

函数的概念、图像与性质

一、单选题

1. 下列函数中, 值域为 $[0, +\infty)$ 的是 ()

- A. $y = 2^x$ B. $y = x^{\frac{1}{2}}$ C. $y = \tan x$ D. $y = \cos x$

2. 下列函数中是增函数的为 ()

- A. $f(x) = -x$ B. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ C. $f(x) = x^2$ D. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

3. 设函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$, 则 $f(x)$ ()

- A. 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递增 B. 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递减
C. 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递增 D. 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递减

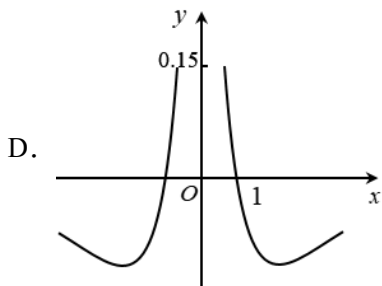
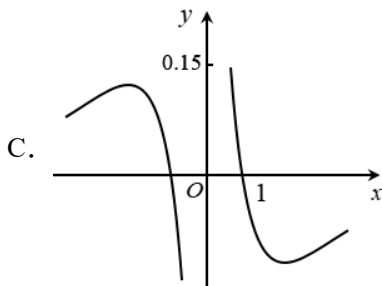
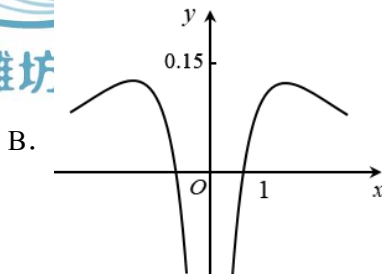
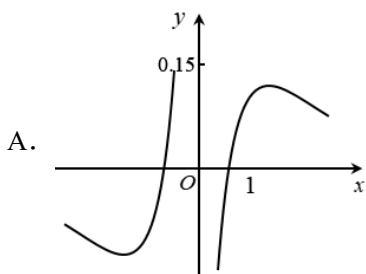
4. 函数 $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)} + \sqrt{4-x^2}$ 的定义域为

- A. $[-2, 0) \cup (0, 2]$ B. $(-1, 0) \cup (0, 2]$
C. $[-2, 2]$ D. $(-1, 2]$

5. 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$

- A. $e^{-x} - 1$ B. $e^{-x} + 1$ C. $-e^{-x} - 1$ D. $-e^{-x} + 1$

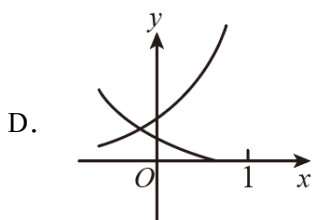
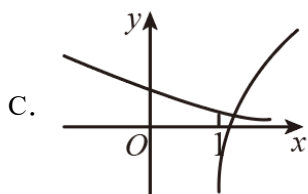
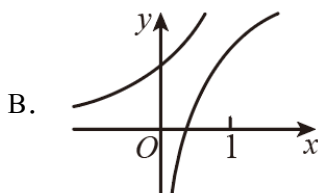
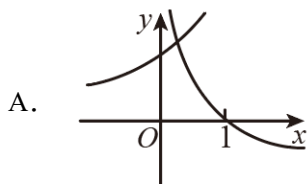
6. 函数 $y = \frac{\ln|x|}{x^2 + 2}$ 的图像大致为 ()



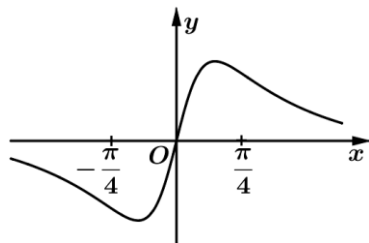
7. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足, $f(1-x)+2f(x)=x^2+1$, 则 $f(1)=$ ()

- A. -1 B. 1 C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

8. 在同一直角坐标系中, 函数 $y=\frac{1}{a^x}, y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的图象可能是



9. 已知函数 $f(x)=x^2+\frac{1}{4}, g(x)=\sin x$, 则图象为如图的函数可能是 ()



- A. $y=f(x)+g(x)-\frac{1}{4}$ B. $y=f(x)-g(x)-\frac{1}{4}$
- C. $y=f(x)g(x)$ D. $y=\frac{g(x)}{f(x)}$

10. 若定义在 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 且 $f(2)=0$, 则满足 $xf(x-1)\geq 0$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$ B. $[-3, -1] \cup [0, 1]$
- C. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$ D. $[-1, 0] \cup [1, 3]$

11. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x\in[1, 2]$ 时,

$f(x)=ax^2+b$. 若 $f(0)+f(3)=6$, 则 $f\left(\frac{9}{2}\right)=$ ()

- A. $-\frac{9}{4}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{7}{4}$ D. $\frac{5}{2}$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^{x-1}, & (x < 1) \\ (a-2)x + 3a, & (x \geq 1) \end{cases}$, 满足对任意 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $a \in (0, 1)$ B. $a \in \left[\frac{3}{4}, 1\right)$ C. $a \in \left(0, \frac{3}{4}\right]$ D. $a \in \left[\frac{3}{4}, 2\right)$

13. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 满足 $f(x+1) = 2f(x)$, 且当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = x(x-1)$. 若对任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \geq -\frac{8}{9}$, 则 m 的取值范围是

- A. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$ B. $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right]$ C. $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ D. $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$

14. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$, 且对任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 2$, $f(1) = 2020$, 则满足不等式 $f(x-2020) > 2(x-1011)$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $(2021, +\infty)$ B. $(2020, +\infty)$ C. $(1011, +\infty)$ D. $(1010, +\infty)$

15. 定义函数 $f(x) = [x[x]]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如: $[1.3] = 1$, $[-1.5] = -2$,

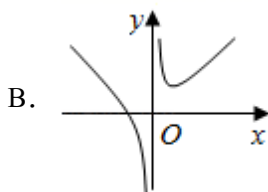
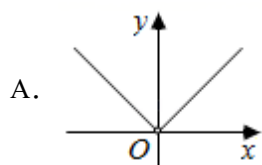
$[2] = 2$. 当 $x \in [0, n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 时, $f(x)$ 的值域为 A_n . 记集合 A_n 中元素的个数为 a_n , 则 $\sum_{i=2}^{2020} \frac{1}{a_i - 1}$ 的值为

()

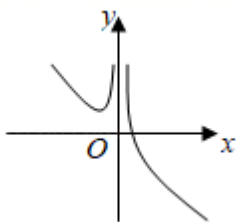
- A. $\frac{4040}{2021}$ B. $\frac{2019}{2021}$ C. $\frac{2019}{2020}$ D. $\frac{2019}{1010}$

二、多选题

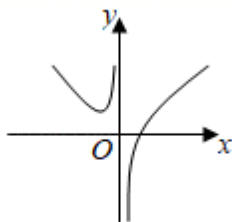
16. 函数 $f(x) = |x| + \frac{a}{x}$ ($a \in \mathbb{R}$) 的图象可能是 ()



C.



D.



17. 已知函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $g(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 0, \\ \log_2 x, & x > 0, \end{cases}$ 则正确的有 ()

A. $f(g(2)) = 2$

B. $g(f(1)) = 1$

C. 当 $x < 0$ 时, $f(g(x))$ 的最小值为 2 D. 当 $x > 0$ 时, $g(f(x))$ 的最小值为 1

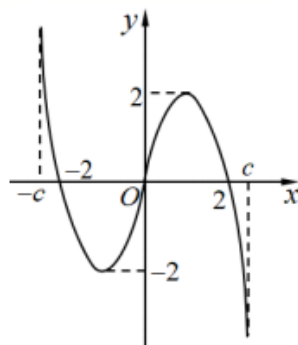
18. $f(x)$ 是定义在区间 $[-c, c]$ 上的奇函数, 其图像如图所示. 令 $g(x) = af(x) + b$, 则下列关于函数 $g(x)$ 的叙述正确的是 ()

A. 若 $a < 0$, 则函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称

B. 若 $a = -1$, $-2 < b < 0$, 则方程 $g(x) = 0$ 有大于 2 的实根

C. 若 $a \neq 0$, $b = 2$, 则方程 $g(x) = 0$ 有两个实根

D. 若 $a \geq 1$, $-2 < b < 2$, 则方程 $g(x) = 0$ 有三个实根



三、填空题

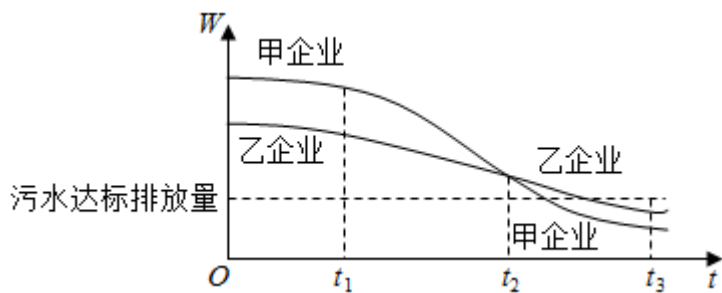
19. 已知 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x > 2 \\ |x - 3| + a, & x \leq 2, \end{cases}$ 若 $f[f(\sqrt{6})] = 3$, 则 $a =$ _____.

20. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x)$: _____.

① $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$; ② 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; ③ $f'(x)$ 是奇函数.

21. 已知 $y = f(x)$ 的图象关于坐标原点对称, 且对任意的 $x \in \mathbb{R}$, $f(x+2) = f(-x)$ 恒成立, 当 $-1 \leq x < 0$ 时, $f(x) = 2^x$, 则 $f(2021) =$ _____.

22. 为满足人民对美好生活的向往, 环保部门要求相关企业加强污水治理, 排放未达标的企业要限期整改, 设企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W = f(t)$, 用 $-\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 的大小评价在 $[a, b]$ 这段时间内企业污水治理能力的强弱, 已知整改期内, 甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如下图所示.

