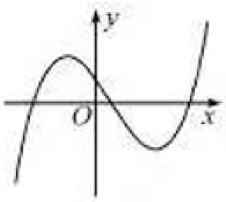
导数及其应用

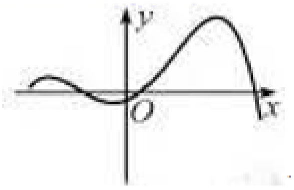
一、单选题

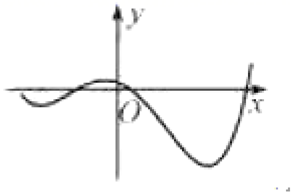
1．若函数 $f\left(x\right)=kx-\ln x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则实数 k 的取值范围是

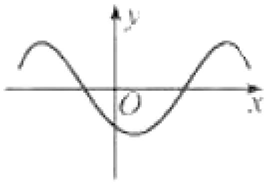
A．$(-\infty,-2]$　　B．$(-\infty,-1]$　　C．$[2,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

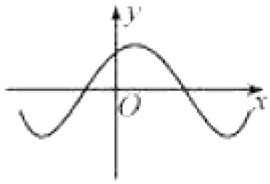
2．函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $y=f(x)$ 的图象可能是



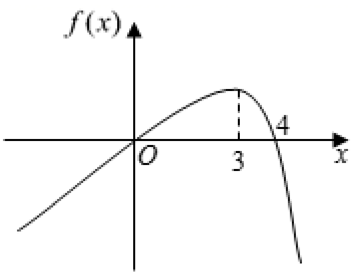
A．

B．

C．

D．

3．设函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若 $f(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)\cdot f'(x)<0$ 的解集为（　　）



A．$(-\infty,0)$　　B．$(0,3)$　　C．$(-\infty,0)\cup(0,3)$　　D．$(-\infty,0)\cup(3,4)$

4．已知函数 $f(x)=2x^3+3mx^2+2nx+m^2$ 在 $x=1$ 处有极小值，且极小值为6，则 $m=$（　　）

A．5　　B．3　　C．-2　　D．-2 或 5

5．设 $a\neq 0$，若 $x=a$ 为函数 $f\left(x\right)=a\left(x-a\right)^2\left(x-b\right)$ 的极大值点，则（　　）

A．$a<b$　　B．$a>b$　　C．$ab<a^2$　　D．$ab>a^2$

6．已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$，若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，则 a 的取值范围是

A．$(2,+\infty)$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(-\infty,-2)$　　D．$(-\infty,-1)$

7．已知非负函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，若对于定义域内的任意 x，均满足 $f'(x)>\dfrac{f(x)}{x}$，则下列式子中不一定正确的是（　　）

A．$f(2)>2f(1)$　　　B．$f(3)>e\cdot f(2)$

C．$f(4)>\dfrac{7}{6}f(3)$　　　D．$f(e)>2e\cdot f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

8．已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+a\ln x$，若对任意两个不等的正数 x_1，x_2，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>4$ 恒成立，则 a 的取值范围为

A．$[4,+\infty)$　　B．(4.?+ ∞)　　C．$(-\infty,4]$　　D．$(-\infty,4)$

9．已知函数 $f(x)=(x-3)e^x+a(2\ln x-x+1)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有两个极值点，且 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(e,+\infty)$　　　B．$(e,2e^2)$

C．$(2e^2,+\infty)$　　　D．$(e,2e^2)\cup(2e^2,+\infty)$

10．已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}-3x+1$，且 $f\left(a^2\right)+f(3a-4)>2$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-4,1)$　　B．$(-3,2)$　　C．$(0,5)$　　D．$(-1,4)$

11．若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-m\mathrm{e}^x-\dfrac{m}{2}x^2$ 有两个极值点，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$\left(\dfrac{\mathrm{e}}{2},+\infty\right)$　　D．$(\mathrm{e},+\infty)$

