

常用逻辑用语

一、单选题

1. “ $\exists x_0 \in [2, +\infty)$, $\log_2 x_0 < 1$ ”的否定是 ()

A. $\forall x \in [2, +\infty)$, $\log_2 x \geq 1$

B. $\forall x \in (-\infty, 2)$, $\log_2 x > 1$

C. $\exists x_0 \in (-\infty, 2)$, $\log_2 x_0 \geq 1$

D. $\exists x \in [2, +\infty)$, $\log_2 x \leq 1$

2. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a > 6$ ”是“ $a^2 > 36$ ”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. “ $m > 0$ ”是“方程 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{m+2} = 1$ 表示双曲线”的 ()

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 已知空间中不过同一点的三条直线 m, n, l , 则“ m, n, l 在同一平面”是“ m, n, l 两两相交”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 $f(x)$ 是定义在上 $[0, 1]$ 的函数, 那么“函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增”是“函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ”的 ()

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 设向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 均为单位向量, 则“ $|\vec{a} - 3\vec{b}| = |3\vec{a} + \vec{b}|$ ”是“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

7. 若 $f(x), g(x)$ 均是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 则“ $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是偶函数”是“ $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. 设点 A, B, C 不共线, 则“ $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为锐角”是“ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$ ”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. 已知直线 $l_1: x + y + m = 0$, $l_2: x + m^2y = 0$. 则“ $l_1 \parallel l_2$ ”是“ $m = 1$ ”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

10. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项和为 S_n , 设甲: $q > 0$, 乙: $\{S_n\}$ 是递增数列, 则 ()

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

11. 祖暅原理: “幂势既同, 则积不容异”意思是说两个同高的几何体, 若在等高处的截面积恒相等, 则体积相等. 设 A, B 为两个同高的几何体, $p: A, B$ 在等高处的截面积不恒相等, $q: A, B$ 的体积不相等, 根据祖暅原理可知, p 是 q 的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

12. 条件 $A: \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$ 是条件 $B: \sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$ 的 ()

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分的条件

C. 充要条件

D. 既不是充分条件, 又不是必要条件

13. 在整数集 Z 中, 被 6 除所得余数为 k 的所有整数组成一个“类”, 记 $[k] = \{6n + k \mid n \in Z\}$, 则“整数 a, b 属于同一‘类’”是“ $a - b \in [0]$ ”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

14. 已知圆 $C: (x - a)^2 + (y + a)^2 = a^2 (a > 0)$ 和直线 $l: x + y + 2 = 0$, 则 $a = 2$ 是圆 C 和直线 l 相交的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

15. 已知 $f(x) = 2\cos x$, $x \in [m, n]$, 则“存在 $x_1, x_2 \in [m, n]$ 使得 $f(x_1) - f(x_2) = 4$ ”是“ $n - m \geq \pi$ ”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

16. 已知 $P: x \geq a$, $Q: |x+2a| < 3$, 且 P 是 Q 的必要不充分条件, 则实数 a 的取值范围是 ()A. $(-\infty, -1]$ B. $(-\infty, -1)$ C. $[1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$ 17. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b (a, b \in \mathbf{R})$ 有两个零点, 则 “ $-2 \leq a+b \leq 0$ ” 是 “函数 $f(x)$ 至少有一个零点属于区间 $[0, 2]$ ” 的一个条件

A. 充分不必要

B. 必要不充分

C. 充分必要

D. 既不充分也不必要

二、多选题

18. 命题 “ $\exists x \in [1, 2], x^2 \leq a$ ” 为真命题的一个充分不必要条件是 ()A. $a \geq 1$ B. $a \geq 4$ C. $a \geq -2$ D. $a = 4$ 19. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 则下列叙述中正确的是 ()A. “ $ab^2 > cb^2$ ” 的充要条件是 “ $a > c$ ”B. “ $a > 1$ ” 是 “ $\frac{1}{a} < 1$ ” 的充分不必要条件C. “ $ax^2 + bx + c \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立” 的充要条件是 “ $b^2 - 4ac \leq 0$ ”D. “ $a < 1$ ” 是 “方程 $x^2 + x + a = 0$ 有一个正根和一个负根” 的必要不充分条件20. 若 a, b 为正实数, 则 $a > b$ 的充要条件为 ()A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. $\ln a > \ln b$ C. $a \ln a < b \ln b$ D. $a - b < e^a - e^b$ 21. 若 $\exists x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 使得 $2x_0^2 - \lambda x_0 + 1 < 0$ 成立是假命题, 则实数 λ 可能取值是 ()A. $\frac{3}{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $\frac{9}{2}$ 22. 已知 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 函数 $f(x) = x + \cos x - \frac{\pi}{2}$, 则下列选项正确的是 ()A. $\exists x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), f(x_0) > 0$ B. $\exists x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), f(x_0) < 0$

