指数函数、对数函数、幂函数

一、单选题

1．若函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x}, & x<1,\\ -\log_{2}x, & x\geq 1,\end{cases}$ 则函数 $f(x)$ 的值域是（　　）

A．$(-\infty,2)$　　B．$(-\infty,2]$　　C．$[0,+\infty)$　　D．$(-\infty,0)\cup(0,2)$

2．设 $a\log_{3}4=2$，则 $4^{-a}=$（　　）

A．$\dfrac{1}{16}$　　B．$\dfrac{1}{9}$　　C．$\dfrac{1}{8}$　　D．$\dfrac{1}{6}$

3．设 $x\in \mathbf{R}$，若“$\log_{2}\left(x-1\right)<1$”是“$x>2m^{2}-1$”的充分不必要条件，则实数 m 的取值范围是

A．$\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$　　B．$\left(-1,1\right)$

C．$\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$　　D．$\left[-1,1\right]$

4．已知 $a=\log_{5}2$，$b=\log_{8}3$，$c=\dfrac{1}{2}$，则下列判断正确的是（　　）

A．$c<b<a$　　B．$b<a<c$　　C．$a<c<b$　　D．$a<b<c$

5．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{2}(2-x), & x<1\\ e^{x}, & x\geq 1\end{cases}$ 则 $f(-2)+f(\ln 4)=$（　　）

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

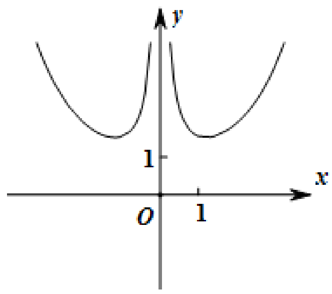
6．若 $2^{a}=5^{b}=10$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=$（　　）

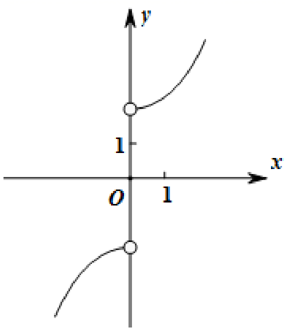
A．-1　　B．$\lg 7$　　C．1　　D．$\log_{7}10$

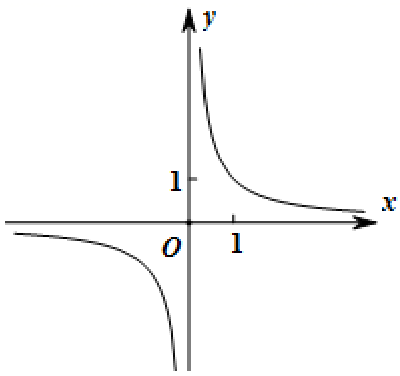
7．已知函数 $f(x)=\lg(x^{2}-4x-5)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是（　　）

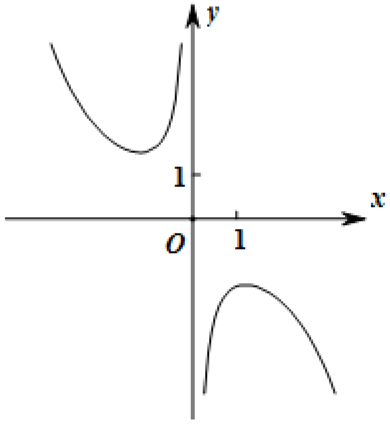
A．$(2,+\infty)$　　B．$[2,+\infty)$　　C．$(5,+\infty)$　　D．$[5,+\infty)$

8．函数 $f\left(x\right)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{|x|}$ 的图象大致为（　　）

A．


B．


C. 

D. 

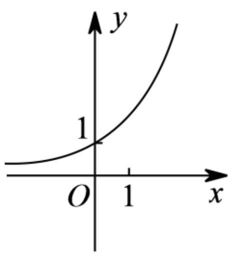
9．青少年视力是社会普遍关注的问题，视力情况可借助视力表测量．通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据，五分记录法的数据 L 和小数记录表的数据 V 的满足 $L=5+\lg V$．已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9，则其视力的小数记录法的数据为（　　）（$\sqrt[10]{10}\approx 1.259$）

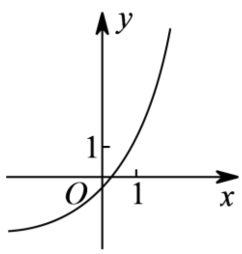
A．1.5　　B．1.2　　C．0.8　　D．0.6

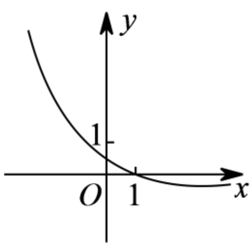
10．函数 $y=\log_a(x+4)+2$（$a>0$，且 $a\neq 1$）的图象恒过定点 A，且点 A 在角 θ 的终边上，则 $\sin 2\theta=$