12．若 $\forall x>0, x\mathrm{e}^x>\ln x+x+a$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,\ln 2)$　　B．$(-\infty,1)$　　C．$(\ln 2,+\infty)$　　D．$(1,+\infty)$

13．已知 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的可导函数，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，若 $xf(x)+x^2f'(x)=e^x$，$f(1)=e$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上（　　）

A．单调递增　　B．单调递减　　C．有极大值　　D．有极小值

二、多选题

14．已知函数 $f(x)=-x^2\ln x$，则（　　）

A．$f(x)\le 0$ 恒成立　　　B．$f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数

C． $f\left(x\right)$在$x=e^{-\frac{1}{2}}$得到极大值$\dfrac{1}{2e}$　　D． $f\left(x\right)$只有一个零点

15．已知函数$f\left(x\right)=x^2-ax-\ln x\left(a\in R\right)$，则下列说法正确的是（　　）

A．若$a=-1$，则$f\left(x\right)$在区间$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$上单调递减

B．若$a=1$，则$f\left(x\right)\geq 0$

C．若$0<a<1$，则$f\left(x\right)$有两个零点

D．若$a>1$，则曲线$y=f\left(x\right)$上存在在相异两点M，N处的切线平行

16．已知定义在$(0,\dfrac{\pi}{2})$上的函数$f(x)$，$f'(x)$是$f(x)$的导函数，且恒有$\cos xf'(x)+\sin xf(x)<0$成立，则（　　）

A．$f(\dfrac{\pi}{6})>\sqrt{2}f(\dfrac{\pi}{4})$　　B．$\sqrt{3}f(\dfrac{\pi}{6})>f(\dfrac{\pi}{3})$

C．$f(\dfrac{\pi}{6})>\sqrt{3}f(\dfrac{\pi}{3})$　　D．$\sqrt{2}f(\dfrac{\pi}{6})>\sqrt{3}f(\dfrac{\pi}{4})$

17．已知$x=1$和$x=3$是函数$f\left(x\right)=ax^3+bx^2-3x+k(a,b\in R)$的两个极值点，且函数$f\left(x\right)$有且仅有两个不同零点，则$k$值为（　　）

A．$-\dfrac{4}{3}$　　B．$\dfrac{4}{3}$　　C．-1　　D．0

三、填空题

18．若$x=-2$是函数$f\left(x\right)=\left(x^2+ax-1\right)e^{x-1}$的极值点，则$f\left(x\right)$的极小值为__________．

19．函数$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2\ln x+x$的极值点是____________.

20．函数$f\left(x\right)=\left|2x-1\right|-2\ln x$的最小值为______.

21．写出一个存在极值的奇函数$f\left(x\right)=$________________________.

22．函数$f(x)=x^2-\dfrac{a}{2}\ln x-\dfrac{x}{2}$（$a\in\mathbf{R}$）在$\left[\dfrac{1}{16},1\right]$内不存在极值点，则$a$的取值范围是________________.

23．设$f'\left(x\right)$是奇函数$f\left(x\right)$的导函数，$f\left(-2\right)=-3$，且对任意$x\in\mathbf{R}$都有$f'\left(x\right)<2$，则$f\left(2\right)=$__________，使得$f\left(e^x\right)<2e^x-1$成立的x的取值范围是__________.

24．已知函数$f(x)=\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{9}{2-\cos x}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，当$x=$_____时，$f(x)$的最小值为_____

四、解答题

25．已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$.证明：

（1）$f(x)$ 存在唯一的极值点；

（2）$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

26．已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.

（1）当 $a=e$ 时，求曲线 $y=f$（x）在点（1，f（1））处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

（2）若 f（x）$\geq$1，求 a 的取值范围.

27．已知函数 $f(x)=(x-1)e^{x}-ax^{2}+b$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）从下面两个条件中选一个，证明：$f(x)$ 只有一个零点

①$\frac{1}{2}<a\leq\frac{e^{2}}{2},b>2a$；

②$0<a<\frac{1}{2},b\leq 2a$.