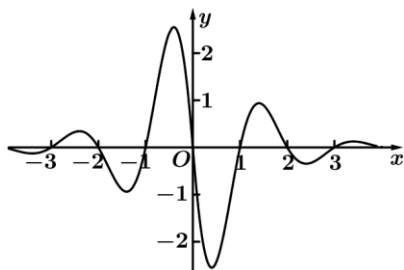


给出下列四个结论：

- ①在 $[t_1, t_2]$ 这段时间内，甲企业的污水治理能力比乙企业强；
- ②在 t_2 时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业强；
- ③在 t_3 时刻，甲、乙两企业的污水排放都已达标；
- ④甲企业在 $[0, t_1], [t_1, t_2], [t_2, t_3]$ 这三段时间中，在 $[0, t_1]$ 的污水治理能力最强。

其中所有正确结论的序号是_____。

23. 已知函数 $f(x) = \frac{4\cos(\omega x + \varphi)}{e^{|x|}}$ ($\omega > 0$, $0 < \varphi < \pi$) 的部分图像如图所示，则 $\omega + \varphi =$ _____。



24. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ ax^2 + x, & x < 0 \end{cases}$ ，其中 $a > 0$ ，若函数 $y = f(x)$ 的图象上恰好有两对关于 y 轴对称的点，则实数 a 的取值范围为_____。

25. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 3, & x > 0, \\ x^2 - 4, & x \leq 0, \end{cases}$ ，若 $f(a) = 5$ ，则实数 a 的值是_____；若 $f(f(a)) \leq 5$ ，则实数

a 的取值范围是_____。

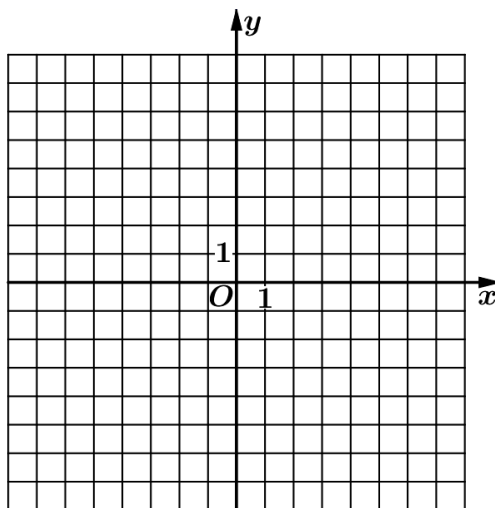
26. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R ，且满足 $f(x+1) = f(x-1)$ ， $f(1-x) + f(x) = 1$ ，则 $f(x)$ 的最小正周期为_____， $f(x)$ 的一个解析式可以为_____。

四、解答题

27. 已知函数 $f(x) = |x-2|$, $g(x) = |2x+3| - |2x-1|$.

(1) 画出 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图像;

(2) 若 $f(x+a) \geq g(x)$, 求 a 的取值范围.



28. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \log_a(-x) + 2x$

($a > 0$, 且 $a \neq 1$). 又直线 $l: mx + y + 2m + 5 = 0$ ($m \in \mathbb{R}$) 恒过定点 A , 且点 A 在函数 $f(x)$ 的图像上.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求 $f(-4) + f(8)$ 的值;

(3) 求函数 $f(x)$ 的解析式.

29. 已知函数 $f(x) = x|x-a|$,

- (1) 若函数 $y=f(x)+x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 求实数 a 的取值范围;
- (2) 若对于任意 $x \in [1, 2]$, 函数 $f(x)$ 的图象恒在直线 $y=1$ 的下方, 求实数 a 的取值范围;
- (3) 设 $a \geq 2$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[2, 4]$ 上的值域.

30. 已知函数 $f(x) = a - \frac{4}{3^x + 1}$ (a 为实常数).

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;
- (2) 当 $f(x)$ 为奇函数时, 对任意的 $x \in [1, 5]$, 不等式 $f(x) \leq \frac{u}{3^x}$ 恒成立, 求实数 u 的最大值



参考答案

1. B 上海市 2019 年 1 月春季高考数学试卷

【解析】A 选项: $y = 2^x$ 值域为 $(0, +\infty)$, 错误

B 选项: $y = x^{\frac{1}{2}}$ 值域为 $[0, +\infty)$, 正确

C 选项: $y = \tan x$ 值域为 R , 错误

D 选项: $y = \cos x$ 值域为 $[-1, 1]$, 错误

本题正确选项: B

2. D 2021 年全国高考甲卷数学(文)试题

【解析】对于 A, $f(x) = -x$ 为 R 上的减函数, 不合题意, 舍.

对于 B, $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 为 R 上的减函数, 不合题意, 舍.

对于 C, $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 为减函数, 不合题意, 舍.

对于 D, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 为 R 上的增函数, 符合题意,

故选: D.

3. A 2020 年全国统一高考数学试卷(文科)(新课标 II)

【解析】因为函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 其关于原点对称, 而 $f(-x) = -f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 为奇函数.

又因为函数 $y = x^3$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

而 $y = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

所以函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增.

故选: A.

4. B 2012 年全国普通高等学校招生统一考试文科数学(山东卷)

【解析】 x 满足 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \\ 4-x^2 \geq 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$. 解得 $-1 < x < 0$ 或 $0 < x \leq 2$, 选 B

5. D 2019 年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标 II）

【解析】 $\because f(x)$ 是奇函数， $x \geq 0$ 时， $f(x) = e^x - 1$.

当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ， $f(x) = -f(-x) = -e^{-x} + 1$ ，得 $f(x) = -e^{-x} + 1$ 。故选 D.

