一次函数、二次函数、函数与方程

一、单选题

1．已知 a，b，$c\in R$，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$.若 $f(0)=f$（4）$>f$（1），则（　　）

A．$a>0$，$4a+b=0$　　B．$a<0$，$4a+b=0$

C．$a>0$，$2a+b=0$　　D．$a<0$，$2a+b=0$

2．“函数 $f(x)=-x^2-2(a+1)x+3$ 在区间 $(-\infty,2]$ 上单调递增”是“$a\le -4$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．若函数 $y=ax$ 与 $y=-\dfrac{b}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上都是减函数，则 $y=ax^2+bx$ 在 $(0,+\infty)$ 上（　　）

A．是增函数　　B．是减函数

C．先减再增　　D．先增再减

4．已知 $f(x)=ax^2+bx+1$，有下列四个命题：

p_1：$x=\dfrac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的零点；

p_2：$x=2$ 是 $f(x)$ 的零点；

p_3：$f(x)$ 的两个零点之和为 1

p_4：$f(x)$ 有两个异号零点

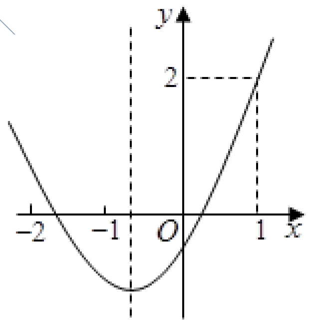
若只有一个假命题，则该命题是（　）

A．p_1　　B．p_2　　C．p_3　　D．p_4

5．设 $b\in R$，若函数 $f(x)=4^x-2^{x+1}+b$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值是 3，则其在 $[-1,1]$ 上的最小值是

A．2　　B．1　　C．0　　D．-1

6．已知过点 $(1,2)$ 的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图，给出下列论断：①$c>0$，②$a-b+c<0$，③$b<1$，④$a>\dfrac{1}{2}$.其中正确论断是（　）



A．②④　　B．①③　　C．②③　　D．②③④

7．已知函数 $f(x)=x^2+ax+b(a<0,b>0)$ 有两个不同的零点 x_1，x_2，-2 和 x_1，x_2 三个数适当排序后既可成为等差数列，也可成为等比数列，则函数 $f(x)$ 的解析式为

A．$f(x)=x^2-5x-4$　　B．$f(x)=x^2+5x+4$

C．$f(x)=x^2-5x+4$　　D．$f(x)=x^2+5x-4$

8．定义在 $x\in[0,2]$ 的单调函数 $f(x)$ 对任意 $x\in[0,1]$ 恒有 $f(1-x)+f(1+x)=0$，且 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=x^2-mx+2m-1$，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$[0,2]$　　B．$(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$　　C．$(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$　　D．R

9．若曲线 $y=\begin{cases}2^x-4, x>a\\(x-1)(x-3), x\le a\end{cases}$ 与 x 轴有且只有 2 个交点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$1\le a\le 2$　　B．$a\ge 3$

C．$1\le a\le 2$ 或 $a\ge 3$　　D．$1\le a<2$ 或 $a\ge 3$

10．已知函数 $f(x)=e^x+x, g(x)=\log_{0.3}x-x, h(x)=x^3+x$，它们的零点 a,b,c 的大小顺序为（　　）

A．$b>a>c$　　B．$b>c>a$　　C．$a>b>c$　　D．$a>c>b$

11．已知 $f(x)=m(x-2m)(x+m+3)$，$g(x)=4^x-2$，若对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)<0$ 或 $g(x)<0$，则 m 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\frac{7}{2},+\infty\right)$　　B．$\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$　　C．$\left(-\frac{7}{2},0\right)$　　D．$\left(0,\frac{1}{4}\right)$

12．已知 $f(x)$ 为偶函数，对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=f(2-x)$ 恒成立，且当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)=2-2x^2$．设函数 $g(x)=f(x)-\log_3 x$，则 $g(x)$ 的零点的个数为（　　）