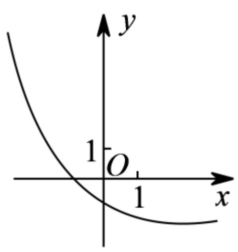
A．$-\frac{5}{13}$　　B．$\frac{5}{13}$　　C．$-\frac{12}{13}$　　D．$\frac{12}{13}$

11．函数 $y=a^x-\frac{1}{a}(a>0,a\neq 1)$ 的图像可能是（　　）．

A. 
①

B. 
②

C. 
③

D. 
④

12．已知 x，y 为正实数，则（　　）

A．$2^{\lg x+\lg y}=2^{\lg x}+2^{\lg y}$　　B．$2^{\lg(x+y)}=2^{\lg x}\cdot 2^{\lg y}$

C．$2^{\lg x\cdot\lg y}=2^{\lg x}+2^{\lg y}$　　D．$2^{\lg(xy)}=2^{\lg x}\cdot 2^{\lg y}$

13．已知某种药物在病人体内的含量在 1200mg 以上时才会对某种病情起疗效，现给某病人注射该药物 2000mg，假设药物在病人体内的含量以每小时 25%的速度递减，为了保持药物疗效，则经过（　　）小时后须再次向病人体内补充这种药物．（已知$\lg 2 \approx 0.30$，$\lg 3 \approx 0.48$，结果精确到 0.1h）

A．1.8　　B．1.9　　C．2.1　　D．2.2

14．已知函数$f(x)=\log_a(x^2+x-1)$在区间$[1,2]$上的最大值比最小值大 2，则a的值为

A．2　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$\sqrt{5}$或$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

15．设函数$f(x)=\begin{cases}|2^x-1|, & x \leq 2 \\ -x+5, & x>2\end{cases}$，若互不相等的实数$a,b,c$满足$f(a)=f(b)=f(c)$，则$2^a+2^b+2^c$的取值范围是（　　）

A．$(16,32)$　　B．$(18,34)$　　C．$(17,35)$　　D．$(6,7)$

16．设函数$f(x)$是定义在R上周期为2的函数，且对任意的实数x，恒$f(x)-f(-x)=0$，当$x\in[-1,0]$时，$f(x)=x^2$．若$g(x)=f(x)-\log_a x$在$x\in(0,+\infty)$上有且仅有三个零点，则a的取值范围为

A．$[3,5]$　　B．$[4,6]$　　C．$(3,5)$　　D．$(4,6)$

17．设$f(x)$是定义在R上的偶函数，且$f(x+2)=f(-x)$，当$x\in[-1,0]$时，$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1$，若在区间$(-1,6)$内关于$x$的方程$f(x)-\log_a(x+2)=0$（$a>0$且$a\neq 1$）有且只有 5 个不同的实数根，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$\left(\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{5}\right)$　　B．$(5,7)$　　C．$(1,5)$　　D．$(5,+\infty)$

二、多选题

18．下列说法正确的是（　　）

A．若幂函数的图象经过点$(\frac{1}{8},2)$，则解析式为$y=x^{-3}$

B．若函数$f(x)=x^{-\frac{4}{5}}$，则$f(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递减

C．幂函数$y=x^{\alpha}$（$\alpha>0$）始终经过点$(0,0)$和$(1,1)$

D．若函数$f(x)=\sqrt{x}$，则对于任意的x_1，$x_2\in[0,+\infty)$有$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leq f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

19．已知$x_1+\log_3^{x_1}=0$，$x_2+\log_2^{x_2}=0$，则（　　）

A． $0<x_2<x_1<1$　　B． $0<x_1<x_2<1$

C． $x_2\lg x_1-x_1\lg x_2<0$　　D． $x_2\lg x_1-x_1\lg x_2>0$

20．已知 e 为自然对数的底数，则下列判断正确的是（　　）

A．$3^{e-2\pi}<3\pi^{e-2}$　　B．$\pi\log_3 e>3\log_\pi e$

C．$\log_\pi e>\dfrac{e}{\pi}$　　D．$\pi^e<e^\pi$

21．函数 $f(x)=\ln\left(e^x+1\right)-\ln\left(e^x-1\right)$，下列说法正确的是（　　）

A． $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$

B． $f(x)$ 在定义域内单调递增

C．不等式 $f(m-1)>f(2m)$ 的解集为 $(-1,+\infty)$

D．函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称

22．若直线 $y=2a$ 与函数 $y=\left|a^x-1\right|$（$a>0$，且 $a\neq1$）的图象有两个公共点，则 a 的取值可以是（　　）

A． $\dfrac{1}{4}$　　B． $\dfrac{1}{3}$　　C． $\dfrac{1}{2}$　　D． 2

三、填空题

23．已知函数 $f(x)$ 满足①定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；②值域为 R；③ $f(-x)=f(x)$．写出一个满足上述条件的函数 $f(x)=$______.

