

三角函数的概念、同角关系、诱导公式

一、单选题

1. 设 $\theta \in \mathbb{R}$, 则 “ $\theta = \frac{\pi}{6}$ ” 是 “ $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ” 的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
2. 若 $\sin \alpha < 0$, 且 $\tan \alpha > 0$, 则 α 是 ()
 A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角
3. 若 α 为第四象限角, 则 ()
 A. $\cos 2\alpha > 0$ B. $\cos 2\alpha < 0$ C. $\sin 2\alpha > 0$ D. $\sin 2\alpha < 0$
4. “ $\cos x = 1$ ” 是 “ $\tan x = 0$ ” 的 ()
 A. 充要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充分不必要条件 D. 既不充分又不必要条件
5. 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, 则 $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) =$
 A. $\frac{3}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$
6. 若 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{5}{13}$, 则 $\sin\left(\frac{7\pi}{10} - \alpha\right) =$ ()
 A. $-\frac{5}{13}$ B. $-\frac{12}{13}$ C. $\frac{12}{13}$ D. $\frac{5}{13}$
7. 已知 α 是第二象限角, 角 β 的终边经过点 $\left(\cos(\pi + \alpha), \sin\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right)\right)$, 则 β 为 ()
 A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角
8. 已知点 $P(\cos 300^\circ, \sin 300^\circ)$ 是角 α 终边上一点, 则 $\sin \alpha - \cos \alpha =$ ()
 A. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$
9. 若 θ 是 $\triangle ABC$ 的一个内角, 且 $\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{8}$, 则 $\sin(2\pi + \theta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ 的值为
 A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
10. 已知 $\frac{\sin \alpha + 3 \cos \alpha}{2 \cos \alpha - \sin \alpha} = 2$, 则 $\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + 1$ 等于
 A. $\frac{11}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{8}{5}$ D. $\frac{7}{5}$

11. 已知 $\tan \theta$ 是方程 $x^2 - 6x + 1 = 0$ 的一根, 则 $\cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{5}$

12. 已知角 α 的终边上一点坐标为 $\left(\sin \frac{5\pi}{6}, \cos \frac{5\pi}{6}\right)$, 则角 α 的最小正值为 ()

- A. $\frac{5\pi}{6}$ B. $\frac{11\pi}{6}$ C. $\frac{5\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

13. 若 θ 为锐角, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$, 则 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} =$ ()

- A. $\frac{12}{25}$ B. $\frac{25}{12}$ C. $\frac{24}{7}$ D. $\frac{7}{24}$

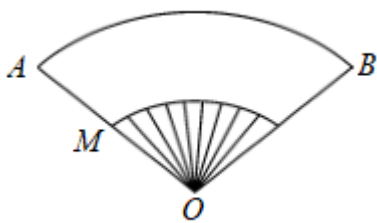
14. 设 $\cos 100^\circ = k$, 则 $\tan 100^\circ =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ B. $-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ C. $\pm \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ D. $\pm \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$

15. 已知角 α 的顶点在坐标原点, 始边在 x 轴的正半轴上, 终边与单位圆交于第二象限的点 P , 且点 P 的纵坐标为 $\frac{1}{2}$, 则 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. “数摺聚清风, 一捻生秋意”是宋朝朱翌描写折扇的诗句, 折扇出人怀袖, 扇面书画, 扇骨雕琢, 是文人雅士的宠物, 所以又有“怀袖雅物”的别号. 如图是折扇的示意图, 其中 $OA = 20\text{cm}$, $\angle AOB = 120^\circ$, M 为 OA 的中点, 则扇面 (图中扇环) 部分的面积是 ()



- A. $50\pi \text{ cm}^2$ B. $100\pi \text{ cm}^2$ C. $150\pi \text{ cm}^2$ D. $200\pi \text{ cm}^2$

二、多选题

17. 下列结论中正确的是 ()

- A. $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$
 B. 若 α 是第三象限角, 则 $\cos \alpha < 0$
 C. 若角 α 的终边过点 $P(3k, 4k) (k \neq 0)$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$
 D. $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$

18. 已知 α 是第三象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 可能是 ()

- A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角

19. 已知角 α 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴非负半轴重合, 终边上的一点为 $P(2m, -m)$ ($m \neq 0$), 则下列各式一定为负值的是 ()

- A. $\sin \alpha \cos \alpha$ B. $\tan \alpha$ C. $\cos \alpha - \sin \alpha$ D. $\cos 2\alpha$

20. 筒车是我国古代发明的一种灌溉工具, 因其经济又环保, 至今还在农业生产中得到使用(图 1), 明朝科学家徐光启在《农政全书》中用图画描绘了筒车的工作原理(图 2).