6. B 2021 年天津高考数学试题

【解析】设 $y = f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2+2}$ ，则函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$ ，关于原点对称，

又 $f(-x) = \frac{\ln|-x|}{(-x)^2+2} = f(x)$ ，所以函数 $f(x)$ 为偶函数，排除 AC；

当 $x \in (0,1)$ 时， $\ln|x| < 0$ ， $x^2+1 > 0$ ，所以 $f(x) < 0$ ，排除 D.

故选：B.

7. B 四川省达州市 2021 届高三二模数学（文）试题

【解析】 $\because$ 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足， $f(1-x) + 2f(x) = x^2 + 1$ ，

$\therefore$ 当 $x=0$ 时， $f(1) + 2f(0) = 1$ ，①

当 $x=1$ 时， $f(0) + 2f(1) = 2$ ，②

② $\times 2$ -①，得 $3f(1) = 3$ ，解得 $f(1) = 1$ 。

故选：B

8. D 2019 年浙江省高考数学试卷

【解析】当 $0 < a < 1$ 时，函数 $y = a^x$ 过定点 $(0,1)$ 且单调递减，则函数 $y = \frac{1}{a^x}$ 过定点 $(0,1)$ 且单调递增，

函数 $y = \log_a\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 过定点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 且单调递增，D 选项符合；当 $a > 1$ 时，函数 $y = a^x$ 过定点 $(0,1)$ 且单调

递增，则函数 $y = \frac{1}{a^x}$ 过定点 $(0,1)$ 且单调递减，函数 $y = \log_a\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 过定点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 且单调递增，各选项

均不符合. 综上，选 D.

9. D 2021 年浙江省高考数学试题

【解析】对于 A， $y = f(x) + g(x) - \frac{1}{4} = x^2 + \sin x$ ，该函数为非奇非偶函数，与函数图象不符，排除

A；

对于 B, $y = f(x) - g(x) - \frac{1}{4} = x^2 - \sin x$, 该函数为非奇非偶函数, 与函数图象不符, 排除 B;

对于 C, $y = f(x)g(x) = \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\sin x$, 则 $y' = 2x\sin x + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\cos x$,

当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $y' = \frac{\pi}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, 与图象不符, 排除 C.

故选: D.

10. D 2020 年新高考全国卷 I 数学高考试题 (山东)

【解析】因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 且 $f(2) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上也是单调递减, 且 $f(-2) = 0$, $f(0) = 0$,

所以当 $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$ 时, $f(x) > 0$, 当 $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ 时, $f(x) < 0$,

所以由 $xf(x-1) \geq 0$ 可得:

$$\begin{cases} x < 0 \\ -2 \leq x-1 \leq 0 \text{ 或 } x-1 \geq 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x > 0 \\ 0 \leq x-1 \leq 2 \text{ 或 } x-1 \leq -2 \end{cases} \text{ 或 } x = 0$$

解得 $-1 \leq x \leq 0$ 或 $1 \leq x \leq 3$,

所以满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是 $[-1, 0] \cup [1, 3]$,

故选: D.

11. D 2021 年全国高考甲卷数学 (理) 试题

【解析】因为 $f(x+1)$ 是奇函数, 所以 $f(-x+1) = -f(x+1)$ ①;

因为 $f(x+2)$ 是偶函数, 所以 $f(x+2) = f(-x+2)$ ②.

令 $x=1$, 由①得: $f(0) = -f(2) = -(4a+b)$, 由②得: $f(3) = f(1) = a+b$,

因为 $f(0) + f(3) = 6$, 所以 $-(4a+b) + a+b = 6 \Rightarrow a = -2$,

令 $x=0$, 由①得: $f(1) = -f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow b = 2$, 所以 $f(x) = -2x^2 + 2$.

思路一: 从定义入手.

$$f\left(\frac{9}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2} + 2\right) = f\left(-\frac{5}{2} + 2\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{3}{2}+1\right)=-f\left(\frac{3}{2}+1\right)=-f\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$-f\left(\frac{5}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}+2\right)=-f\left(-\frac{1}{2}+2\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{9}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}.$$

思路二：从周期性入手

由两个对称性可知，函数 $f(x)$ 的周期 $T=4$.

$$\text{所以 } f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}.$$

故选：D.

12. C 山东省（新高考）2021 届高三数学学科仿真模拟标准卷试题

【解析】由题意，函数 $f(x)$ 对任意的 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$ 成立，

即函数 $f(x)=\begin{cases} a^{x-1}, & (x < 1) \\ (a-2)x+3a, & (x \geq 1) \end{cases}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，

$$\text{可得 } \begin{cases} 0 < a < 1 \\ a-2 < 0 \\ 1 \geq a-2+3a \end{cases}, \text{ 解得 } 0 < a \leq \frac{3}{4},$$

故选：C.