$$C. \forall x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), f(x_0) > 0$$

$$D. \forall x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), f(x_0) < 0$$

23. 已知 $a \in \mathbb{R}$, 则使命题“ $\forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), x^2 - \sin x - a \geq 0$ ”为真命题的一个充分不必要条件是 ()

$$A. a < 1$$

$$B. a \leq 2$$

$$C. a < \frac{\pi^2 - 4}{4}$$

$$D. a \leq \frac{\pi^2 - 4}{4}$$

三、填空题

24. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的单调递减函数, 能说明“一定存在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x_0) < 1$ ”为假命题的一个函数是 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

25. 已知 $f(x) = m(x - 2m)(x + m + 3)$, $g(x) = 2^x - 2$, 若同时满足条件: ① $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$ 或 $g(x) < 0$; ② $\exists x \in (-\infty, -4), f(x)g(x) < 0$. 则 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

26. 设条件 $p: |x| \leq m (m > 0)$, $q: -1 \leq x \leq 4$, 若 p 是 q 的充分条件, 则 m 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 若 p 是 q 的必要条件, 则 m 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

27. 已知命题 p : 对任意的 $x \in [0, 1]$, 不等式 $2x - 2 \geq m^2 - 3m$ 恒成立, 则 $\neg p$ 为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 若 $\neg p$ 为假命题, 则 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题

28. 已知命题: “ $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $x_0^2 + mx_0 + 2m + 5 < 0$ ”为假命题.

(1) 求实数 m 的取值集合 A ;

(2) 设不等式 $(x - a + 1)(x - 1 + 2a) < 0$ 的解集为集合 B , 若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分不必要条件, 求实数 a 的取值范围.

29. 设命题 p : 对任意 $x \in [0, 1]$, 不等式 $2x - 2 \geq m^2 - 3m$ 恒成立; 命题 q : 存在 $x \in [-1, 1]$, 使得不等式 $x^2 - x - 1 + m \leq 0$ 成立.

- (1) 若 p 为真命题, 求实数 m 的取值范围;
- (2) 若命题 p 、 q 有且只有一个是真命题, 求实数 m 的取值范围.

30. 已知 $p: \forall x \in R, m(4x^2 + 1) > x$; $q: \exists x \in [2, 8], m \log_2 x + 1 \leq 0$.

- (1) 若 p 为真命题, 求实数 m 的取值范围;
- (2) 若 p 与 q 的真假性相同, 求实数 m 的取值范围.



参考答案

1. A 全国 II 卷 2021 届高三高考数学 (理) 冲刺预测试题

【解析】“ $\exists x_0 \in [2, +\infty)$, $\log_2 x_0 < 1$ ”是存在量词命题, 存在量词命题的否定是全称量词命题,

所以“ $\exists x_0 \in [2, +\infty)$, $\log_2 x_0 < 1$ ”的否定是“ $\forall x \in [2, +\infty)$, $\log_2 x \geq 1$ ”.

故选: A

2. A 2021 年天津高考数学试题

【解析】由题意, 若 $a > 6$, 则 $a^2 > 36$, 故充分性成立;

若 $a^2 > 36$, 则 $a > 6$ 或 $a < -6$, 推不出 $a > 6$, 故必要性不成立;

所以“ $a > 6$ ”是“ $a^2 > 36$ ”的充分不必要条件.

故选: A.

3. A 北京市通州区 2019 届高三 4 月第一次模拟考试数学 (理科) 试题

【解析】由“方程 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{m+2} = 1$ 表示双曲线”得: $m(m+2) > 0$, 即 $m > 0$ 或 $m < -2$,

又“ $m > 0$ ”是“ $m > 0$ 或 $m < -2$ ”的充分不必要条件,

即“ $m > 0$ ”是“方程 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{m+2} = 1$ 表示双曲线”的充分不必要条件,

故选 A.

