三角恒等变换

一、单选题

1．若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$

A．$\frac{8}{9}$　　B．$\frac{7}{9}$　　C．$-\frac{7}{9}$　　D．$-\frac{8}{9}$

2．已知直线 $3x-y+1=0$ 的倾斜角为 α，则 $\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\cos^2\alpha=$

A．$\frac{2}{5}$　　B．$-\frac{1}{5}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$-\frac{1}{20}$

3．已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$，则 $\sin\alpha=$

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$

C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4．$\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12}=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

5．若 $\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$，则 $\sqrt{3}\cos 2\alpha-\sin 2\alpha$ 的值为

A．$-\frac{5}{9}$　　B．$\frac{5}{9}$　　C．$-\frac{10}{9}$　　D．$\frac{10}{9}$

6．若 α,β 都是锐角，且 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，则 $\cos\beta=$

A．$\frac{2\sqrt{5}}{25}$　　B．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{25}$ 或 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{\sqrt{5}}{25}$

7．若 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\tan 2\alpha=\frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，则 $\tan\alpha=$（　　）

潍坊高中数学

A．$\frac{\sqrt{15}}{15}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{15}}{3}$

8．已知 $0<\beta<\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，且 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$ 则 $\sin(\alpha+\beta)=$

A．$-\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　B．$-\frac{\sqrt{15}}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{15}}{5}$　　D．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$

9．已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，则 $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=$（　　）

A．$-\frac{7}{9}$　　B．$-\frac{2}{9}$　　C．$\frac{2}{9}$　　D．$\frac{7}{9}$

10．已知$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且$\frac{\cos 2\theta}{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{7\sqrt{2}}{5}$，则$\tan 2\theta=$（　　）.

A．$\frac{7}{24}$　　B．$\frac{24}{7}$　　C．$\pm\frac{7}{24}$　　D．$\pm\frac{24}{7}$

11．已知$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$，则$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=$（　　）

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$-\frac{\sqrt{5}}{5}$

12．若$\alpha\in(0,2\pi)$，则满足$4\sin\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}=4\cos\alpha-\frac{1}{\sin\alpha}$的所有$\alpha$的和为（　　）

A．$\frac{3\pi}{4}$　　B．2π　　C．$\frac{7\pi}{2}$　　D．$\frac{9\pi}{2}$

13．已知θ为锐角，若$|\vec{a}|=\frac{2}{\sin\theta}$，$|\vec{b}|=\frac{4}{\cos\theta}$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{2}-2\theta$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$的值（　　）

A．2　　B．4　　C．8　　D．16

14．已知α为锐角，且$\cos\alpha\left(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ\right)=1$，则$\alpha$的值为

A．20°　　B．40°

C．50°　　D．70°

二、多选题

15．下列结论正确的是（　　）

A．若$\tan\alpha=2$，则$\cos 2\alpha=\frac{3}{5}$

B．若$\sin\alpha+\cos\beta=1$，则$\sin^2\alpha+\cos^2\beta\geq\frac{1}{2}$

C．“$\exists x_0\in\mathbf{Z}$，$\sin x_0\in\mathbf{Z}$”的否定是“$\forall x\in\mathbf{Z}$，$\sin x\notin\mathbf{Z}$”

D．将函数$\boldsymbol{y}=|\mathbf{cos\,2}\boldsymbol{x}|$的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，所得图象关于原点对称

16．已知α为第一象限角，β为第三象限角，且$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}$，$\cos\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{12}{13}$，则$\cos(\alpha+\beta)$可以为（　　）

A．$-\frac{33}{65}$　　B．$-\frac{63}{65}$　　C．$\frac{33}{65}$　　D．$\frac{63}{65}$

17．已知$\sin\theta=-\frac{2}{3}$，且$\cos\theta>0$，则（　　）

A．$\tan\theta<0$　　B．$\tan^2\theta>\frac{4}{9}$

C．$\sin^2\theta>\cos^2\theta$　　D．$\sin 2\theta>0$

18．已知函数 $y=\log_a(2x-1)+3(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 过定点 P，且 $\alpha+\frac{\pi}{4}$ 的终边过点 P，则（　　）

A．$\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$　　B．$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

C．$\tan 2\alpha=\frac{4}{3}$　　D．$\frac{1+\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha-\cos^2 2\alpha}=\frac{37}{7}$

三、填空题

19．已知 $\tan\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{5}$，则 $\tan\alpha=$__________.

20．若函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)+\cos x$ 的最大值为 2，则常数 φ 的一个取值为________.

21．已知 $\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{2}{3}$，则 $\sin 2\alpha$ 的值是____.

22．已知 $\frac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{2}{3}$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值是_____.

23．已知 $\cos\left(x-\frac{\pi}{10}\right)=-\frac{4}{5}$，则 $\sin\left(2x+\frac{3\pi}{10}\right)=$________________.

24．若实数 α，β 满足方程组 $\begin{cases}1+2\cos\alpha=2\cos\beta\\ \sqrt{3}+2\sin\alpha=2\sin\beta\end{cases}$，则 β 的一个值是__________.

25．已知 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=3$，则 $\tan\theta=$______，$\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$______.

26．已知函数 $f(x)=\sin x(\cos x-\sin x)+\frac{1}{2}$，则函数 $f(x)$的最小值为__________.若 $f(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{6}$，$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\cos 2\alpha$ 的值为__________.

四、解答题

27．已知 α,β 为锐角，$\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

（1）求 $\cos 2\alpha$ 的值；

（2）求 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值.