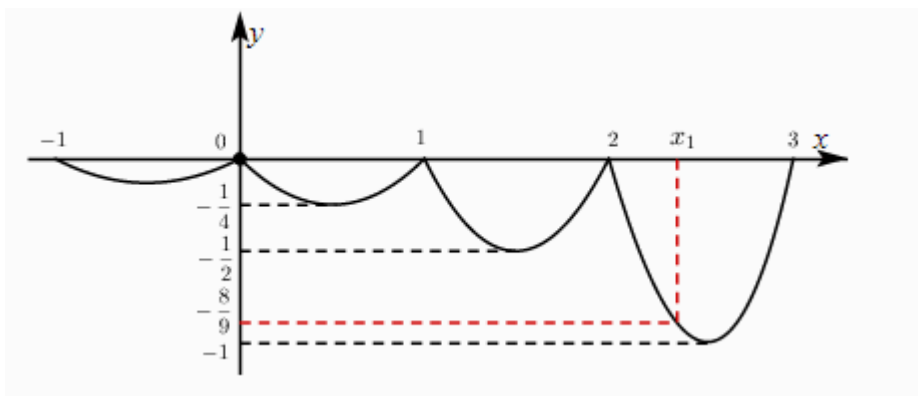
13. B 2019 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 II）

【解析】 $\because x \in (0,1]$ 时， $f(x)=x(x-1)$ ， $f(x+1)=2f(x)$ ， $\therefore f(x)=2f(x-1)$ ，即 $f(x)$ 右移 1 个单位，图像变为原来的 2 倍.

如图所示：当 $2 < x \leq 3$ 时， $f(x)=4f(x-2)=4(x-2)(x-3)$ ，令 $4(x-2)(x-3)=-\frac{8}{9}$ ，整理得：

$$9x^2-45x+56=0, \therefore (3x-7)(3x-8)=0, \therefore x_1=\frac{7}{3}, x_2=\frac{8}{3} \text{ (舍)}, \therefore x \in (-\infty, m] \text{ 时, } f(x) \geq -\frac{8}{9}$$

成立，即 $m \leq \frac{7}{3}$ ， $\therefore m \in \left(-\infty, \frac{7}{3}\right]$ ，故选 B.



14. A 河南省 2021 届高三阶段性测试（六）文科数学试题

【解析】根据题意可知， $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 2$

可转化为 $\frac{[f(x_2) - 2x_2] - [f(x_1) - 2x_1]}{x_2 - x_1} > 0$,

所以 $f(x) - 2x$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数，又 $f(-x) = -f(x)$,

所以 $f(x) - 2x$ 为奇函数，所以 $f(x) - 2x$ 在 R 上为增函数，

因为 $f(x - 2020) > 2(x - 1011)$, $f(1) = 2020$,

所以 $f(x - 2020) - 2(x - 2020) > f(1) - 2$,

所以 $x - 2020 > 1$,

解得 $x > 2021$,

即 x 的取值范围是 $(2021, +\infty)$.

故选：A.

15. D 四川省射洪市 2021 届高三高考考前模拟测试数学（理）试题

【解析】因为 $[x] = \begin{cases} 0, x \in [0, 1) \\ 1, x \in [1, 2) \\ 2, x \in [2, 3) \\ \dots\dots \\ n-1, x \in [n-1, n) \end{cases}$, 所以 $x[x] = \begin{cases} 0, x \in [0, 1) \\ x, x \in [1, 2) \\ 2x, x \in [2, 3) \\ \dots\dots \\ (n-1)x, x \in [n-1, n) \end{cases}$,

所以 $x[x]$ 在各个区间中的元素个数分别为：1, 1, 2, 3, 4, ..., $n-1$,

所以当 $x \in [0, n), n \in N^*$ 时， $f(x)$ 的值域为 A_n ，集合 A_n 中元素个数为：

$$a_n = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} + 1 = \frac{n^2 - n + 2}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{a_n - 1} = 2 \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) (n \geq 2),$$

$$\text{所以 } \sum_{i=2}^{2020} \frac{1}{a_i - 1} = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + 2 \left(\frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{2020} \right) = \frac{2019}{1010},$$

故选: D.

16. ABD 广东省燕博园 2021 届高三 3 月高考数学综合能力测试试题

【解析】根据题意,

当 $a = 0$ 时, $f(x) = |x|$, ($x \neq 0$), 其图象与选项 A 对应,

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } f(x) = \begin{cases} x + \frac{a}{x}, & x > 0 \\ -x + \frac{a}{x}, & x < 0 \end{cases}, \text{ 在区间 } (0, +\infty) \text{ 上, } f(x) = x + \frac{a}{x}, \text{ 其图象在第一象限先减后增,}$$

在区间 $(-\infty, 0)$ 上, $f(x)$ 为减函数, 其图象与选项 B 对应,

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, } f(x) = \begin{cases} x + \frac{a}{x}, & x > 0 \\ -x + \frac{a}{x}, & x < 0 \end{cases}, \text{ 在区间 } (0, +\infty) \text{ 上, } f(x) \text{ 为增函数, 在区间 } (-\infty, 0) \text{ 上,}$$

$$f(x) = -x + \frac{a}{x} = [(-x) + \frac{-a}{-x}], \text{ 其图象在第二象限先减后增, 其图象与选项 D 对应,}$$

故选: ABD.