4. B 2020 年浙江省高考数学试卷

【解析】依题意 m, n, l 是空间不过同一点的三条直线,

当 m, n, l 在同一平面时, 可能 $m \parallel n \parallel l$, 故不能得出 m, n, l 两两相交.

当 m, n, l 两两相交时, 设 $m \cap n = A, m \cap l = B, n \cap l = C$, 根据公理 2 可知 m, n 确定一个平面 α , 而

$B \in m \subset \alpha, C \in n \subset \alpha$, 根据公理 1 可知, 直线 BC 即 $l \subset \alpha$, 所以 m, n, l 在同一平面.

综上所述, “ m, n, l 在同一平面”是“ m, n, l 两两相交”的必要不充分条件.

故选: B

5. A 2021 年北京市高考数学试题

【解析】若函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$,

若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$,

比如 $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$,

但 $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$ 在 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ 为减函数, 在 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 为增函数,

故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$ 推不出 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,

故“函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增”是“ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ”的充分不必要条件,

故选: A.

6. C 【解析】因为向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 均为单位向量

$$\text{所以 } |\vec{a} - 3\vec{b}| = |3\vec{a} + \vec{b}| \Leftrightarrow (\vec{a} - 3\vec{b})^2 = (3\vec{a} + \vec{b})^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 9\vec{a}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9 = 9 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 1$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

所以“ $|\vec{a} - 3\vec{b}| = |3\vec{a} + \vec{b}|$ ”是“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”的充要条件

故选: C

7. A 天津市部分区 2019 届高三联考一模数学(理)试题

【解析】若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是偶函数, 则 $f(-x) = f(x), g(-x) = g(x)$,

$f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x)$, 即 $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数, 充分性成立;

当 $f(x) = x, g(x) = 2x$ 时, $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数, 但是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都不是偶函数, 必要性不成立,

$\therefore$ “ $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是偶函数”是“ $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数”的充分而不必要条件, 故选 A.

8. C 2019 年北京市高考数学试卷(理科)

【解析】 $\because A, B, C$ 三点不共线, $\therefore$

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|^2 > |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ 与 } \overrightarrow{AC}$$

的夹角为锐角. 故 “ $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为锐角” 是 “ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$ ” 的充分必要条件, 故选 C.

9. B 四川省成都市 2022 届高三文科数学零诊考试试题

【解析】由题意, 直线 $l_1: x + y + m = 0$, 直线 $l_2: x + m^2y = 0$,

因为 $l_1 // l_2$, 可得 $m^2 = 1$, 解得 $m = \pm 1$,

所以 “ $l_1 // l_2$ ” 是 “ $m = 1$ ” 的必要不充分条件.

故选: B.

10. B 2021 年全国高考甲卷数学 (理) 试题

【解析】由题, 当数列为 $-2, -4, -8, \dots$ 时, 满足 $q > 0$,

但是 $\{S_n\}$ 不是递增数列, 所以甲不是乙的充分条件.

若 $\{S_n\}$ 是递增数列, 则必有 $a_n > 0$ 成立, 若 $q > 0$ 不成立, 则会出现一正一负的情况, 是矛盾的, 则

$q > 0$ 成立, 所以甲是乙的必要条件.

故选: B.

11. B 全国名校 2021 届高三高考数学 (理) 冲刺试题 (二)

【解析】“两个同高的几何体, 等高处的截面积恒相等, 则体积相等” 的等价命题是 “两个同高的几何体, 体积不相等, 则等高处的截面积不恒相等”, 所以 $q \Rightarrow p$;

反之 “两个同高的几何体, 体积相等, 则等高处的截面积恒相等” 不成立, 即由 p 推不出 q ,

所以 p 是 q 的必要不充分条件.

故选: B.

12. A 【解析】条件 A: $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$, 两边平方得 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4}$

即 $\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$, 即 $1 + \sin 2\alpha = \frac{1}{4}$, 即 $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$

条件 B: $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$, 即 $\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$,

即 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4}$, 即 $\sin \alpha + \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$

所以条件 A: “ $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ” 是条件 B: “ $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$ ” 的充分不必要条件.

