三角函数图像与性质

一、单选题

1．下列函数中，以$\frac{\pi}{2}$为周期且在区间($\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$)单调递增的是

A．$f(x)=|\cos 2x|$　　B．$f(x)=|\sin 2x|$

C．$f(x)=\cos|x|$　　D．$f(x)=\sin|x|$

2．下列区间中，函数$f\left(x\right)=7\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$单调递增的区间是（　　）

A．$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　B．$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$　　C．$\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$　　D．$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

3．若$x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$是函数$f(x)=\sin\omega x$ ($\omega>0$)两个相邻的极值点，则$\omega=$

A．2　　B．$\frac{3}{2}$

C．1　　D．$\frac{1}{2}$

4．函数$f(x)=\cos x-\cos 2x$，试判断函数的奇偶性及最大值（　　）

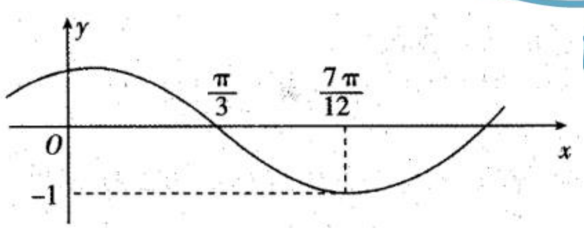
A．奇函数，最大值为 2　　B．偶函数，最大值为 2

C．奇函数，最大值为$\frac{9}{8}$　　D．偶函数，最大值为$\frac{9}{8}$

5．若$f\left(x\right)=\cos x-\sin x$在$[-a,a]$是减函数，则$a$的最大值是

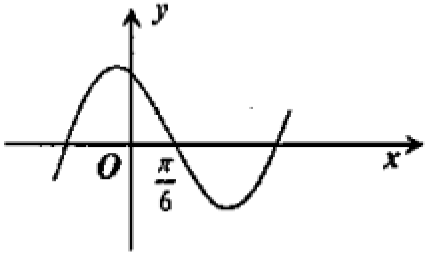
A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．$\frac{3\pi}{4}$　　D．π

6．函数$f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=$（　　）



A．1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

7．函数$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\varphi\right)\left(|\varphi|<\pi\right)$的图象过点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$（如图所示），若将$f\left(x\right)$的图象上所有点向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到函数$g\left(x\right)$的图象，则$g\left(x\right)$图象的一条对称轴的方程为



A. $x=\frac{5\pi}{12}$　　B. $x=\frac{2\pi}{3}$　　C. $x=\frac{\pi}{4}$　　D. $x=\frac{\pi}{12}$

8．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\theta)(\omega>0,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$ 的图象相邻的两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，若将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 后得到偶函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $f(x)$ 的一个单调递减区间为（　　）

A. $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$　　B. $[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}]$　　C. $[0,\frac{\pi}{3}]$　　D. $[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}]$

9．已知函数 $f\left(x\right)=3\sin\omega x-\sqrt{3}\cos\omega x$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 π，把 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\varphi(0<\varphi<\pi)$ 个单位可得函数 $g\left(x\right)$ 的图象，若 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{5}$，则 $\cos 2\varphi=$（　　）

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{1}{10}$　　D. $\frac{2}{5}$

10．把函数 $y=f(x)$ 图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像，则 $f(x)=$（　　）

A. $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{12}\right)$　　B. $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$

C. $\sin\left(2x-\frac{7\pi}{12}\right)$　　D. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$

11．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$，对任意的 $x\in R$ 满足 $f'(x)>4x$．当 $\alpha\in[0,2\pi]$ 时，不等式 $f(\sin\alpha)+\cos 2\alpha>0$ 的解集为（　　）

A. $\left(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$　　B. $\left(\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$　　C. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$

12．已知函数 $f\left(x\right)=\cos\left(2x+\varphi\right)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，$F\left(x\right)=f\left(x\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}f'\left(x\right)$ 为奇函数，则下述四个结论中说法正确的是（　　）

A. $\tan\varphi=\sqrt{3}$

B. $f\left(x\right)$ 在 $\left[-a,a\right]$ 上存在零点，则 a 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$

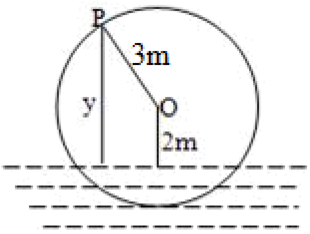
C．$F(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$上单调递增