17. ABD 福建省泉州市 2021 届高三 5 月二模数学试题

【解析】由题意 $g(2) = \log_2 2 = 1$, $f(g(2)) = f(1) = 2$, A 正确;

$g(f(1)) = g(2) = 1$, B 正确;

$x < 0$ 时, $g(x) = 2^x \in (0, 1)$, 当 $t \in (0, 1)$ 时, $f(t) = t + \frac{1}{t}$ 是减函数, $f(t) \in (2, +\infty)$, 无最小值, C 错;

$x > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2$ (当且仅当 $x = 1$ 时等号成立), $t \geq 2$ 时 $g(t) = \log_2 t \geq 1$, $t = 2$ 时等号成

立, 所以此时 $g(f(x))$ 的最小值为 1, D 正确.

故选: ABD.

18. BD 河北衡水中学 2021 届高三三轮复习自主复习旗开得胜数学(三)试题

【解析】当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 关于原点对称, 根据图像平移知 $g(x) = af(x) + b$ 关于 $(0, b)$ 点对称, A 错误;

$a = -1$ 时, 方程 $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = b$, $-2 < b < 0$, 由 $f(x)$ 的图像知, $f(x) = b$ 在 $x \in (2, c)$ 上有一个交点, 故 B 正确;

$a \neq 0, b = 2$ 时, $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{2}{a}$, 若使方程 $g(x) = 0$ 由两个根, 由图知, 必有 $-\frac{2}{a} = \pm 2 \Rightarrow a = \pm 1$, 其他的非零 a 值均不满足, 故 C 错误;

$a \geq 1, -2 < b < 2$ 时, $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{b}{a} \in (-2, 2)$, 由图知有三个交点, 故 D 正确;

故选: BD.

19. 2 2021 年浙江省高考数学试题

【解析】 $f[f(\sqrt{6})] = f(6-4) = f(2) = |2-3| + a = 3$, 故 $a = 2$,

故答案为: 2.

20. $f(x) = x^4$ (答案不唯一, $f(x) = x^{2n} (n \in \mathbb{N}^*)$ 均满足) 2021 年全国新高考 II 卷数学试题

【解析】取 $f(x) = x^4$, 则 $f(x_1 x_2) = (x_1 x_2)^4 = x_1^4 x_2^4 = f(x_1) f(x_2)$, 满足①,

$f'(x) = 4x^3$, $x > 0$ 时有 $f'(x) > 0$, 满足②,

$f'(x) = 4x^3$ 的定义域为 $\mathbb{R}$,

又 $f'(-x) = -4x^3 = -f'(x)$, 故 $f'(x)$ 是奇函数, 满足③.

故答案为: $f(x) = x^4$ (答案不唯一, $f(x) = x^{2n} (n \in \mathbb{N}^*)$ 均满足)

21. $-\frac{1}{2}$ 广东省北大附中深圳南山分校 2021 届高三下学期 3 月一模数学试题

【解析】 $y=f(x)$ 的图象关于坐标原点对称, 则 $f(x) = -f(-x)$

又 $f(x+2) = f(-x)$, 可得 $f(x+2) = -f(x) = f(x-2)$, 即 $f(x)$ 的周期为 4

$f(2021) = f(4 \times 505 + 1) = f(1) = -f(-1) = -\frac{1}{2}$

故答案为: $-\frac{1}{2}$

22. ①②③ 2020 年北京市高考数学试卷

【解析】 $-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 表示区间端点连线斜率的负数，

在 $[t_1, t_2]$ 这段时间内，甲的斜率比乙的小，所以甲的斜率的相反数比乙的大，因此甲企业的污水治理能力比乙企业强；①正确；

甲企业在 $[0, t_1], [t_1, t_2], [t_2, t_3]$ 这三段时间中，甲企业在 $[t_1, t_2]$ 这段时间内，甲的斜率最小，其相反数最大，即在 $[t_1, t_2]$ 的污水治理能力最强。④错误；

在 t_2 时刻，甲切线的斜率比乙的小，所以甲切线的斜率的相反数比乙的大，甲企业的污水治理能力比乙企业强；②正确；

在 t_3 时刻，甲、乙两企业的污水排放量都在污水打标排放量以下，所以都已达标；③正确；

故答案为：①②③

23. $\frac{3\pi}{2}$ ； 山东省淄博市 2021 届高三三模数学试题

【解析】由图象知函数为奇函数，所以 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，又 $0 < \varphi < \pi$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 。

$$f(x) = \frac{4\cos(\omega x + \frac{\pi}{2})}{e^{|x|}} = -\frac{4\sin \omega x}{e^{|x|}},$$

又由图象知函数 $y = \sin \omega x$ 的零点是 $x = k, k \in \mathbb{Z}$ ，因此周期为 $T = 2, \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$ 。

所以 $\varphi + \omega = \frac{3\pi}{2}$ 。

故答案为： $\frac{3\pi}{2}$ 。

24. (0,1) 安徽省肥东县高级中学 2019 届上学期高三 8 月调研考试数学（理）试题

【解析】已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ ax^2 + x, & x < 0 \end{cases}$ ，其中 $a > 0$ ，若函数 $y = f(x)$ 的图象上恰好有两对关于 y 轴对称的点，

称的点，

即 $x > 0$ 时， $y = \ln x$ 与 $y = ax^2 - x$ ，有两个交点， $y = \ln x$ 恒过 $(1, 0)$ ， $y = ax^2 - x$ 中 $\frac{1}{a}$ 是函数的零

点，所以必须满足 $0 < \frac{1}{a}$ ，

解得 $a \in (0, 1)$ 。

故答案为 (0,1)。

25. 1或-3 $[-\sqrt{5}, -1]$ 2021 年全国高考临门一卷湖南数学

【解析】(1) 当 $a > 0$ 时, $2^a + 3 = 5$ 解得 $a = 1$,

当 $a \leq 0$ 时, $a^2 - 4 = 5$ 解得 $a = -3$ 或 $a = 3$ (舍).

