2022 届毕业生“极光杯”线上综合测试 I 解析

数　学

座位号______　考生号______　姓名______

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 的最小正周期是 B

A. 4π　　B. 2π　　C. π　　D. $\frac{\pi}{2}$

2．设 $z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}+a+b\mathrm{i}$，则 z 是纯虚数的一个必要条件是 A

A. $a=-1$　　B. $a=1$　　C. $b=-1$　　D. $b=1$

3．若数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的正项等比数列，则下列等比数列的公比不为 2 的是 C

A. $\{\sqrt{a_n a_{n+1}}\}$　　B. $\{\frac{a_n+a_{n+1}}{2}\}$　　C. $\{\sqrt{a_n a_{n+1} a_{n+2}}\}$　　D. $\{\frac{a_n+a_{n+1}+a_{n+2}}{3}\}$

4．设命题 p：$\forall x\in[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}]$，$x+\frac{1}{x}>a$．若 $\neg p$ 是真命题，则实数 a 的取值范围是 B

A. $[\frac{3\sqrt{2}}{2},+\infty)$　　B. $[2,+\infty)$　　C. $(-\infty,\frac{3\sqrt{2}}{2}]$　　D. $(-\infty,2]$

5．某市爆发了一种疾病，现用试剂 X 对该地市民进行检测．若检测结果为阳性，则表明被测者已患病；反之，则表明被测者未患病．假设试剂 X 的检测正确率为 90%，此疾病在该市的感染率为 1%，则检测结果为阳性的人患有此疾病的概率为 A

A. $\frac{1}{12}$　　B. $\frac{1}{11}$　　C. $\frac{1}{10}$　　D. $\frac{1}{9}$

6．已知 $a=\log_2 3$，$b=\log_2 0.3$，$c=\log_{0.2} 0.3$，则下列各式不成立的是 D

A. $a+b<0$　　B. $a>c$　　C. $a+c<\frac{5}{2}$　　D. $b^2+c^2<1$

7．已知点 F_1,F_2 在 $\angle AOB$ 的边 OB 上，且 $BF_1=1$，$BF_2=3$．动点 P 在边 OA 上，且以 F_1,F_2 为焦点的椭圆 E 经过动点 P．若 $\angle AOB=30^\circ$，则椭圆 E 离心率的范围是 D

A. $(0,\frac{2}{3}]$　　B. $(\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$　　C. $(\frac{1}{2},\frac{2\sqrt{7}}{7}]$　　D. $(0,\frac{2\sqrt{7}}{7}]$

8．与平面角的概念类似，我们用立体角刻画空间中物体对于定点的张角．其定义如下：以观测点为球心，作半径为 1 的单位球面，任意物体投影到该单位球面上的投影面积，即为该物体相对于该观测点的立体角，通常用Ω表示．例如，半球面对于球心的立体角$\Omega=2\pi$，整球面对于球心的立体角$\Omega=4\pi$．如图所示，我国2020年投入使用的500米口径球面射电望远镜（简称 FAST），是中国国家“十一五”重大科技基础设施建设项目．该望远镜的主体部分可以视为某与地面平行的平面截球面所得，且截面圆直径$D=500\text{m}$，对于球心的立体角Ω约为$110^\circ\sim120^\circ$，则可以估算得 FAST 的高约为 B

A. 80m　　B. 130m　　C. 180m　　D. 230m

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．下列有关统计学相关概念的说法，正确的是 AC

A. 若随机变量 X 满足 $P(X=k)=\mathrm{C}_n^k p^{n-k}(1-p)^k$，$k=0,1,\cdots,n$，则 X 服从二项分布

B. 设$a_1,a_2,\cdots,a_{20}$是严格单调递增的一组数据，则这组数据的上四分位数为a_{15}

C. 正态密度函数为单峰函数，且峰值与标准差σ成反比

D. 在一元回归模型$Y=bx+a+e$中，随机误差e满足$E(e)=c\neq0$，$D(e)=\sigma^2$

10．若单位向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是平面$\alpha$的一组基，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，则 BD

A. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$　　C. $|\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{d}|\geq2\sqrt{2}$　　D. $|\boldsymbol{c}|+\sqrt{3}|\boldsymbol{d}|\leq4$

11．在$\triangle ABC$中，A,B,C所对的边分别为a,b,c，G是$\triangle ABC$的重心．则下列能说明$\triangle ABC$一定是等腰三角形的条件是 AD