D．$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$有且仅有一个极大值点

13．若函数$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$在$\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增，则实数$\omega$的取值范围为（　　）

A．$(0,3]$　　　B．$\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　　C．$\left(0,\frac{1}{4}\right]$　　　D．$\left(0,\frac{10}{3}\right]$

14．如图为一半径为$3m$的水轮，水轮圆心O距水面$2m$，已知水轮每分钟转4圈，水轮上的点P到水面距离$y(m)$与时间$x(s)$满足关系式$y=A\sin(\omega x+\varphi)+2$，则有（　　）



A．$\omega=\frac{5\pi}{12}$，$A=3$　　　B．$\omega=\frac{2\pi}{15}$，$A=3$

C．$\omega=\frac{5\pi}{12}$，$A=5$　　　D．$\omega=\frac{2\pi}{15}$，$A=5$

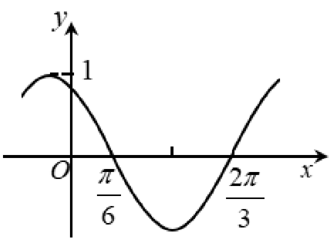
二、多选题

15．下列关于函数$y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的说法正确的是（　　）

A．在区间$\left(-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right)$上单调递增　　　B．最小正周期是$\pi$

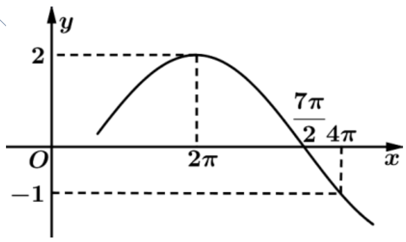
C．图象关于点$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$成中心对称　　　D．图象关于直线$x=-\frac{5\pi}{12}$对称

16．下图是函数$y=\sin(\omega x+\varphi)$的部分图像，则$\sin(\omega x+\varphi)=$（　　）



A．$\sin(x+\frac{\pi}{3})$ B．$\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$　　C．$\cos(2x+\frac{\pi}{6})$　　D．$\cos(\frac{5\pi}{6}-2x)$

17．函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$($\omega>0$，$|\varphi|<\pi$)的部分图像如图所示，则下列结论正确的是（　　）



A． $f\left(x\right)=2\sin\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

B．若把函数 $f\left(x\right)$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位，则所得图像对应的函数是奇函数

C．若把 $f\left(x\right)$ 的图像上所有点的横坐标变为原来的 $\dfrac{2}{3}$ 倍，纵坐标不变，得到图像对应的函数在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上是增函数

D． $\forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$，若 $f\left(3x\right)+a\geq f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 成立，则 a 的最小值为 $\sqrt{3}$

18．已知函数 $f(x)=\sin x-\cos x$，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，则下列结论中正确的是（　　）

A．函数 $f(x)$ 的值域与函数 $g(x)$ 的值域相同

B．若 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点，则 x_0 是函数 $g(x)$ 的零点

C．把函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度，就可以得到函数 $g(x)$ 的图象

D．函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上均单调递增

19．设 $\omega>0$，函数 $f(x)=-\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上有零点，则 ω 的值可以是（　　）

A． $\dfrac{1}{6}$　　B． $\dfrac{5}{6}$　　C． $\dfrac{1}{3}$　　D． $\dfrac{2}{3}$

三、填空题

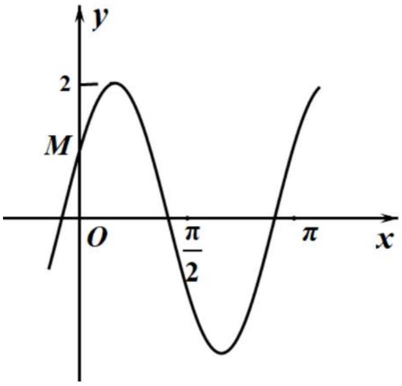
20．将函数 $y=3\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，则平移后的图象中与 y 轴最近的对称轴的方程是____.

21．已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$（$x\in\mathbf{R}$，$\omega>0$）的最小正周期为 π，将 $y=f\left(x\right)$ 的图象向左平移 φ（$\varphi>0$）个单位长度，所得函数 $y=g\left(x\right)$ 为偶函数时，则 φ 的最小值是______.

22．已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(x+\varphi\right)$，则 $f(\dfrac{\pi}{3}-\varphi)=$______，当 $\varphi=$_______时，函数 $f(x)$ 在区间 $(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3})$ 上单调(写出一个值即可).