故选: A

13. C 浙江省 “日知” 新高考命题研究联盟 2020-2021 学年高三上学期 1 月检测数学试题

【解析】若整数 a, b 属于同一“类”，

则整数 a, b 被 6 除的余数相同，从而 $a-b$ 被 6 除的余数为 0，

反之也成立，

故“整数 a, b 属于同一“类”的充要条件是“ $a-b \in [0]$ ”。

故选：C。

14. A 【解析】圆 C 和直线 l 相交，即圆心 $(a, -a)$ 到 $l: x+y+2=0$ 的距离小于半径，

$$\frac{|a-a+2|}{\sqrt{2}} < a (a > 0), \text{ 解得 } a > \sqrt{2}$$

则 $a=2$ 是圆 C 和直线 l 相交的充分不必要条件

故选：A

15. A 江西省南昌市第二中学、河南省实验中学 2021 届高三 5 月冲刺联考数学（文）试题

【解析】由于 $f(x) = 2\cos x$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最大值为 2，最小值 -2，且相邻的最大值与最小值之间的水平距离为半个周期，即 π ，所以若存在 $x_1, x_2 \in [m, n]$ 使得 $f(x_1) - f(x_2) = 4$ ，则必有 $n-m \geq \pi$ ，但反之不成立，

比如 $m = -\frac{2\pi}{3}, n = \frac{2\pi}{3}$ 时， $n-m = \frac{4\pi}{3} > \pi$ ，但 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上的最大值为 2，最小值为 -1，

$x_1, x_2 \in [m, n]$ 时 $f(x_1) - f(x_2)$ 的最大值为 3，不可能等于 4， $\therefore$ “存在 $x_1, x_2 \in [m, n]$ 使得

$f(x_1) - f(x_2) = 4$ ”是“ $n-m \geq \pi$ ”的充分不必要条件，

故选：A。

16. A 山东省泰安肥城市 2021 届高三高考适应性训练数学试题（二）

【解析】因为 $q: |x+2a| < 3$,

所以 $q: -2a-3 < x < -2a+3$,

记 $A = \{x | -2a-3 < x < -2a+3\}$;

$p: x \geq a$ ，记为 $B = \{x | x \geq a\}$ 。

因为 p 是 q 的必要不充分条件，所以 $A \subset B$ ，

所以 $a \leq -2a-3$ ，解得 $a \leq -1$ 。

故选：A。

17. A 浙江省名校联盟 2019-2020 学年高三上学期第一次联考数学试题

【解析】函数 $f(x) = x^2 + ax + b (a, b \in \mathbb{R})$ 有两个零点，所以判别式 $\Delta = a^2 - 4b > 0$ ，

函数 $f(x)$ 至少有一个零点属于区间 $[0, 2]$ 分为两种情况：

(1) $x = 0, x = 2$ 不是零点时，

$$\text{函数 } f(x) \text{ 在区间 } [0, 2] \text{ 上只有一个零点} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0, \\ f(0) \cdot f(2) < 0, \end{cases}$$

$$f(0) \cdot f(2) = b(4 + 2a + b) = b^2 + 2ab + 4b = b^2 + 2ab + a^2 + 4b - a^2$$

$$= (a+b)^2 + 4b - a^2 < 0, \text{ 即 } (a+b)^2 < a^2 - 4b$$

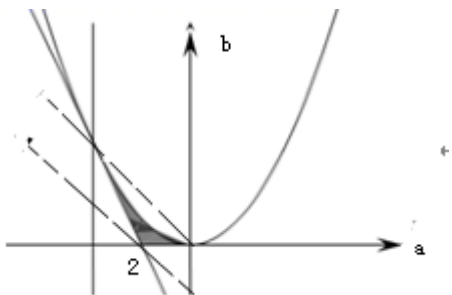
又因为 $a^2 - 4b > 0$ ，所以， $-\sqrt{a^2 - 4b} < a+b < \sqrt{a^2 - 4b}$ ；

$$x = 0, x = 2 \text{ 一个是零点时，} \begin{cases} f(0) = b \neq 0 \\ f(2) = 4 + 2a + b = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} f(0) = b = 0 \\ f(2) = 4 + 2a + b \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{综合可得 } -\sqrt{a^2 - 4b} \leq a+b \leq \sqrt{a^2 - 4b}$$

$$(2) \text{ 函数 } f(x) \text{ 在 } [0, 2] \text{ 上有 2 个零点} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0, \\ f(0) = b \geq 0, \\ f(2) = 4 + 2a + b \geq 0, \\ 0 < -\frac{a}{2} < 2, \end{cases}$$