A．6　　B．7　　C．8　　D．9

二、多选题

13．关于 x 的方程 $\left(x^2-2x\right)^2-2\left(2x-x^2\right)+k=0$，下列命题正确的有（　　）

A．存在实数 k，使得方程无实根

B．存在实数 k，使得方程恰有 2 个不同的实根

C．存在实数 k，使得方程恰有 3 个不同的实根

D．存在实数 k，使得方程恰有 4 个不同的实根

14．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-x+a, x\le a,\\ x^2+x-a, x>a\end{cases}$(即 $f\left(x\right)=x^2+|x-a|$，$x\in\mathbf{R}$)则（　　）

A．当 $a=0$ 时，$f\left(x\right)$ 是偶函数　　　　B．$f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上是增函数

C．设 $f\left(x\right)$ 最小值为 N，则 $N\le\dfrac{1}{4}$　　　　D．方程 $f\left(x\right)=1$ 可能有 2 个解

15．在下列区间中，函数 $f\left(x\right)=e^x-4x-3$ 一定存在零点的区间为（　　）

A．$\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$　　B．$(-e,3)$　　C．$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　D．$\left(-1,\dfrac{1}{e}\right)$

16．已知 $c>a$，若函数 $f(x)=x^2-2x+b$ 有两个零点 c,d，$g(x)=|\ln x|-d$ 有两个零点 a,b，则下列选项正确的有（　　）

A．$d<b<1$　　B．$a+b>2cd$　　C．$ad>bc$　　D．$\log_a c>\log_b d$

17．已知 $f\left(x\right)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$f\left(1-x\right)=-f\left(1+x\right)$，且当 $x\in\left[0,1\right]$ 时，$f\left(x\right)=x^2+x-2$，则下列说法正确的是（　　）

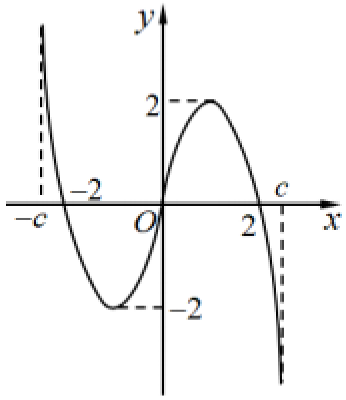
A．$f\left(x\right)$ 是以 4 为周期的周期函数

B．$f\left(2018\right)+f\left(2021\right)=-2$

C．函数 $y=\log_2\left(x+1\right)$ 的图象与函数 $f\left(x\right)$ 的图象有且仅有 3 个交点

D．当 $x\in\left[3,4\right]$ 时，$f\left(x\right)=x^2-9x+18$

18．$f(x)$ 是定义在区间 $[-c,c]$ 上的奇函数，其图像如图所示．令 $g(x)=af(x)+b$，则下列关于函数 $g(x)$ 的叙述正确的是（　　）



A．若 $a<0$，则函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称

B．若 $a=-1,\quad -2<b<0$，则方程 $g(x)=0$ 有大于 2 的实根

C．若 $a\neq 0,\quad b=2$，则方程 $g(x)=0$ 有两个实根

D．若 $a\geq 1,\quad -2<b<2$，则方程 $g(x)=0$ 有三个实根

三、填空题

19．二次函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象经过坐标原点，若其导函数为 $f'(x)=3x-\frac{1}{2}$，则 $f\left(x\right)=$________.

20．设 $b\in R$，若函数 $f\left(x\right)=4^{x}-2^{x+1}+b$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值是 3，则 $f\left(x\right)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值是____________.

21．已知 $\lambda\in$R，函数 $f(x)=\begin{cases}x-4, x\geq\lambda\\ x^2-4x+3, x<\lambda\end{cases}$，当 $\lambda=2$ 时，不等式 $f(x)<0$ 的解集是___________．若函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点，则 λ 的取值范围是___________.

22．若对任意 $t\in[1,2]$，函数 $f(x)=t^2x^2-(t+1)x+a$ 总有零点，则实数 a 的取值范围是__________.

23．已知函数 $f(x)=\left|x^2-ax+2\right|+a$，$a\in\mathbf{R}$，若 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值是 3，则 a 的取值范围是______.

24．函数 $y=\frac{1}{x^2-ax-a}$ 在 $\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是_________.

25．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x-1, & x\leq 0\\ -x^2+2x, & x>0\end{cases}$，若 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，且 $x_1\neq x_2$，则 $\left|x_1-x_2\right|$ 的最大值为________.