28．已知函数 $f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2+a}$.

（1）若 $a=0$，求 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处切线方程；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，求 $f(x)$ 的单调区间，以及最大值和最小值.

29．设函数 $f(x)=\ln(a-x)$，已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点.

（1）求 a；

（2）设函数 $g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}$. 证明: $g(x)<1$.

30．已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 a，b 为两个不相等的正数，且 $b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\mathrm{e}$.

参考答案

1．D　2．D　3．D　4．A　5．D　6．C　7．B　8．A　9．C　10．A　11．B　12．B　13．A

14．CD　15．AB　16．CD　17．BD　18．-1　19．1　20．1　21．$\sin x$（不唯一）

22．$\left(-\infty,-\frac{1}{16}\right]\cup[3,+\infty)$．　23．3　$(\ln 2,+\infty)$　24．$\frac{\pi}{3}$　8

25．【解析】（1）由题意可得，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

由 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$，

得 $f'(x)=\ln x+\frac{x-1}{x}-1=\ln x-\frac{1}{x}$，

显然 $f'(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ 单调递增；

又 $f'(1)=-1<0$，$f'(2)=\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{\ln 4-1}{2}>0$，

故存在唯一 x_0，使得 $f'(x_0)=0$；

又当 $x>x_0$ 时，$f'(x_0)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x_0)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；

因此，$f(x)$ 存在唯一的极值点；

（2）由（1）知，$f(x_0)<f(1)=-2$，又 $f(e^2)=e^2-3>0$，

所以 $f(x)=0$ 在 $(\boldsymbol{x_0},+\infty)$ 内存在唯一实根，记作 $x=\alpha$．

由 $1<x_0<\alpha$ 得 $\frac{1}{\alpha}<1<x_0$，

又 $f(\frac{1}{\alpha})=(\frac{1}{\alpha}-1)\ln\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}-1=\frac{f(\alpha)}{\alpha}=0$，

故 $\frac{1}{\alpha}$ 是方程 $f(x)=0$ 在 $(0,x_0)$ 内的唯一实根；

综上，$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

26．【解析】（1）Q $f(x)=e^x-\ln x+1$，$\therefore f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，$\therefore k=f'(1)=e-1$.

Q $f(1)=e+1$，∴切点坐标为$(1,1+e)$,

∴函数 f(x)在点(1,f(1)处的切线方程为 $y-e-1=(e-1)(x-1)$,即 $y=(e-1)x+2$,

$\therefore$ 切线与坐标轴交点坐标分别为 $(0,2),(\frac{-2}{e-1},0)$,

∴所求三角形面积为 $\frac{1}{2}\times 2\times|\frac{-2}{e-1}|=\frac{2}{e-1}$;

（2）解法一：Q $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$,

$\therefore\ f'(x)=ae^{x-1}-\dfrac{1}{x}$，且 $a>0$.

设 $g(x)=f'(x)$,则 $g'(x)=ae^{x-1}+\dfrac{1}{x^2}>0$,

∴$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，即 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

当 $a=1$时， $f'(1)=0$,∴ $f(x)_{min}=f(1)=1$, ∴ $f(x)\geq 1$成立.

当 $a>1$时，$\dfrac{1}{a}<1$，∴$e^{\frac{1}{a}-1}<1$，∴ $f'(\dfrac{1}{a})f'(1)=a(e^{\frac{1}{a}-1}-1)(a-1)<0$,

∴存在唯一 $x_0>0$，使得 $f'(x_0)=ae^{x_0-1}-\dfrac{1}{x_0}=0$，且当 $x\in(0,x_0)$时 $f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$时 $f'(x)>0$，

$\therefore ae^{x_0-1}=\dfrac{1}{x_0}$， $\therefore \ln a+x_0-1=-\ln x_0$，

因此 $f(x)_{\min}=f(x_0)=ae^{x_0-1}-\ln x_0+\ln a$

$=\dfrac{1}{x_0}+\ln a+x_0-1+\ln a\geq 2\ln a-1+2\sqrt{\dfrac{1}{x_0}\cdot x_0}=2\ln a+1>1$,

∴ $f(x)>1$, ∴ $f(x)\geq 1$恒成立;

当 $0<a<1$时， $f(1)=a+\ln a<a<1$, ∴ $f(1)<1$, $f(x)\geq 1$不是恒成立.