由线性规划画出可行域，



由图可得： $-2 \leq a+b \leq 0$ ；

综上所述“函数 $f(x)$ 至少有一个零点属于区间 $[0, 2]$ ” $\Leftrightarrow -2 \leq a+b \leq 0$ 或

$$-\sqrt{a^2 - 4b} \leq a+b \leq \sqrt{a^2 - 4b},$$

所以 $-2 \leq a+b \leq 0 \Rightarrow -2 \leq a+b \leq 0$ 或 $-\sqrt{a^2 - 4b} \leq a+b \leq \sqrt{a^2 - 4b}$ ，

而后面推不出前面（前面是后面的子集），

所以“ $-2 \leq a+b \leq 0$ ”是“函数 $f(x)$ 至少有一个零点属于区间 $[0,2]$ ”的充分不必要条件，故选 A.

18. BD 湖南省名校联考联合体 2021 届高三下学期高考仿真演练联考数学试题

【解析】命题“ $\exists x \in [1,2], x^2 \leq a$ ”等价于 $a \geq 1$ ，即命题“ $\exists x \in [1,2], x^2 \leq a$ ”为真命题所对集合为 $[1, +\infty)$ ，所求的一个充分不必要条件的选项所对的集合真包含于 $[1, +\infty)$ ，显然只有 $[4, +\infty)$ $[1, +\infty)$ ， $\{4\}$ $[1, +\infty)$ ，所以选项 AC 不符合要求，选项 BD 正确.

故选：BD

19. BD 重庆市九龙坡区 2021 届高三下学期 4 月二诊数学试题

【解析】 $ab^2 > cb^2$ ，则一定有 $a > c$ ，但是 $a > c$ 时，若 $b = 0$ ，则 $ab^2 = cb^2$ ，A 错；
 $a > 1$ 时有 $\frac{1}{a} < 1$ 成立，充分的，但当 $\frac{1}{a} < 1$ 时有 $a > 1$ 或 $a < 0$ ，不必要，B 正确；
 若 $b^2 - 4ac \leq 0$ ，但 $a < 0$ ，则 $ax^2 + bc + c \leq 0$ 恒成立，C 错；

方程 $x^2 + x + a = 0$ 有一正一负两实根的的充要条件是 $x_1 x_2 = a < 0$ ，因此 D 正确.

故选：BD.

20. BD 重庆市第八中学 2021 届高三上学期一诊适应性考试数学试题

【解析】因为 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Leftrightarrow b > a$ ，故 A 选项错误；
 因为 a, b 为正实数，所以 $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$ ，故 B 选项正确；
 取 $a = e^2 > b = e$ ，则 $e^2 \ln e^2 = 2e^2$ ， $e \ln e = e$ ，即 $a \ln a < b \ln b$ 不成立，故 C 选项错误；
 因为 $y' = (e^x - x)' = e^x - 1$ ，当 $x > 0$ 时， $y' > 0$ ，所以 $y = e^x - x$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递增，
 即 $a > b \Leftrightarrow e^a - a > e^b - b \Leftrightarrow a - b < e^a - e^b$ ，故 D 正确.

故选：BD

21. AB 广东省东莞市东方明珠学校 2021 届高三下学期复习卷数学试题

【解析】由条件可知 $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ， $2x^2 - \lambda x + 1 \geq 0$ 是真命题，
 即 $\lambda \leq \frac{2x^2 + 1}{x} = 2x + \frac{1}{x}$ ，即 $\lambda \leq \left(2x + \frac{1}{x}\right)_{\min}$ ， $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ，

设 $f(x) = 2x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}$ ， $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

等号成立的条件是 $2x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 所以 $f(x)$ 的最小值是 $2\sqrt{2}$,

即 $\lambda \leq 2\sqrt{2}$, 满足条件的有 AB.

