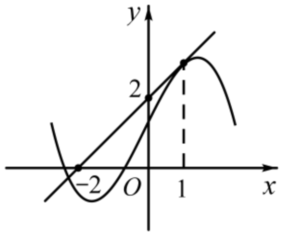
导数的概念、运算、几何意义

一、单选题

1．记函数 $f\left(x\right)$ 的导函数为 $f'\left(x\right)$.若 $f(x)=\mathrm{e}^{x}\sin 2x$，则 $f'\left(0\right)=$（　　）

A．2　　B．1　　C．0　　D．-1

2．曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处的切线如图所示，则 $f'\left(1\right)-f\left(1\right)=$（　　）



A．0　　B．2　　C．-2　　D．-1

3．曲线 y=x^3+11 在点 P（1，12）处的切线与 y 轴交点的纵坐标是（ ）

A．－9　　B．－3　　C．9　　D．15

4．已知 $f\left(x\right)$ 为二次函数，且 $f\left(x\right)=x^2+f'\left(x\right)-1$，则 $f\left(x\right)=$（　　）

A．x^2-2x+1　　B．x^2+2x+1

C．$2x^2-2x+1$　　D．$2x^2+2x-1$

5．若函数 $f(x)=\ln x+2x^2-bx-1$ 的图象上任意一点的切线斜率均大于 0，则实数 b 的取值范围为

A．（－∞，4）　　B．（－∞，4]　　C．（4，＋∞）　　D（0,4）

6．已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+7}{x+1}$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线的倾斜角为 α，则 $\dfrac{\sin\alpha+3\cos\alpha}{3\cos\alpha-\sin\alpha}=$（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．1　　C．2　　D．6

7．已知函数 $f\left(x\right)=x^4+ax$，若 $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f\left(2\triangle x\right)-f\left(-\triangle x\right)}{\triangle x}$=12，则 $a=$（　　）

A．36　　B．12　　C．4　　D．2

8．已知函数 $f(x)=e^x$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线为 l，动点 (a,b) 在直线 l 上，则 2^a+2^{-b} 的最小值是

A．4　　B．2　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{2}$

9．已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(x)=2xf'(e)+\ln x$（其中 e 为自然对数的底数），则 $f'(e)=$

（　　）

A．1　　B．-1　　C．$-e$　　D．$-e^{-1}$

10．已知曲线 $f(x)=e^x$ 在点 $P(0,f(0))$ 处的切线也是曲线 $g(x)=\ln(ax)$ 的一条切线，则 a 的值为（　　）

A．$\frac{e}{3}$　　B．$\frac{e}{2}$　　C．e^2　　D．$\frac{e^3}{3}$

11．已知过点 A（a，0）作曲线 C：y＝x•e^x 的切线有且仅有两条，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．（－∞，－4）∪（0，+∞）　　B．（0，+∞）

C．（－∞，－1）∪（1，+∞）　　D．（－∞，－1）

12．若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的两条切线，则（　　）

A．$\mathrm{e}^b<a$　　B．$\mathrm{e}^a<b$

C．$0<a<\mathrm{e}^b$　　D．$0<b<\mathrm{e}^a$

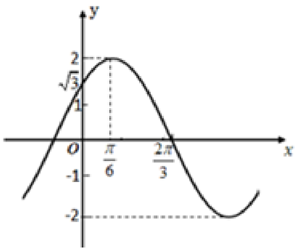
13．已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)\left(A>0,\quad \omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象如图所示，令 $g(x)=f(x)+f'(x)$，则下列关于函数 $g(x)$ 的说法中正确的是（　　）

A．若函数 $h(x)=g(x)+2$ 的两个不同零点分别为 x_1,x_2，则 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$

B．函数 $g(x)$ 的最大值为 2

C．函数 $g(x)$ 的图象上存在点 P，使得在 P 点处的切线与直线 $y=-3x+1$ 平行

D．函数 $g(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathrm{Z})$



14．已知函数 $f(x)$ 及其导数 $f'(x)$，若存在 x_0 使得 $f(x_0)=f'(x_0)$，则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个“巧值点”，给出下列四个函数：① $f(x)=x^2$；② $f(x)=e^{-x}$；③ $f(x)=\ln x$；④ $f(x)=\tan x$，其中有“巧值点”的函数是（　　）