综上所述，实数 a 的取值范围是$[1,+\infty)$.

解法二： $f(x)=ae^{x-1}-lnx+lna=e^{lna+x-1}-lnx+lna\geq 1$等价于

$e^{lna+x-1}+lna+x-1\geq lnx+x=e^{lnx}+lnx$,

令 $g(x)=e^x+x$,上述不等式等价于 $g(lna+x-1)\geq g(lnx)$,

显然 $g(x)$为单调增函数，∴又等价于 $lna+x-1\geq lnx$，即 $lna\geq lnx-x+1$，

令 $h(x)=lnx-x+1$,则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$

在$(0,1)$上 $h'(x)>0,h(x)$单调递增；在$(1,+\infty)$上 $h'(x)<0,h(x)$单调递减，

∴ $h(x)_{max}=h(1)=0$,

$lna\geq 0$，即$a\geq 1$，∴a 的取值范围是$[1,+\infty)$.

27.【解析】(1)由函数的解析式可得： $f'(x)=x(e^x-2a)$,

当 $a\leq 0$时，若 $x\in(-\infty,0)$，则 $f'(x)<0$, $f(x)$单调递减，

若 $x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)>0$, $f(x)$单调递增；

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，若 $x\in(-\infty,\ln(2a))$，则 $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增，

若 $x\in(\ln(2a),0)$，则 $f'(x)<0, f(x)$ 单调递减，

若 $x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增；

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)\geq 0, f(x)$ 在 R 上单调递增；

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，若 $x\in(-\infty,0)$，则 $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增，

若 $x\in(0,\ln(2a))$，则 $f'(x)<0, f(x)$ 单调递减，

若 $x\in(\ln(2a),+\infty)$，则 $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增；

(2)若选择条件①：

由于 $\frac{1}{2}<a\leq\frac{e^2}{2}$，故 $1<2a\leq e^2$，则 $b>2a>1, f(0)=b-1>0$，

而 $f(-b)=(-1-b)e^{-b}-ab^2+b<0$，

而函数在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，故函数在区间 $(-\infty,0)$ 上有一个零点.

$$f(\ln(2a))=2a[\ln(2a)-1]-a[\ln(2a)]^2+b$$

$$>2a[\ln(2a)-1]-a[\ln(2a)]^2+2a$$

$$=2a\ln(2a)-a[\ln(2a)]^2$$

$$=a\ln(2a)[2-\ln(2a)],$$

由于 $\frac{1}{2}<a\leq\frac{e^2}{2}$，$1<2a\leq e^2$，故 $a\ln(2a)[2-\ln(2a)]\geq 0$，

结合函数的单调性可知函数在区间 $(0,+\infty)$ 上没有零点.

综上可得，题中的结论成立.

若选择条件②：

由于 $0<a<\frac{1}{2}$，故 $2a<1$，则 $f(0)=b-1\leq 2a-1<0$，

当 $b\geq 0$ 时，$e^2>4, 4a<2$，$f(2)=e^2-4a+b>0$，

而函数在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故函数在区间 $(0,+\infty)$ 上有一个零点.