图1



图2

现有一个半径为 3 米的筒车按逆时针方向每分钟旋转 1 圈, 筒车的轴心距离水面的高度为 2 米, 设筒车上的某个盛水桶 P 到水面的距离为 d (单位: 米)(在水面下则 d 为负数), 若以盛水桶 P 刚浮出水面为初始时刻, 经过 1 秒后, 下列命题正确的是 () (参考数据: $\cos 48^\circ \approx \frac{2}{3}$)

刻, 经过 1 秒后, 下列命题正确的是 () (参考数据: $\cos 48^\circ \approx \frac{2}{3}$)

A. $d = 2 - 3\sin\left(\frac{\pi}{30}t + \theta\right)$, 其中 $\sin \theta = \frac{2}{3}$, 且 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

B. $d = 2 + 3\sin\left(\frac{\pi}{30}t - \theta\right)$, 其中 $\sin \theta = \frac{2}{3}$, 且 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

C. 当 $t \approx 38$ 时, 盛水桶 P 再次进入水中

D. 当 $t \approx 22$ 时, 盛水桶 P 到达最高点

三、填空题

21. $\sin 750^\circ =$ _____.

22. 已知 α 是第二象限角, 且 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\tan \alpha =$ _____.

23. 若 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta \in [0, 2\pi)$, 则 $\theta =$ _____.

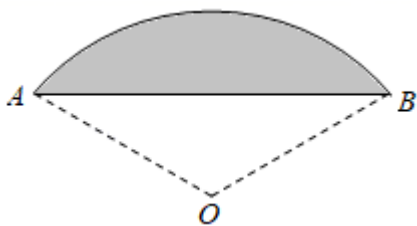
24. 已知角 α 的终边经过点 $(-3, 4)$, 则 $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ 的值是_____.

25. 已知 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{13}$, 且 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\tan(\theta - 9\pi)$ 的值是_____.

26. 已知 α 的终边过点 $(3m, -2)$, 若 $\tan(\pi + \alpha) = \frac{1}{3}$, 则 $m =$ _____.

27. 若点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 与点 $Q(\cos(\theta + \frac{\pi}{6}), \sin(\theta + \frac{\pi}{6}))$ 关于 y 轴对称, 写出一个符合题意的 $\theta =$ _____.

28. 《九章算术》是中国古代的数学名著, 其中《方田》一章给出了弧田面积的计算公式. 如图所示, 弧田是由圆弧 AB 和其所对弦 AB 围成的图形, 若弧田的弧 AB 长为 4π , 弧所在的圆的半径为 6, 则弧田的弦 AB 长是_____, 弧田的面积是_____.



四、解答题

29. 已知角 α 的顶点与原点 O 重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 它的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

(I) 求 $\sin(\alpha + \pi)$ 的值;

(II) 若角 β 满足 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$, 求 $\cos\beta$ 的值.

30. 已知角 α 的终边经过点 $P(3m, -6m)$ ($m \neq 0$).

(1) 求 $\frac{\sin(\alpha + \pi) + \cos(\alpha - \pi)}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$ 的值;

(2) 若 α 是第二象限角, 求 $\sin^2\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin(\pi - \alpha)\cos\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ 的值.

参考答案

1. A 2. C 3. D 4. C 5. C 6. D 7. D 8. D 9. D 10. D 11. C 12. C 13. B 14. A
15. D 16. B 17. ABD 18. BD 19. AB 20. BD

21. $\frac{1}{2}$ 22. $-\frac{3}{4}$ 23. $\frac{11\pi}{6}$ 24. $\frac{4}{5}$ 25. $-\frac{5}{12}$ 26. -2

27. $\frac{5\pi}{12}$ (满足 $\theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 即可) 28. $6\sqrt{3}$ $12\pi - 9\sqrt{3}$

29. 【解析】(I) 由角 α 的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ 得 $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$,

所以 $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

(II) 由角 α 的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ 得 $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$,

由 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$ 得 $\cos(\alpha + \beta) = \pm\frac{12}{13}$.

由 $\beta = (\alpha + \beta) - \alpha$ 得 $\cos\beta = \cos(\alpha + \beta)\cos\alpha + \sin(\alpha + \beta)\sin\alpha$,

所以 $\cos\beta = -\frac{56}{65}$ 或 $\cos\beta = \frac{16}{65}$.

30. 【解析】(1) $\because m \neq 0$,

$\therefore \cos\alpha \neq 0$,

即 $\frac{\sin(\alpha+\pi)+\cos(\alpha-\pi)}{\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})+2\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})} = \frac{-\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha+2\sin\alpha} = \frac{-\tan\alpha-1}{1+2\tan\alpha}$.

又 $\because$ 角 α 的终边经过点 $P(3m, -6m) (m \neq 0)$,

$\therefore \tan\alpha = \frac{-6m}{3m} = -2$,

故 $\frac{\sin(\alpha+\pi)+\cos(\alpha-\pi)}{\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})+2\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})} = \frac{-\tan\alpha-1}{1+2\tan\alpha} = \frac{2-1}{1+2\times(-2)} = -\frac{1}{3}$;

(2) $\because \alpha$ 是第二象限角,

$\therefore m < 0$,

则 $\sin\alpha = \frac{-6m}{\sqrt{(3m)^2+(-6m)^2}} = \frac{-6m}{3\sqrt{5}|m|} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3m}{\sqrt{(3m)^2+(-6m)^2}} = \frac{3m}{3\sqrt{5}|m|} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore \sin^2\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin(\pi - \alpha)\cos\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

$= \cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha$

$= \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$= \frac{-1+2\sqrt{5}}{5}$.

