2022届毕业生“极光杯”线上综合测试 I

数 学

座位号____ 考生号____ 姓名____

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 的最小正周期是

A. 4π　　B. 2π　　C. π　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

2．设 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}+a+b\mathrm{i}$，则 z 是纯虚数的一个必要条件是

A. $a=-1$　　B. $a=1$　　C. $b=-1$　　D. $b=-1$

3．若数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的正项等比数列，则下列等比数列的公比不为 2 的是

A. $\{\sqrt{a_n a_{n+1}}\}$　　B. $\{\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}\}$　　C. $\{\sqrt{a_n a_{n+1} a_{n+2}}\}$　　D. $\{\dfrac{a_n+a_{n+1}+a_{n+2}}{3}\}$

4．设命题 p：$\forall x\in[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}]$，$x+\dfrac{1}{x}>a$．若 $\neg p$ 是真命题，则实数 a 的取值范围是

A. $[\dfrac{3\sqrt{2}}{2},+\infty)$　　B. $[2,+\infty)$　　C. $(-\infty,\dfrac{3\sqrt{2}}{2}]$　　D. $(-\infty,2]$

5．某市爆发了一种疾病，现用试剂 X 对该地市民进行检测．若检测结果为阳性，则表明被测者已患病；反之，则表明被测者未患病．假设试剂 X 的检测正确率为 90%，此疾病在该市的感染率为 1%，则检测结果为阳性的人患有此疾病的概率为

A. $\dfrac{1}{12}$　　B. $\dfrac{1}{11}$　　C. $\dfrac{1}{10}$　　D. $\dfrac{1}{9}$

6．已知 $a=\log_2 3$，$b=\log_2 0.3$，$c=\log_{0.2} 0.3$，则下列各式不成立的是

A. $a+b<0$　　B. $a>c$　　C. $a+c<\dfrac{5}{2}$　　D. $b^2+c^2>1$

7．已知点 F_1,F_2 在 $\angle AOB$ 的边 OB 上，且 $OF_1=1$，$OF_2=3$．动点 P 在边 OA 上，且以 F_1,F_2 为焦点的椭圆 E 经过动点 P．若 $\angle AOB=30^\circ$，则椭圆 E 离心率的范围是

A. $(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}]$　　B. $(0,\dfrac{2}{3}]$　　C. $(\dfrac{1}{2},\dfrac{2\sqrt{7}}{7}]$　　D. $(0,\dfrac{2\sqrt{7}}{7}]$

8．与平面角的概念类似，我们用立体角刻画空间中物体对于定点的张角．其定义如下：以观测点为球心，作半径为 1 的单位球面，任意物体投影到该单位球面上的投影面积，即为该物体相对于该观测点的立体角，通常用Ω表示．例如，半球面对于球心的立体角$\Omega=2\pi$，整球面对于球心的立体角$\Omega=4\pi$．如图所示，我国2020年投入使用的500米口径球面射电望远镜（简称 FAST），是中国国家“十一五”重大科技基础设施建设项目．该望远镜的主体部分可以视为某与地面平行的平面截球面所得，且截面圆直径$D=500\text{m}$，对于球心的立体角Ω约为$110^\circ\sim120^\circ$，则可以估算得 FAST 的高约为

A. 80m　　B. 130m　　C. 180m　　D. 230m

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．下列有关统计学相关概念的说法，正确的是

A. 若随机变量 X 满足 $P(X=k)=\mathrm{C}_n^k p^{n-k}(1-p)^k$，$k=0,1,\cdots,n$，则 X 服从二项分布

B. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{20}$ 是严格单调递增的一组数据，则这组数据的上四分位数为 a_{15}

C. 正态密度函数为单峰函数，且峰值与标准差 σ 成反比

D. 在一元回归模型 $Y=bx+a+e$ 中，随机误差 e 满足 $E(e)=c\neq0$，$D(e)=\sigma^2$

10．若单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是平面 α 的一组基，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，则

A. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$　　C. $|\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{d}|\geqslant2\sqrt{2}$　　D. $|\boldsymbol{c}|+\sqrt{3}|\boldsymbol{d}|\leqslant4$

11．在$\triangle ABC$中，A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，G 是$\triangle ABC$的重心．则下列能说明$\triangle ABC$一定是等腰三角形的条件是

A. $\sin A=\sin B$　　B. $c=a\cos B$　　C. $\sin2A=\sin2B$　　D. $AG\perp BC$

12．非空集合 A,B 满足 $A\cup B=\{1,2,\cdots,10\}$，且 $A\cap B$ 中元素个数不大于1．定义集合 $A\pm B=\{x\pm y\,|\,x\in A,y\in B\}$，$A\setminus B=\{x\,|\,x\in A,x\notin B\}$，则

A. 集合 A,B 中元素个数之和为10或11　　B. 集合 $A-B$ 中元素个数最多为17

C. 集合 $A+B$ 中元素个数最多为18　　D. 集合 $A\setminus B$ 中元素个数最多为9

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 n 为正整数，且 $(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开项中有常数项，则 n 的最小值为_________.