当$b<0$时，构造函数$H(x)=e^x-x-1$，则$H'(x)=e^x-1$，

当$x\in(-\infty,0)$时，$H'(x)<0,H(x)$单调递减，

当$x\in(0,+\infty)$时，$H'(x)>0,H(x)$单调递增，

注意到$H(0)=0$，故$H(x)\geq 0$恒成立，从而有：$e^x\geq x+1$，此时：

$f(x)=(x-1)e^x-ax^2-b\geq(x-1)(x+1)-ax^2+b=(1-a)x^2+(b-1)$，

当$x>\sqrt{\dfrac{1-b}{1-a}}$时，$(1-a)x^2+(b-1)>0$，

取$x_0=\sqrt{\dfrac{1-b}{1-a}}+1$，则$f(x_0)>0$，

即：$f(0)<0,f\left(\sqrt{\dfrac{1-b}{1-a}}+1\right)>0$，

而函数在区间$(0,+\infty)$上单调递增，故函数在区间$(0,+\infty)$上有一个零点.

$f(\ln(2a))=2a[\ln(2a)-1]-a[\ln(2a)]^2+b$

$\leq 2a[\ln(2a)-1]-a[\ln(2a)]^2+2a$

$=2a\ln(2a)-a[\ln(2a)]^2$

$=a\ln(2a)[2-\ln(2a)]$，

由于$0<a<\dfrac{1}{2}$，$0<2a<1$，故$a\ln(2a)[2-\ln(2a)]<0$，

结合函数的单调性可知函数在区间$(-\infty,0)$上没有零点.

综上可得，题中的结论成立.

28.【解析】（1）当$a=0$时，$f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2}$，则$f'(x)=\dfrac{2(x-3)}{x^3}$，$\therefore f(1)=1$，$f'(1)=-4$，

此时，曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-1=-4(x-1)$，即$4x+y-5=0$；

（2）因为$f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2+a}$，则$f'(x)=\dfrac{-2(x^2+a)-2x(3-2x)}{(x^2+a)^2}=\dfrac{2(x^2-3x-a)}{(x^2+a)^2}$，

由题意可得$f'(-1)=\dfrac{2(4-a)}{(a+1)^2}=0$，解得$a=4$，

故 $f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2+4}$， $f'(x)=\dfrac{2(x+1)(x-4)}{(x^2+4)^2}$，列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,4)$	4	$(4,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

所以，函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,-1)$、$(4,+\infty)$，单调递减区间为 $(-1,4)$.

当 $x<\dfrac{3}{2}$ 时， $f(x)>0$；当 $x>\dfrac{3}{2}$ 时， $f(x)<0$.

所以， $f(x)_{\max}=f(-1)=1$， $f(x)_{\min}=f(4)=-\dfrac{1}{4}$.

29.【解析】（1）由 $f(x)=\ln(a-x)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x-a}$， $y=xf(x)\Rightarrow y'=\ln(a-x)+\dfrac{x}{x-a}$，

又 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点，所以 $y'(0)=\ln a=0$，解得 $a=1$；

（2）由（1）得 $f(x)=\ln(1-x)$， $g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}=\dfrac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}$， $x<1$ 且 $x\neq 0$，

当 $x\in(0,1)$ 时，要证 $g(x)=\dfrac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}<1$， $\because x>0,\ln(1-x)<0$， $\therefore x\ln(1-x)<0$，即证

$x+\ln(1-x)>x\ln(1-x)$，化简得 $x+(1-x)\ln(1-x)>0$；

同理，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，要证 $g(x)=\dfrac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}<1$， $\because x<0,\ln(1-x)>0$， $\therefore x\ln(1-x)<0$，即证

$x+\ln(1-x)>x\ln(1-x)$，化简得 $x+(1-x)\ln(1-x)>0$；

令 $h(x)=x+(1-x)\ln(1-x)$，再令 $t=1-x$，则 $t\in(0,1)\cup(1,+\infty)$， $x=1-t$，

令 $g(t)=1-t+t\ln t$， $g'(t)=-1+\ln t+1=\ln t$，

当 $t\in(0,1)$ 时， $g'(t)<0$， $g(t)$ 单减，假设 $g(1)$ 能取到，则 $g(1)=0$，故 $g(t)>g(1)=0$；

当 $t\in(1,+\infty)$ 时， $g'(t)>0$， $g(t)$ 单增，假设 $g(1)$ 能取到，则 $g(1)=0$，故 $g(t)>g(1)=0$；

综上所述， $g(x)=\dfrac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}<1$ 在 $x\in(-\infty,0)\cup(0,1)$ 恒成立

30.【解析】(1) 函数的定义域为$(0,+\infty)$，

又$f'(x)=1-\ln x-1=-\ln x$，

当$x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$，当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，

故$f(x)$的递增区间为$(0,1)$，递减区间为$(1,+\infty)$.