A. $\sin A=\sin B$　　B. $c=a\cos B$　　C. $\sin2A=\sin2B$　　D. $AG\perp BC$

12．非空集合A,B满足$A\cup B=\{1,2,\cdots,10\}$，且$A\cap B$中元素个数不大于$1$．定义集合$A\pm B=\{x\pm y\,|\,x\in A,y\in B\}$，$A\setminus B=\{x\,|\,x\in A,x\notin B\}$，则 ACD

A. 集合A,B中元素个数之和为10或11　　B. 集合$A-B$中元素个数最多为17

C. 集合$A+B$中元素个数最多为18　　D. 集合$A\setminus B$中元素个数最多为9

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若n为正整数，且$(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$的展开项中有常数项，则$n$的最小值为________．5

14. 若α满足$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{3}$，则$\sin 2\alpha=$________．$-\frac{4}{5}$

15. 设正方形$ABCD$的边长为2，E为AD的中点，将$\triangle AEB$和$\triangle DEC$分别沿EB,EC折起，使得A,D两点重合于P，则三棱锥$P-EBC$的体积为________．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

16. 过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1\ (a>0)$的左顶点$M$作互相垂直的两条直线$l_1,l_2$，分别与双曲线交于$A,B$两点，若直线$AB$与$x$轴平行，则$a=$________；设点$M$到直线$AB$的距离为$d$，则$\frac{d}{|AB|}$的取值范围是________．　1；$(0,\frac{1}{2})$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

设数列$\{a_n\}$满足：对任意正整数n，有$a_1+\frac{a_2}{9}+\frac{a_3}{9^2}+\cdots+\frac{a_n}{9^{n-1}}=n$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$a_nb_n=n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n.

解：（1）由题意，令$n=1$，得$a_1=1$.

$n>1$时，$(a_1+\frac{a_2}{9}+\frac{a_3}{9^2}+\cdots+\frac{a_n}{9^{n-1}})-(a_1+\frac{a_2}{9}+\frac{a_3}{9^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{9^{n-2}})=n-(n-1)=1$.

因此$\frac{a_n}{9^{n-1}}=1$，$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=9^{n-1}\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

（2）由（1）及条件可得，$b_n=\frac{n}{9^{n-1}}=n\cdot(\frac{1}{9})^{n-1}$.

因此$S_n=1\times(\frac{1}{9})^0+2\times(\frac{1}{9})^1+\cdots+n\times(\frac{1}{9})^{n-1}$　　①

$\frac{1}{9}S_n=1\times(\frac{1}{9})^1+2\times(\frac{1}{9})^2+\cdots+n\times(\frac{1}{9})^n$　　②

①－②得：$\frac{8}{9}S_n=1+(\frac{1}{9})^1+(\frac{1}{9})^2+\cdots+(\frac{1}{9})^{n-1}-n\times(\frac{1}{9})^n=\frac{1-(\frac{1}{9})^n}{1-\frac{1}{9}}-n\times(\frac{1}{9})^n$，

化简得$S_n=\frac{81}{64}[1-(\frac{1}{9})^n]-\frac{9n}{8}\cdot(\frac{1}{9})^n$.

18.（12 分）

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，B 为直角顶点，a,b,c 分别为 A,B,C 所对的边，且 $b=\dfrac{5}{7}(a+c)$.

（1）求 $\cos A\cos C$；

（2）设点 A',B',C' 满足 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC'}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA'}$，$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB'}$. 记 $\triangle A'B'C'$ 的面积为的 S_1，$\triangle ABC$ 的面积为 S_2，求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的值.

注：（秦九韶公式）三边长分别为 a,b,c 的三角形面积 $S=\sqrt{\dfrac{1}{4}[a^2c^2-(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2})^2]}$.

解：（1）由条件及正弦定理，得 $\sin A+\sin C=\dfrac{7}{5}\sin B=\dfrac{7}{5}$.

又 A 与 C 互余，故 $\sin A+\sin C=\sin A+\sin(\dfrac{\pi}{2}-A)=\sin A+\cos A=\dfrac{7}{5}$.

两边平方得 $1+2\sin A\cos A=\dfrac{49}{25}$，

故 $\cos A\cos C=\cos A\cos(\dfrac{\pi}{2}-A)=\sin A\cos A=\dfrac{1}{2}(\dfrac{49}{25}-1)=\dfrac{12}{25}$.