A．①②　　B．①③　　C．①③④　　D．②④

二、多选题

15．若函数 $f(x)$ 的图象上存在两个不同的点 A、B，使得曲线 $y=f(x)$ 在这两点处的切线重合，称函数 $f(x)$ 具有 T 性质.下列函数中具有 T 性质的有（　　）

A．$y=e^x-x$　　B．$y=x^4-x^2$　　C．$y=x^3$　　D．$y=x+\sin x$

16．已知过点 A（a，0）作曲线 $C:y=\dfrac{x}{e^{x}}$ 的切线有且仅有两条，则实数 a 的值可以是（　　）

A．－2　　　　B．4　　　　C．0　　　　D．6

17．已知函数 $f(x)=e^{x}$，$g(x)=\ln x+1$ 的图象与直线 $y=m$ 分别交于 A、B 两点，则（ ）．

A．$m>0$

B．$\forall m>0$，曲线 $y=f(x)$ 在 A 处的切线总与曲线 $y=g(x)$ 在 B 处的切线相交

C．$|AB|$ 的最小值为 1

D．$\exists\, m>0$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线也是曲线 $y=g(x)$ 的切线

三、填空题

18．已知 $f(x)$ 为偶函数，当 $x\le 0$ 时，$f(x)=e^{-x-1}-x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程是____.

19．设函数 $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x+a}$．若 $f'(1)=\dfrac{e}{4}$，则 a=__________.

20．在平面直角坐标系 xOy 中，P 是曲线 $y=x+\dfrac{4}{x}(x>0)$ 上的一个动点，则点 P 到直线 $x+y=0$ 的距离的最小值是_____.

21．在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在曲线 $y=\ln x$ 上，且该曲线在点 A 处的切线经过点（-e，-1)(e 为自然对数的底数)，则点 A 的坐标是____.

22．阅读材料：

求函数 $y=e^{x}$ 的导函数

解：$\because y=e^{x}$

$\therefore x=\ln y$

$\therefore (x)'=(\ln y)'$

$\therefore 1=\dfrac{1}{y}\cdot y'$

$\therefore y'=y=e^{x}$

借助上述思路，曲线 $y=(2x-1)^{x+1}$，$x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为__________.

23．曲线 $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1,-3)$ 处的切线方程为__________.

24．写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x)$:_______.

① $f\left(x_1x_2\right)=f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)$；②当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；③ $f'(x)$ 是奇函数.

25．我国魏晋时期的科学家刘徽创立了“割圆术”，实施“以直代曲”的近似计算，用正 n 边形进行“内外夹逼”的办法求出了圆周率 π 的精度较高的近似值，这是我国最优秀的传统科学文化之一．借用“以直代曲”的近似计算方法，在切点附近，可以用函数图象的切线近似代替在切点附近的曲线来近似计算．设 $f\left(x\right)=e^{x^2}$，则 $f'\left(x\right)=$________，其在点 $\left(0,1\right)$ 处的切线方程为________.

26．丹麦数学家琴生是 19 世纪对数学分析做出卓越贡献的巨人，特别是在函数的凹凸性与不等式方面留下了很多宝贵的成果.定义：函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(a,b\right)$ 上的导函数为 $f'\left(x\right)$，$f'\left(x\right)$ 在 $\left(a,b\right)$ 上的导函数为 $f''\left(x\right)$，若在 $\left(a,b\right)$ 上 $f''\left(x\right)<0$ 恒成立，则称函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(a,b\right)$ 上的“严格凸函数”，称区间 $\left(a,b\right)$ 为函数 $f\left(x\right)$ 的“严格凸区间”.则下列正确命题的序号为______.①函数 $f\left(x\right)=-x^3+3x^2+2$ 在 $(1,+\infty)$ 上为“严格凸函数”；②函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的“严格凸区间”为 $\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right)$；③函数 $f\left(x\right)=e^x-\dfrac{m}{2}x^2$ 在 $\left(1,4\right)$ 为“严格凸函数”，则 m 的取值范围为 $\left[e,+\infty\right)$.