14. 若 α 满足 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{3}$，则 $\sin 2\alpha=$________.

15. 设正方形 $ABCD$ 的边长为 2，E 为 AD 的中点，将 $\triangle AEB$ 和 $\triangle DEC$ 分别沿 EB,EC 折起，使得 A,D 两点重合于 P，则三棱锥 $P-EBC$ 的体积为_________.

16. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1\ (a>0)$ 的左顶点 M 作互相垂直的两条直线 l_1,l_2，分别与双曲线交于 A,B 两点，已知直线 AB 与 x 轴平行．则 $a=$________；设点 M 到直线 AB 的距离为 d，则 $\frac{d}{|AB|}$ 的取值范围是_________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意正整数 n，有 $a_1+\frac{a_2}{9}+\frac{a_3}{9^2}+\cdots+\frac{a_n}{9^{n-1}}=n$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $a_nb_n=n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.（12 分）

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，B 为直角顶点，a,b,c 分别为 A,B,C 所对的边，且 $b=\frac{5}{7}(a+c)$.

（1）求 $\cos A\cos C$ 的值；

（2）设点 A',B',C' 满足 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC'}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA'}$，$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB'}$．记 $\triangle A'B'C'$ 的面积为的 S_1，$\triangle ABC$ 的面积为 S_2，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值.

注：（秦九韶公式）三边长分别为 a,b,c 的三角形面积 $S=\sqrt{\frac{1}{4}[a^2c^2-(\frac{a^2+c^2-b^2}{2})^2]}$.

19.（12 分）

在空间四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AB\perp CD$，$BC\perp CD$，$AD=2$.

（1）若 $AB=BC=CD$，求异面直线 BC 和 AD 所成角的余弦值；

（2）若 A,B,C,D 均在球 O 上，求球 O 的半径与四面体 $ABCD$ 体积的最大值.

20.（12 分）

根据以往的经验，某工程施工期间的降水量 X（单位：mm）对工期的影响如下表：

降水量 X	$[0,300)$	$[300,600)$	$[700,900)$	$[900,+\infty)$
工期延误天数 Y	0	2	5	8

历史气象资料表明：该工程施工期间降水量 X 小于 $300,600,900$ 的概率分别为 0.3, $0.7,0.9$.

（1）求工期延误天数 Y 的均值与方差；

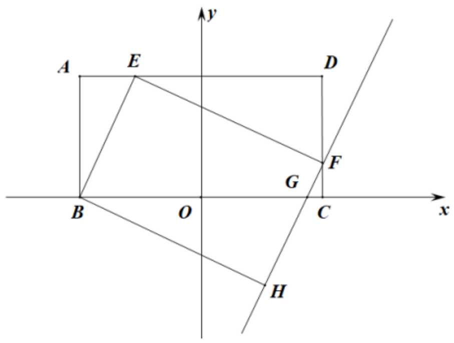
（2）求在降水量 X 至少是 300 的条件下，工期延误不超过 5 天的概率；

（3）由于该工程在 $7\sim8$ 月施工，故当气温较高时，工人可能无法按时完成当日计划工作量. 已知在某个 40 天的施工周期内，有 30 天的最高气温不低于 $35^\circ\mathrm{C}$，这其中仅有 12 天完成了当日的工作量；剩余 10 天中，有 8 天完成了当日的工作量. 依据小概率值 $\alpha=0.005$ 的 χ^2 独立性检验，判断“当日最高气温不低于 $35^\circ\mathrm{C}$”和“工人能完成当日的工作量”是否相互独立，并写出零假设.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+c)(b+d)(b+c)(a+d)}$，临界值 $x_{0.005}=7.879$.

21.（12 分）

如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，矩形 $ABCD$ 的顶点坐标分别为 $A(-2,2)$，$B(-2,0)$，$C(2,0)$，$D(2,2)$. 点 E,F,G 分别为线段 AD,CD,BC 上一点（不含端点），且满足 $BE\perp EF$，$EF\perp FG$.



（1）若点 E 在第二象限，求 $|CG|$ 的最大值；

（2）过点 B 作直线 FG 的垂线，垂足为点 H，求 H 的轨迹方程.

22.（12 分）

设函数 $f(x)=\log_a x+ax\ (a>0$ 且 $a\neq1)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的零点个数；

（2）设 $a_n=\dfrac{1}{n}(1+\dfrac{1}{n})^n$，求证：$\forall n\in\mathbf{N}^*$，有 $\mathrm{e}\ln(1+n)<a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant2+\mathrm{e}\ln n$.