23．已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，函数 $f\left(x\right)$ 的图象过点

$M(0,1)$，且 $f(x)$ 的图象的两条对称轴之间的最短距离为 $\frac{\pi}{2}$，则 $\omega=$______；将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)$ 图象的对称轴方程为______.



24．将函数 $f(x)=2\sin(3x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{2\pi}{9}$ 个单位长度，得到的函数 $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{11\pi}{18},0\right)$ 对称，则 $\varphi=$______；若 $g(x)$ 在区间 $\left(\frac{\varphi}{m},-\frac{\varphi}{m}\right)(m\in R)$ 上单调递减，则实数 m 的取值范围是______.

四、解答题

25．已知函数 $f(x)=4\sin x\cos x-2\sqrt{3}\cos 2x$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\pi\right]$ 时，求 $f(x)$ 的值域.

26．在① $x=-\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴，② $\frac{\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点，③函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，且 $b-a$ 的最大值为 $\frac{\pi}{2}$，这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并解答.

已知函数 $f(x)=2\sin\omega x\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}(0<\omega<2)$，__________，求 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调递减区间.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

27．已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)+m\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<0\right)$ 满足下列 4 个条件中的 3 个，4 个条件依次是：① $\omega=\frac{3}{2}$，②周期 $T=\pi$，③过点 $(0,0)$，④ $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$.

（1）写出所满足的 3 个条件的序号（不需要说明理由），并求 $f\left(x\right)$ 的解析式；

（2）求函数 $f\left(x\right)$ 的图象与直线 $y=1$ 相邻两个交点间的最短距离.

28．已知函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(-1<\omega<3,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象经过点 $A(0,-1)$，$B\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{3}\right)$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的解析式；

（2）将函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象向左平移 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 个单位长度得到函数 $y=g\left(x\right)$ 的图象，若 $g\left(x\right)$ 为奇函数，且 $f\left(\alpha-\theta\right)=\frac{10}{13},\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求 $\cos 2\alpha$ 的值.

29．函数 $f\left(x\right)=3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}\right)$.

（1）求函数 $y=f\left(x\right)$ 的对称中心；

（2）将函数 $f\left(x\right)$ 的图象向左平移 φ 个单位得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，其中 $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 且 $\tan\varphi=\frac{3}{4}$，求函数 $g\left(x\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的取值范围.

30．已知函数 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$.

（1）求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域；

（2）设在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，且 $f\left(A\right)=1$，$a=1$，求 $\triangle ABC$ 的面积 S 的最大值.

参考答案

1．A　2．A　3．A　4．D　5．A　6．A　7．D　8．B　9．A　10．B　11．D　12．B　13．B　14．B

15．AC　16．BC　17．AB　18．ABD　19．BCD

20．$x=-\frac{5\pi}{24}$　21．$\frac{\pi}{8}$　22．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\frac{\pi}{6}$　23．2　$\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$　24．$-\frac{\pi}{6}$　$\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

25．【解析】（1）$f\left(x\right)=2\sin 2x-2\sqrt{3}\cos 2x=4\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

所以 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

（2）$-\frac{\pi}{6}\le x\le\pi,-\frac{\pi}{3}\le 2x\le 2\pi,-\frac{2\pi}{3}\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{3}$，所以 $f\left(x\right)\in\left[-4,4\right]$.

26．【解析】解：$f(x)=2\sin\omega x\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}=2\sin\omega x\left(\cos\omega x\cos\frac{\pi}{6}+\sin\omega x\sin\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$

$=\sqrt{3}\cos\omega x\sin\omega x+\sin^2\omega x-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x-\frac{1}{2}\cos 2\omega x$

$=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$.

①若 $x=-\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴，

则 $-\frac{\pi\omega}{3}-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，即 $-\frac{\pi\omega}{3}=k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$k\in Z$，

得 $\omega=-3k-2$，$k\in Z$，

又 $0<\omega<2$，∴当 $k=-1$ 时，$\omega=1$，$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

②若 $\frac{\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点，

则 $\frac{\pi}{12}\times 2\omega-\frac{\pi}{6}=k\pi$，即 $\frac{\pi}{6}\omega=k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$，

得 $\omega=6k+1$，$k\in Z$.

又 $0<\omega<2$，∴当 $k=0$ 时，$\omega=1$，所以，$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

③若 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上单调递增，且 $b-a$ 的最大值为 $\frac{\pi}{2}$.