27．已知函数 $f\left(x\right)=x^2-4x+\left(x-2\right)\cos x-\sin x$ 在 $x=a$ 处取得最小值 m，函数 $g\left(x\right)=4\sqrt{x}$，则 $m=$________，曲线 $y=g\left(x\right)$ 在点 $\left(a,g\left(a\right)\right)$ 处的切线的斜率为________.

四、解答题

28．已知曲线 $f(x)=2x^3+1$.

（1）求曲线在点 $P(1，3)$处的切线方程;

（2）求曲线过点 $P(1，3)$的切线方程.

29．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}\cos x-x$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值．

30．已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{ax^{2}+x-1}{e^{x}}$．

（1）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,-1\right)$ 处的切线方程；

（2）证明：当 $a\geq 1$ 时，$f\left(x\right)+e\geq 0$．

参考答案

1．A 2．C 3．C 4．B 5．A 6．A 7．C 8．D 9．D 10．C 11．A 12．D 13．A 14．B 15．BD 16．AD 17．ACD

18． $y=2x$ 19．1 20．4． 21．(e, 1)． 22． $y=4x-3$ 23． $5x-y+2=0$

24． $f(x)=x^4$（答案不唯一， $f(x)=x^{2n}\left(n\in N^*\right)$ 均满足） 25． $2xe^{x^2}$ $y=1$

26．①② 27． $-4-\sin 2$ $\sqrt{2}$

28.【解析】(1) $f'(x)=6x^2$，则切线的斜率为 $f'(1)=6$，

所以曲线在点 P 处的切线方程为 $y-3=6(x-1)$，

即 $6x-y-3=0$.

（2）设过点 $P(1,3)$ 的切线与曲线 $y=f(x)$ 相切于点 $R\left(x_0,2x_0^3+1\right)$，

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 R 处切线斜率为 $f'(x_0)=6x_0^2$，

故切线方程为 $y-2x_0^3-1=6x_0^2(x-x_0)$，

又因为切线过点 $(1,3)$， $\therefore 2-2x_0^3=6x_0^2(1-x_0)$，

解得 $x_0=1$ 或 $x_0=-\dfrac{1}{2}$，

故切点 R 分别为 $(1,3)$ 和 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$，

所以过点 P 的切线方程为 $y-3=6(x-1)$ 或 $y-\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$，

所以过点 Q 的切线方程为： $6x-y-3=0$ 和 $3x-2y+3=0$.

29.【解析】(Ⅰ) 因为 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x-x$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)-1, f'(0)=0$.

又因为 $f(0)=1$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$.

（Ⅱ）设 $h(x)=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)-1$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x-\sin x-\cos x)=-2\mathrm{e}^x\sin x$.

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时， $h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减.

所以对任意 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 有 $h(x)<h(0)=0$，即 $f'(x)<0$.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减.

因此 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $f\left(0\right)=1$，最小值为 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$.

30.【解析】(1) $f'\left(x\right)=\dfrac{-ax^2+\left(2a-1\right)x+2}{e^x}$， $f'\left(0\right)=2$.

因此曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,-1\right)$ 处的切线方程是 $2x-y-1=0$.

(2) 当 $a\geq 1$ 时， $f\left(x\right)+e\geq\left(x^2+x-1+e^{x+1}\right)e^{-x}$.

令 $g\left(x\right)=x^2+x-1+e^{x+1}$，则 $g'\left(x\right)=2x+1+e^{x+1}$， $g''\left(x\right)=2+e^{x+1}>0$

当 $x<-1$ 时， $g'\left(x\right)<g'\left(-1\right)=0$， $g\left(x\right)$ 单调递减；当 $x>-1$ 时， $g'\left(x\right)>g'\left(-1\right)=0$， $g\left(x\right)$ 单调递增；

所以 $g\left(x\right)\geq g\left(-1\right)=0$. 因此 $f\left(x\right)+e\geq 0$.