26．已知 $a>0$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2ax+a, & x\leq 0,\\ -x^2+2ax-2a, & x>0.\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=ax$ 恰有 2 个互异的实数解，则 a 的取值范围是______________.

四、双空题

27.《算法统宗》中有如下问题：“哑子来买肉，难言钱数目，一斤少三十，八两多十八，试问能算者，合与多少肉”，意思是一个哑子来买肉，说不出钱的数目，买一斤(16 两)还差 30 文钱，买八两多十八文钱，求肉数和肉价，则该问题中，肉价是每两_____文，他所带钱共可买肉_____两.

五、解答题

28．已知函数 $f(x)=x^2+(2a-1)x-3$.

（1）当 $a=2$， $x\in[-2,3]$时，求函数 $f(x)$ 的值域.

（2）若函数 $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围.

29．已知函数 $f(x)=(a+1)x^2+(a-1)x+(a^2-1)$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（1）当 $f(x)$ 是奇函数时，求实数 a 的值；

（2）当函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增时，求实数 a 的取值范围.

30．已知函数 $f(x)=\begin{cases} a(x+1)e^x, x\le 0 \\ x^2-ax+\dfrac{1}{2}, x>0 \end{cases}$.

（1）若 $a=2$，求 $f(x)$ 的最小值；

（2）若 $f(x)$ 恰好有三个零点，求实数 a 的取值范围.

参考答案

1．A　2．B　3．B　4．A　5．A　6．A　7．C　8．B　9．D　10．B　11．C　12．C

13．AB　14．ABD　15．ABD　16．AB　17．ACD　18．BD

19．$\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x$　20．2　21．(1, 4)　$(1,3]\cup(4,+\infty)$　22．$\left(-\infty,\frac{9}{16}\right]$　23．$(-\infty,0]$　24．$\left[-1,\frac{1}{2}\right)$

25．$\frac{13}{4}$　26．$(4,8)$　27．6　11

28.【解析】（1）当$a=2$时，$f(x)=x^2+3x-3$，对称轴为直线$x=-\frac{3}{2}\in[-2,3]$，

而$-\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$，故$f(x)_{\max}=f(3)=15, f(x)_{\min}=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{21}{4}$，

故函数$f(x)$的值域为$\left[-\frac{21}{4},15\right]$.

（2）因为函数$f(x)$在$[-1,3]$上单调递增，故$-\frac{2a-1}{2}\le-1$，故$a\ge\frac{3}{2}$.

29.【解析】（1）因为函数$f(x)$是奇函数，所以$f(0)=a^2-1=0$，解得：$a=\pm1$，

当$a=1$时，$f(x)=2x^2$，函数是偶函数，不成立，

当$a=-1$时，$f(x)=-2x$，函数是奇函数，成立，

则$a=-1$；

（2）当$a=-1$时，$f(x)=-2x$，函数在定义域上单调递减，不满足条件，

当$a\ne-1$时，若函数在$[2,+\infty)$单调递增时，满足$\begin{cases}a+1>0\\-\frac{a-1}{2(a+1)}\le2\end{cases}$，解得$a\ge-\frac{3}{5}$.

30.【解析】（1）$a=2$时，$f(x)=\begin{cases}2(x+1)e^x, x\le0\\x^2-2x+\frac{1}{2}, x>0\end{cases}$.

当$x<0$时，$f'(x)=2(x+2)e^x$，

所以$f(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递减，在$(-2,0)$上单调递增，

此时$f(x)$的极小值为$f(-2)=-\frac{2}{e^2}$；

当$x>0$时，$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

此时$f(x)$的极小值为$f(1)=-\frac{1}{2}$；

因为$-\frac{2}{e^2}>-\frac{1}{2}$，所以$f\left(x\right)$的最小值为$-\frac{1}{2}$；

（2）显然$a\neq 0$；

因为$x\leq 0$时，$f\left(x\right)$有且只有一个零点-1，

所以原命题等价于$f\left(x\right)$在$(0,+\infty)$上有两个零点.

所以$\begin{cases}a^2-2>0\\a>0\end{cases}$，解得$a>\sqrt{2}$，

故实数a的取值范围是$(\sqrt{2},+\infty)$.