故选: AB

22. BD 【解析】 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x) = 1 - \sin x > 0$, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上递增, $f(0) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

所以 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(x) < f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 恒成立. 因此 AC 错, BD 正确.

故选: BD.

23. AC 【解析】 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 令 $f(x) = x^2 - \sin x$, 则 $f'(x) = 2x - \cos x > 0$, 则函数

$f(x) = x^2 - \sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递增,

$\forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2 - 4}{4}$, 所以原命题为真命题的充要条件为 $a \leq \frac{\pi^2 - 4}{4}$,

而 $1 < \frac{\pi^2 - 4}{4} < 2$, 则满足 A 选项、C 选项的 a 均有 $a \leq \frac{\pi^2 - 4}{4}$, $a \leq \frac{\pi^2 - 4}{4}$ 时 $a < 1$ 和 $a < \frac{\pi^2 - 4}{4}$ 都不一

定成立,

所以所求的一个充分不必要条件是选项 A, C.

故选: AC

24. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ 北京延庆区 2019 届高三一模数学 (理) 试题

【解析】一定存在 $x_0 \in R$ 使得 $f(x_0) < 1$, 即 $\exists x_0 \in R, f(x_0) < 1$, 为假命题, 则命题的否定为真命题, 即

$\forall x \in R, f(x) \geq 1$, 为真命题, 又 $f(x)$ 是 R 上的单调递减函数, 故设 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$.

25. $m \in (-4, -2)$ 2012 年全国普通高等学校招生统一考试理科数学 (北京卷)

【解析】根据 $g(x) = 2^x - 2 < 0$ 可解得 $x < 1$, 由于题目中第一个条件的限制, 导致 $f(x)$ 在 $x \geq 1$ 是必须是

$f(x) < 0$, 当 $m=0$ 时, $f(x)=0$ 不能做到 $f(x)$ 在 $x \geq 1$ 时 $f(x) < 0$, 所以舍掉, 因此, $f(x)$ 作为二次函数开口只能向下, 故 $m < 0$, 且此时 2 个根为 $x_1 = 2m, x_2 = -m - 3$, 为保证条件成立, 只需

$$\begin{cases} x_1 = 2m < 1 \\ x_2 = -m - 3 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m > -4 \end{cases}, \text{ 和大前提 } m < 0 \text{ 取交集结果为 } -4 < m < 0; \text{ 又由于条件 2 的限制, 可分析}$$

得出在 $\exists x \in (-\infty, -4), f(x)$ 恒负, 因此就需要在这个范围内 $g(x)$ 有得正数的可能, 即 -4 应该比 $x_1 x_2$ 两个

根中较小的来的大, 当 $m \in (-1, 0)$ 时, $-m - 3 < -4$, 解得交集为空, 舍. 当 $m = -1$ 时, 两个根同为

$-2 > -4$, 舍. 当 $m \in (-4, -1)$ 时, $2m < -4$, 解得 $m < -2$, 综上所述, $m \in (-4, -2)$.

26. 1 4 【解析】由 $|x| \leq m (m > 0)$ 得: $-m \leq x \leq m$

$$p \text{ 是 } q \text{ 的充分条件} \Rightarrow \begin{cases} -m \geq -1 \\ m \leq 4 \end{cases} \Rightarrow 0 < m \leq 1$$

$\therefore m$ 的最大值为 1

$$p \text{ 是 } q \text{ 的必要条件} \Rightarrow \begin{cases} -m \leq -1 \\ m \geq 4 \end{cases} \Rightarrow m \geq 4$$

$\therefore m$ 的最小值为 4

27. 存在 $x_0 \in [0, 1]$, 不等式 $2x_0 - 2 < m^2 - 3m$ 成立 $[1, 2]$

【解析】由全称量词命题的否定为存在量词命题,

可得 $\neg p$ 为存在 $x_0 \in [0, 1]$, 不等式 $2x_0 - 2 < m^2 - 3m$ 成立;

若 $\neg p$ 为假命题, 即 p 真,

可得 $m^2 - 3m \leq 2x - 2$ 的最小值,

由 $y = 2x - 2$ 在 $[0, 1]$ 递增, 可得函数 y 的最小值为 -2,

则 $m^2 - 3m \leq -2$, 解得 $1 \leq m \leq 2$,

则 m 的取值范围是 $[1, 2]$.