(2) 设 $t = f(a)$, 由 $f(t) \leq 5$ 得 $-3 \leq t \leq 1$;

由 $-3 \leq f(a) \leq 1$, 解得 $-\sqrt{5} \leq a \leq -1$.

故答案为: 1或-3; $[-\sqrt{5}, -1]$.

26. 2 $f(x) = \frac{1}{2} + \cos \pi x$ (答案不唯一) 山东省烟台市 2021 届高三高考适应性练习 (一) 数学试题

【解析】因为 $f(x+1) = f(x-1)$,

所以 $f(x) = f(x-2)$, $f(x)$ 的最小正周期为 2.

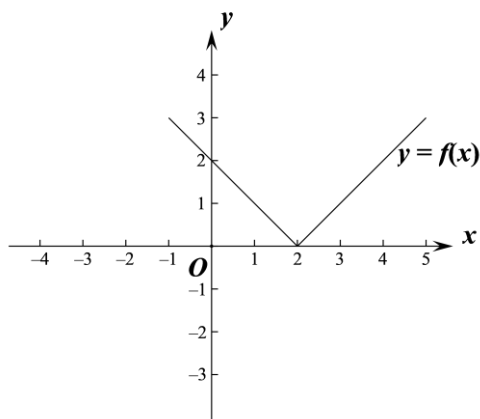
因为 $f(1-x) + f(x) = 1$,

所以函数 $f(x)$ 关于点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 对称,

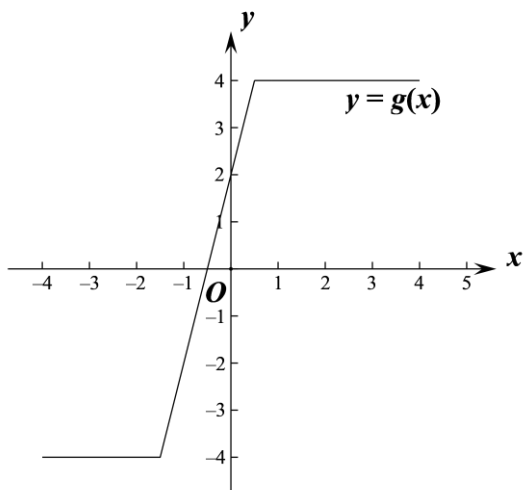
满足关于点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 对称以及最小正周期为 2 的方程可以为 $f(x) = \frac{1}{2} + \cos \pi x$.

故答案为: 2; $f(x) = \frac{1}{2} + \cos \pi x$ (答案不唯一).

27. 【解析】(1) 可得 $f(x) = |x-2| = \begin{cases} 2-x, & x < 2 \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}$, 画出图像如下:



$$g(x) = |2x+3| - |2x-1| = \begin{cases} -4, & x < -\frac{3}{2} \\ 4x+2, & -\frac{3}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 4, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 画出函数图像如下:}$$



$$(2) \quad f(x+a) = |x+a-2|,$$

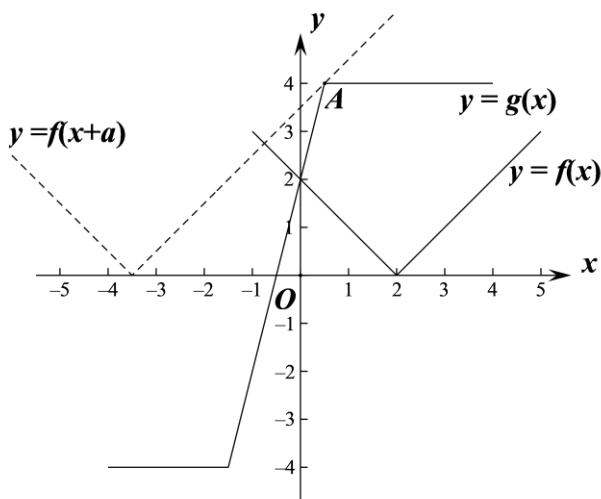
如图, 在同一个坐标系里画出 $f(x), g(x)$ 图像,

$y = f(x+a)$ 是 $y = f(x)$ 平移了 $|a|$ 个单位得到,

则要使 $f(x+a) \geq g(x)$, 需将 $y = f(x)$ 向左平移, 即 $a > 0$,

当 $y = f(x+a)$ 过 $A\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ 时, $\left|\frac{1}{2} + a - 2\right| = 4$, 解得 $a = \frac{11}{2}$ 或 $-\frac{5}{2}$ (舍去),

则数形结合可得需至少将 $y = f(x)$ 向左平移 $\frac{11}{2}$ 个单位, $\therefore a \geq \frac{11}{2}$.