(2) 因为$b\ln a-a\ln b=a-b$，故$b(\ln a+1)=a(\ln b+1)$，即$\frac{\ln a+1}{a}=\frac{\ln b+1}{b}$，

故$f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{b}\right)$，

设$\frac{1}{a}=x_1,\frac{1}{b}=x_2$，由(1)可知不妨设$0<x_1<1,x_2>1$.

因为$x\in(0,1)$时，$f(x)=x(1-\ln x)>0$，$x\in(e,+\infty)$时，$f(x)=x(1-\ln x)<0$，

故$1<x_2<e$.

先证：$x_1+x_2>2$，

若$x_2\geq 2$，$x_1+x_2>2$必成立.

若$x_2<2$，要证：$x_1+x_2>2$，即证$x_1>2-x_2$，而$0<2-x_2<1$，

故即证$f(x_1)>f(2-x_2)$，即证：$f(x_2)>f(2-x_2)$，其中$1<x_2<2$.

设$g(x)=f(x)-f(2-x),1<x<2$，

则$g'(x)=f'(x)+f'(2-x)=-\ln x-\ln(2-x)=-\ln[x(2-x)]$，

因为$1<x<2$，故$0<x(2-x)<1$，故$-\ln x(2-x)>0$，

所以$g'(x)>0$，故$g(x)$在$(1,2)$为增函数，所以$g(x)>g(1)=0$，

故$f(x)>f(2-x)$，即$f(x_2)>f(2-x_2)$成立，所以$x_1+x_2>2$成立，

综上，$x_1+x_2>2$成立.

设$x_2=tx_1$，则$t>1$，

结合$\frac{\ln a+1}{a}=\frac{\ln b+1}{b}$，$\frac{1}{a}=x_1,\frac{1}{b}=x_2$可得：$x_1(1-\ln x_1)=x_2(1-\ln x_2)$，

即：$1-\ln x_1=t(1-\ln t-\ln x_1)$，故$\ln x_1=\frac{t-1-t\ln t}{t-1}$，

要证：$x_1+x_2<e$，即证$(t+1)x_1<e$，即证$\ln(t+1)+\ln x_1<1$，

即证：$\ln(t+1)+\dfrac{t-1-t\ln t}{t-1}<1$，即证：$(t-1)\ln(t+1)-t\ln t<0$，

令$S(t)=(t-1)\ln(t+1)-t\ln t,t>1$，

则$S'(t)=\ln(t+1)+\dfrac{t-1}{t+1}-1-\ln t=\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)-\dfrac{2}{t+1}$，

先证明一个不等式：$\ln(x+1)\le x$.

设$u(x)=\ln(x+1)-x$，则$u'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=\dfrac{-x}{x+1}$，

当$-1<x<0$时，$u'(x)>0$；当$x>0$时，$u'(x)<0$，

故$u(x)$在$(-1,0)$上为增函数，在$(0,+\infty)$上为减函数，故$u(x)_{max}=u(0)=0$，

故$\ln(x+1)\le x$成立

由上述不等式可得当$t>1$时，$\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)\le\dfrac{1}{t}<\dfrac{2}{t+1}$，故$S'(t)<0$恒成立，

故$S(t)$在$(1,+\infty)$上为减函数，故$S(t)<S(1)=0$，

故$(t-1)\ln(t+1)-t\ln t<0$成立，即$x_1+x_2<e$成立.

综上所述，$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<e$.