潍坊高中数学

28．已知$\sin(\beta-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{5},\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{3}$，其中$0<\alpha<\frac{\pi}{2},0<\beta<\frac{\pi}{2}$

（1）求$\sin 2\beta$的值

（2）求$\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})$的值

29．已知$a\in(0,\pi)$，$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}$，且$\cos\alpha>\sin\alpha$．

（1）求角α的大小；

（2）$x\in\left(-\frac{\pi}{6},m\right)$，给出$m$的一个合适的数值使得函数$y=\sin x+2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\alpha\right)$的值域为$\left(-\frac{1}{2},\sqrt{3}+1\right]$.

30．已知向量$\vec{m}=(\cos x，\sin x)$，$\vec{n}=(\cos x，-\sin x)$，函数$f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}+\frac{1}{2}$.

（1）若$f(\frac{x}{2})=1$，$x\in(0，\pi)$，求$\tan(x+\frac{\pi}{4})$的值；

（2）若$f(\alpha)=-\frac{1}{10}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2}，\frac{3\pi}{4})$，$\sin\beta=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\beta\in(0，\frac{\pi}{2})$，求$2\alpha+\beta$的值.

参考答案

1．B　2．A　3．B　4．D　5．D　6．A　7．A　8．D　9．A　10．D　11．B　12．D　13．D　14．B

15．BC　16．CD　17．AB　18．ACD

19．$\frac{3}{2}$．　20．$\frac{\pi}{2}$（$2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$ 均可）　21．$\frac{1}{3}$　22．$\frac{\sqrt{2}}{10}$．　23．$\frac{7}{25}$　24．0(答案不惟一)

25．$\frac{1}{2}$　　$\frac{7}{10}\sqrt{2}$　　26．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　$\frac{-4+\sqrt{2}}{6}$

27．【解析】（1）因为 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，所以 $\sin\alpha=\frac{4}{3}\cos\alpha$．

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$，

因此，$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{25}$．

（2）因为 α,β 为锐角，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$．

又因为 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

因此 $\tan(\alpha+\beta)=-2$．

因为 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，所以 $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}$，

因此，$\tan(\alpha-\beta)=\tan[2\alpha-(\alpha+\beta)]=\frac{\tan2\alpha-\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan2\alpha\tan(\alpha+\beta)}=-\frac{2}{11}$．

28．【解析】（1）因为 $\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\beta-\cos\beta)=\frac{1}{5}$，

所以 $\sin\beta-\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{5}$，

所以 $(\sin\beta-\cos\beta)^2=\sin^2\beta+\cos^2\beta-2\sin\beta\cos\beta=1-\sin2\beta=\frac{2}{25}$，

潍坊高中数学

所以 $\sin2\beta=\frac{23}{25}$．

（2）因为 $\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{3}$，

其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)+\sin(\alpha+\beta)\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{2\sqrt{6}}{5}\times\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{15}$.

29.【解析】(1) 因为$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

又$a\in(0,\pi)$,所以$\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$,

可得$\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$,可得$\alpha=\frac{\pi}{12}$或$\frac{5\pi}{12}$,

又$\cos\alpha>\sin\alpha$,所以$\alpha=\frac{\pi}{12}$.

(2) $y=\sin x+2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\sin x+1-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$,

$=\sin x+1-\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}$,

$=\frac{3}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+1=\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$,

当$x=-\frac{\pi}{6}$时,$y=\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+1=-\frac{1}{2}$,

当$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$时,$y=\sqrt{3}+1$,

所以由题意可得$m-\frac{\pi}{6}>\frac{\pi}{2}$,可得$m>\frac{2\pi}{3}$,

所以$m\in\left(\frac{2\pi}{3},+\infty\right)$即可,$m$的值可取$\pi$.

30.【解析】(1) 因为向量$\vec{m}=(\cos x,\sin x)$,$\vec{n}=(\cos x,-\sin x)$,

所以$f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}+\frac{1}{2}=\cos^2x-\sin^2x+\frac{1}{2}=\cos 2x+\frac{1}{2}$.

因为$f(\frac{x}{2})=1$,

所以$\cos x+\frac{1}{2}=1$,

即$\cos x=\frac{1}{2}$.

又因为$x\in(0,\pi)$,

所以 $x=\frac{\pi}{3}$，

所以 $tan(x+\frac{\pi}{4})=tan(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=-2-\sqrt{3}$.

（2）若 $f(\alpha)=-\frac{1}{10}$，则 $cos2\alpha+\frac{1}{2}=-\frac{1}{10}$，即 $cos2\alpha=-\frac{3}{5}$.

因为 $\alpha\in(\frac{\pi}{2}，\frac{3\pi}{4})$，

所以 $2\alpha\in(\pi，\frac{3\pi}{2})$，

所以 $sin2\alpha=-\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=-\frac{4}{5}$.

因为 $sin\beta=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\beta\in(0，\frac{\pi}{2})$，

所以 $cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{\sqrt{2}}{10}$，

所以 $cos(2\alpha+\beta)=cos2\alpha cos\beta-sin2\alpha sin\beta=(-\frac{3}{5})\times\frac{\sqrt{2}}{10}-(-\frac{4}{5})\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为 $2\alpha\in(\pi，\frac{3\pi}{2})$，$\beta\in(0，\frac{\pi}{2})$，

所以 $2\alpha+\beta\in(\pi，2\pi)$，

所以 $2\alpha+\beta$ 的值为 $\frac{7\pi}{4}$.