}^2+\dfrac{4}{9}\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，

整理得到$18=4|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2-2|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|$，

所以$18=4c^2+a^2-2ac=(2c+a)^2-6ac$，

因为$2ca\leq(\dfrac{2c+a}{2})^2$， 所以$18=(2c+a)^2-6ac\geq(2c+a)^2-3(\dfrac{2c+a}{2})^2=\dfrac{(2c+a)^2}{4}$，

$2c+a\leq\sqrt{18\times 4}=6\sqrt{2}$， 当且仅当$a=3\sqrt{2}, c=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$时等号成立，

所以$2AB+BC$的最大值$6\sqrt{2}$.

解法二：设$AD=t$， 则$CD=2t$， $AC=3t$，

在$\triangle ABD$中， $\cos\angle ADB=\dfrac{t^2+(\sqrt{2})^2-c^2}{2\sqrt{2}t}$， 在$\triangle BDC$中， $\cos\angle BDC=\dfrac{(2t)^2+(\sqrt{2})^2-a^2}{2\sqrt{2}\cdot 2t}$，

又$\cos\angle ADB=-\cos\angle BDC$， 所以$\dfrac{t^2+(\sqrt{2})^2-c^2}{2\sqrt{2}t}=-\dfrac{(2t)^2+(\sqrt{2})^2-a^2}{2\sqrt{2}\cdot 2t}$，

解得$6t^2=2c^2+a^2-6$，①

在$\triangle ABC$中， $AC^2=(3t)^2=a^2+c^2-2ac\cos B$， 即$9t^2=a^2+c^2-\dfrac{1}{2}ac$，②

由①②可得$18=4c^2+a^2-2ac$. 所以$18=4c^2+a^2-2ac=(2c+a)^2-6ac$，

因为$2ca\leq(\frac{2c+a}{2})^2$，所以$18=(2c+a)^2-6ac\geq(2c+a)^2-3(\frac{2c+a}{2})^2=\frac{(2c+a)^2}{4}$，

$2c+a\leq\sqrt{18\times 4}=6\sqrt{2}$，当且仅当$a=3\sqrt{2}$， $c=\frac{3\sqrt{2}}{2}$时等号成立，

所以$2AB+BC$的最大值$6\sqrt{2}$.