则 $T=\pi=\frac{2\pi}{2\omega}$，故 $\omega=1$，所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，

得 $\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{6}+k\pi$，$k\in Z$，

令 $k=0$，得 $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5\pi}{6}$，令 $k=-1$，得 $-\frac{2\pi}{3}\le k\le-\frac{\pi}{6}$，

又 $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调递减区间为 $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right]$，$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.

27.【解析】（1）所满足的三个条件是：②③④，

$\because f(x)$ 的周期 $T=\pi$，$\therefore\omega=2$，$\therefore f(x)=\sin(2x+\varphi)+m$，

又过点 $(0,0)$，且 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$，$\therefore\sin\varphi+m=0$，$\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)+m=\frac{3}{2}$，

$\therefore\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)-\sin\varphi=\frac{3}{2}$，$\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi-\frac{1}{2}\sin\varphi-\sin\varphi=\frac{3}{2}$，

$\therefore\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)=\frac{3}{2}$，$\therefore\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{6}$，

又 $\sin\varphi+m=0$，$\therefore-\frac{1}{2}+m=0$，$\therefore m=\frac{1}{2}$，$\therefore f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$.

（2）由 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}=1$，得 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

$\therefore 2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{6}$，或 $2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore x=k\pi+\frac{\pi}{6}$，或 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=1$ 相邻两个交点间的最短距离为 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

28.【解析】解：（1）因为点 A 在函数 $y=f(x)$ 的图象上，所以 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$，

又 $|\varphi|=\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$. 因为点 B 在函数 $y=f(x)$ 的图象上，所以 $\sin\left(\frac{\pi\omega}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

则 $\frac{\pi\omega}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in Z$ 或 $\frac{\pi\omega}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$，$k\in Z$，

则 $\omega=2+8k$，$k\in Z$ 或 $\omega=\frac{10}{3}+8k$，$k\in Z$.

又 $-1<\omega<3$，所以 $\omega=2$，因此 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

（2）由（1）及三角函数图象的平移变换法则得 $g(x)=2\sin\left(2x+2\theta-\frac{\pi}{6}\right)$，

因为 $g(x)$ 为奇函数，所以 $2\theta-\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in Z$，则 $\theta=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in Z$，

因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{12}$，从而 $f(\alpha-\theta)=2\sin\left(2\alpha-2\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{10}{13}$，则

$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{13}$．因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$-\frac{\pi}{3}<2\alpha-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$，

又$0<\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{13}<\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$，所以$0<2\alpha-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}$，

因此$\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{12}{13}$，从而$\cos 2\alpha=\cos\left[\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\frac{12}{13}\times\frac{1}{2}-\frac{5}{13}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{12-5\sqrt{3}}{26}$．

29．【解析】（1）由题意，函数$f(x)=3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}\right)=\frac{3}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=$

$\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

令$x+\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in Z$，解得$x=k\pi-\frac{\pi}{6},k\in Z$，

所以函数$f(x)$的对称中心为$\left(k\pi-\frac{\pi}{6},0\right)(k\in Z)$．

（2）由题意，将函数$f(x)$的图象向左平移φ个单位得到$g(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$，

因为$\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且$\tan\varphi=\frac{3}{4}$，可得$\sin\varphi=\frac{3}{5}$，$\cos\varphi=\frac{4}{5}$，且$\varphi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$，

又因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$x+\varphi+\frac{\pi}{6}\in\left[\varphi+\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}+\varphi\right]$，

当$x+\varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$时，函数$g(x)$取得最大值，最大值为$g_{\max}(x)=\sqrt{3}$，

当$x+\varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+\varphi$时，$g(x)$取得最小值，最小值为$g_{\min}(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=\frac{12-3\sqrt{3}}{10}$，

所以$g(x)\in\left[\frac{12-3\sqrt{3}}{10},\sqrt{3}\right]$.

30．【解析】(1)由函数$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,

因为$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以$2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$，

即$f(x)$的值域为$[-\sqrt{3},2]$；

(2)由题意知，在锐角$\triangle ABC$中　$f(A)=2\sin(2A+\frac{\pi}{3})=1\Rightarrow A=\frac{\pi}{4}$，又$a=1$，

由余弦定理和基本不等式可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\geq 2bc(1-\cos A)$，

有$bc\leq\frac{1}{2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，当且仅当$b=c$时等号成立，

所以$S=\frac{1}{2}bc\sin A\leq\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{4}$,

即$\triangle ABC$的面积S的最大值为：$\frac{\sqrt{2}+1}{4}$.