故答案为存在 $x_0 \in [0, 1]$, 不等式 $2x_0 - 2 < m^2 - 3m$ 成立; $[1, 2]$.

28. 【解析】(1) 命题 “ $\forall x \in \mathbb{R}$, 使方程 $x^2 + mx + 2m + 5 \geq 0$ ” 是真命题.

只需 $\Delta = m^2 - 4(2m + 5) \leq 0$,



解得 $-2 \leq m \leq 10$,

于是可得: $A = \{m | -2 \leq m \leq 10\}$

(2) 若 $x \in B$ 是 $x \in A$ 的必要不充分条件, 则集合 A 是集合 B 的真子集.

当 $a = \frac{2}{3}$ 时, $B = \emptyset$, 不合题意,

当 $a < \frac{2}{3}$ 时, $B = (a-1, 1-2a)$,

由 $A \subset B$ 可得: $\begin{cases} a-1 < -2 \\ 1-2a > 10 \end{cases}$,

解得 $a < -\frac{9}{2}$;

当 $a > \frac{2}{3}$ 时, $B = (1-2a, a-1)$,

由 $A \subset B$ 可得: $\begin{cases} a-1 > 10 \\ 1-2a < -2 \end{cases}$,

解得 $a > 11$;

综上 $a < -\frac{9}{2}$ 或 $a > 11$.

29. 【解析】(1) 对于命题 p : 对任意 $x \in [0, 1]$, 不等式 $2x-2 \geq m^2-3m$ 恒成立,

而 $x \in [0, 1]$, 有 $(2x-2)_{\min} = -2$, $\therefore -2 \geq m^2-3m$, $\therefore 1 \leq m \leq 2$,

所以 p 为真时, 实数 m 的取值范围是 $1 \leq m \leq 2$;

(2) 命题 q : 存在 $x \in [-1, 1]$, 使得不等式 $x^2-x+m-1 \leq 0$ 成立,

只需 $(x^2-x+m-1)_{\min} \leq 0$, 而 $x^2-x+m-1 = (x-\frac{1}{2})^2 + m - \frac{5}{4}$, $\therefore (x^2-x+m-1)_{\min} = -\frac{5}{4} + m$,

$\therefore -\frac{5}{4} + m \leq 0$, $m \leq \frac{5}{4}$,

即命题 q 为真时, 实数 m 的取值范围是 $m \leq \frac{5}{4}$,

依题意命题 p, q 一真一假,

若 p 为假命题, q 为真命题, 则 $\begin{cases} m < 1 \text{ 或 } m > 2 \\ m \leq \frac{5}{4} \end{cases}$, 得 $m < 1$;

若 q 为假命题, p 为真命题, 则 $\begin{cases} 1 \leq m \leq 2 \\ m > \frac{5}{4} \end{cases}$, 得 $\frac{5}{4} < m \leq 2$,

综上, $m < 1$ 或 $\frac{5}{4} < m \leq 2$.

30. 2020 届海南省高三第一次联考数学试题

【解析】(1) $\because \forall x \in R, m(4x^2 + 1) > x$, $\therefore m > 0$ 且 $1 - 16m^2 < 0$,

解得 $m > \frac{1}{4}$. 所以当 p 为真命题时, 实数 m 的取值范围是 $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

(2) $\exists x \in [2, 8], m \log_2 x + 1 \leq 0 \Rightarrow \exists x \in [2, 8], m \leq -\frac{1}{\log_2 x}$.

又 $\because$ 当 $x \in [2, 8]$ 时, $-\frac{1}{\log_2 x} \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right]$, $\therefore m \geq -1$.

$\therefore p$ 与 q 的真假性相同.

当 p 假 q 假时, 有 $\begin{cases} m, \frac{1}{4} \\ m < -1 \end{cases}$, 解得 $m < -1$;

当 p 真 q 真时, 有 $\begin{cases} m > \frac{1}{4} \\ m \geq -1 \end{cases}$, 解得 $m > \frac{1}{4}$.

$\therefore$ 当 p 与 q 的真假性相同时, 可得 $m < -1$ 或 $m > \frac{1}{4}$.