28. 江苏省 2021 年普通高考对口单招文化统考数学试题

【解析】(1) 由直线 l 过定点可得: $m(x+2) = -y-5$,

$$\text{由 } \begin{cases} x+2=0 \\ -y-5=0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases},$$

所以直线 l 过定点 $A(-2, -5)$.

又因为 $x < 0$ 时, $f(x) = \log_a(-x) + 2x$,

所以 $f(-2) = \log_a 2 - 4 = -5$,

有 $\log_a 2 = -1$, $a = \frac{1}{2}$.

$$(2) f(-4) = \log_{\frac{1}{2}} 4 - 8 = -10,$$

因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(8) = f(-8) = \log_{\frac{1}{2}} 8 - 16 = -19$,

所以 $f(-4) + f(8) = -29$.

(3) 由(1)知, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 2x$.

当 $x > 0$ 时, $-x < 0$, $f(-x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2 \cdot (-x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 2x$,

又 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x) = f(-x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 2x$,

$$\text{综上所述, } f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 2x & x < 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x - 2x & x > 0 \end{cases}.$$

29. 【解析】(1) $y=f(x)+x=x|x-a|+x=\begin{cases} x^2+(1-a)x, x \geq a \\ -x^2+(1+a)x, x < a, \end{cases}$

由函数 $y=f(x)+x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数,

得 $\begin{cases} -\frac{1-a}{2} \leq a \\ \frac{-(1+a)}{2 \times (-1)} \geq a \end{cases}$, 解得 $-1 \leq a \leq 1$,

则 a 的取值范围为 $-1 \leq a \leq 1$.

(2) 由题意得当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) < 1$ 恒成立,

即当 $x \in [1, 2]$ 时,

$$x|x-a| < 1, |x-a| < \frac{1}{x}, -\frac{1}{x} < a-x < \frac{1}{x},$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} < a < x + \frac{1}{x} \text{ 恒成立,}$$

即有 $\begin{cases} a > \left(x - \frac{1}{x}\right)_{\max} \\ a < \left(x + \frac{1}{x}\right)_{\min} \end{cases}$, 解得 $\frac{3}{2} < a < 2$.

(3) 当 $a \geq 2$ 时, $\frac{a}{2} \geq 1$, $f(x) = \begin{cases} x(a-x), x < a \\ x(x-a), x \geq a, \end{cases}$

① 当 $\frac{a}{2} > 4$ 即 $a > 8$ 时, $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 上递增,

$f(x)_{\min} = f(2) = 2a-4$, $f(x)_{\max} = f(4) = 4a-16$, $\therefore$ 值域为 $[2a-4, 4a-16]$;

② 当 $2 \leq \frac{a}{2} \leq 4$, 即 $4 \leq a \leq 8$ 时, $f(x)_{\max} = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$, $f(2) - f(4) = 12-2a$,

若 $4 \leq a < 6$, 则值域为 $[4a-16, \frac{a^2}{4}]$; 若 $6 \leq a \leq 8$, 则值域为 $[2a-4, \frac{a^2}{4}]$;

③ 当 $1 \leq \frac{a}{2} < 2$, 即 $2 \leq a < 4$ 时, $f(x)_{\min} = 0$,

且 $f(2) = 2a-4$, $f(4) = 16-4a$, $f(2) - f(4) = 6a-20$,

若 $2 \leq a < \frac{10}{3}$, 则值域为 $[0, 16-4a]$, 若 $\frac{10}{3} \leq a < 4$, 则值域为 $[0, 2a-4]$.

30. 四川省泸州市泸县第五中学 2021 届高三数学一诊试卷（理科）试题

【解析】(1) 若函数 $f(x)$ 为奇函数，

$$\text{则 } f(-x) = -f(x),$$

$$\text{即 } a - \frac{4}{3^{-x}+1} = -a + \frac{4}{3^x+1}, \text{ 对 } x \in \mathbf{R} \text{ 恒成立,}$$

$$\text{所以 } 2a = 4,$$

$$\text{解得 } a = 2,$$

$$\text{又 } f(1) = a - 1, f(-1) = a - 3,$$

对任意实数 a , $f(1) \neq f(-1)$, 所以 $f(x)$ 不可能为偶函数,

所以 $a \neq 2$ 时, 函数 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

$$(2) \text{ 当 } f(x) \text{ 为奇函数时, } a = 2, f(x) = 2 - \frac{4}{3^x+1},$$

因为对任意的 $x \in [1, 5]$, 不等式 $f(x) \geq \frac{u}{3^x}$ 恒成立,

所以对任意的 $x \in [1, 5]$, 不等式 $u \leq 2 \cdot 3^x - \frac{4 \cdot 3^x}{3^x+1}$ 恒成立,

$$\text{令 } g(x) = 2 \cdot 3^x - \frac{4}{3^x+1} = 2 \cdot (3^x+1) + \frac{4}{3^x+1} - 6,$$

$$\text{令 } t = 3^x + 1 \in [4, 244],$$

因为 $y = 2 \cdot t + \frac{4}{t} - 6$, 在 $[4, 244]$ 是增函数,

所以当 $t = 4$ 时, $y_{\min} = 3$, 即 $g(x)_{\min} = 3$,

所以 $u \leq 3$,

所以实数 u 的最大值是 3.