24．已知函数 $f(x)=\log_2\left(x^2+a\right)$，若 $f(3)=1$，则 $a=$________.

25．若幂函数 $f(x)=\left(m^2-5m+7\right)x^m$ 在 R 上为增函数, 则 $\log_m\sqrt{27}+2\lg5+\lg4+m^{\log_m\frac{1}{2}}=$____________．

26．给出下列 4 个命题，其中正确命题的序号____________.

① $\log_{0.5}3<2^{\frac{1}{3}}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0.2}$；

②函数 $f(x)=\log_4x-2\sin x$ 有 5 个零点；

③函数 $f(x)=\lg\dfrac{x}{4-x}$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称。

④已知 $a>0,b>0$，函数 $y=2ae^x+b$ 的图象过点 $(0,1)$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值是 $4\sqrt{2}$.

27．已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象过点 $\left(3,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，则此函数的解析式为________；在区间________上单调递减.

28．十六、十七世纪之交，随着天文、航海、工程、贸易及军事的发展，改进数字计算方法成了当务之急，约翰·纳皮尔正是在研究天文学的过程中，为了简化其中的计算而发明了对数，后来天才数学家欧拉发现了对数与指数的关系，即 $a^b=N \Leftrightarrow b=\log_a N$．现已知 $2^a=6,\ \ 3^b=36$，则 $\dfrac{4^a}{9^b}=$________，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=$________

四、解答题

29．已知函数 $f\left(x\right)=\log_3\left(x^2-2ax+a\right)$的定义域是 R.

（1）求实数 a 的取值范围;

（2）解关于 x 的不等式 $a^{x^2-4x-14}>\dfrac{1}{a^2}$.

30．已知函数 $f(x)=a\cdot 2^x+b\cdot 3^x$，其中常数 a,b 满足 $ab\neq 0$.

（1）若 $ab>0$，判断函数 $f(x)$ 的单调性;

（2）若 $ab<0$，求 $f(x+1)>f(x)$ 时 x 的取值范围.

参考答案

1．A　2．B　3．D　4．C　5．C　6．C　7．D　8．B　9．C　10．C　11．D　12．D　13．A　14．D

15．B　16．C　17．B　18．CD　19．BC　20．BCD　21．AD　22．AB

23．$f(x)=\ln|x|$（答案为唯一）　24．-7　25．　4　26．②③　27．$f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$　　$(0,+\infty)$

28．$\frac{1}{36}$　　1

29．【解析】(1）因为函数 $f(x)=\log_3\left(x^2-2ax+a\right)$的定义域是 R，

所以 $x^2-2ax+a>0$ 恒成立，

则 $\Delta=4a^2-4a<0$，解得 $0<a<1$，a 的取值范围为 $(0,1)$．

（2）$a^{x^2-4x-14}>\frac{1}{a^2}$，即 $a^{x^2-4x-14}>a^{-2}$，

因为 $a\in(0,1)$，所以 $x^2-4x-14<-2$，即 $x^2-4x-12<0$，解得 $-2<x<6$，

故不等式 $a^{x^2-4x-14}>\frac{1}{a^2}$ 的解集为 $(-2,6)$．

30．【解析】(1）当 $a>0,b>0$ 时，任意 $x_1,x_2\in R,x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=a(2^{x_1}-2^{x_2})+b(3^{x_1}-3^{x_2})$

$\because 2^{x_1}\left\langle 2^{x_2},a\right\rangle 0\Rightarrow a(2^{x_1}-2^{x_2})<0$，$3^{x_1}\left\langle 3^{x_2},b\right\rangle 0\Rightarrow b(3^{x_1}-3^{x_2})<0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，函数 $f(x)$ 在 R 上是增函数，

当 $a<0,b<0$ 时，同理，函数 $f(x)$ 在 R 上是减函数；

（2）$f(x+1)-f(x)=a\cdot 2^x+2b\cdot 3^x>0$

当 $a<0,b>0$ 时，$(\frac{3}{2})^x>-\frac{a}{2b}$，则 $x>\log_{1.5}(-\frac{a}{2b})$；

当 $a>0,b<0$ 时，$(\frac{3}{2})^x<-\frac{a}{2b}$，则 $x<\log_{1.5}(-\frac{a}{2b})$．