（2）在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$0<\angle BAC<\dfrac{\pi}{2}$，联立 $\begin{cases}\sin\angle BAC+\cos\angle BAC=\dfrac{7}{5}\\ \sin^2\angle BAC+\cos^2\angle BAC=1\end{cases}$，

解得 $\cos\angle BAC=\dfrac{3}{5}$ 或 $\cos\angle BAC=\dfrac{4}{5}$.

①若 $\cos\angle BAC=\dfrac{3}{5}$，不妨设 $AC=5$，则 $AB=3$，$BC=4$，$S_2=\dfrac{1}{2}\times3\times4=6$.

在 $\triangle A'BC'$ 中，$BC'=AB=3$，$A'B=2BC=8$，$\cos\angle A'BC'=\cos(\pi-\angle ABC)=0$，

由余弦定理，$A'C'=\sqrt{BC'^2+BA'^2-2BC'\cdot BA'\cdot\cos\angle A'BC'}=\sqrt{73}$；

同理可得 $A'B'=6\sqrt{5}$，$B'C'=\sqrt{97}$，代入秦九韶公式得 $S_1=42$，故 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{42}{6}=7$.

②若 $\cos\angle BAC=\dfrac{4}{5}$，不妨设 $AC=5$，则 $AB=4$，$BC=3$，$S_2=\dfrac{1}{2}\times4\times3=6$.

同①计算得 $A'C'=2\sqrt{13}$，$A'B'=\sqrt{145}$，$B'C'=\sqrt{153}$，故 $S_1=42$，仍有 $\dfrac{S_1}{S_2}=7$.

综上所述，$\dfrac{S_1}{S_2}=7$.

注：若考生使用纯几何做法，只要过程合理，步骤清晰完整，也给分.

19.（12 分）

在空间四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AB\perp CD$，$BC\perp CD$，$AD=2$.

（1）若 $AB=BC=CD$，求异面直线 BC 和 AD 所成角的余弦值；

（2）若 A,B,C,D 均在球 O 上，求球 O 的半径和四面体 $ABCD$ 体积的最大值

解：（1）设异面直线 BC 和 AD 所成角为 θ，

则 $|\cos\theta|=\dfrac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|}$.

由于 $AB\perp BC$，$AB\perp CD$，$BC\perp CD$，故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

于是 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2}$.

而 $AB=BC=CD$，故 $|\cos\theta|=\dfrac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{\overrightarrow{BC}^2}{|\overrightarrow{BC}|\cdot\sqrt{3}|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

即异面直线 BC 和 AD 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）因为 $AB\perp BC$，$AB\perp CD$，$BC,CD\subset$ 平面 BCD，且 $BC\cap CD=C$，

故 $AB\perp$ 平面 BCD. 又 $BD\subset$ 平面 BCD，故 $AB\perp BD$，$\triangle ABD$ 为直角三角形.

又因为 $AB\perp BC$，$BC\perp CD$，因此 $\triangle ABC$、$\triangle BCD$ 都是直角三角形.

由勾股定理，$AD^2=AB^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2=AC^2+CD^2$.

由勾股定理的逆定理知，$\triangle ACD$ 也是直角三角形.

因此 AD 的中点 M 满足：$MA=MB=MC=MD=\dfrac{1}{2}AD$，故 M 即是球心 O，

球 O 的半径 $r=\dfrac{1}{2}AD=1$.

四面体 $ABCD$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}AB\times S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{6}AB\times BC\times CD$.

利用三个正数的算术−几何平均不等式：对任意正数 x,y,z，

有不等式 $\sqrt{xyz}\leqslant\dfrac{x+y+z}{3}$ 成立；当且仅当 $x=y=z$ 时，上述不等式取等号.

令上面不等式中 $x=AB^2$，$y=BC^2$，$z=CD^2$，可以得到

$\dfrac{4}{3}=\dfrac{AB^2+BC^2+CD^2}{3}\geqslant\sqrt[3]{AB^2\times BC^2\times CD^2}=(AB\times BC\times CD)^{\frac{2}{3}}$，

当且仅当 $x=y=z$，即 $AB=BC=CD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，上述不等式取等号.

因此，当 $AB=BC=CD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，四面体 $ABCD$ 体积取到最大值 $\dfrac{4}{27}\sqrt{3}$.

20.（12 分）

根据以往的经验，某工程施工期间的降水量 X（单位：mm）对工期的影响如下表：

降水量 X	$[0,300)$	$[300,600)$	$[600,900)$	$[900,+\infty)$
工期延误天数 Y	0	2	5	8

历史气象资料表明：该工程施工期间降水量 X 小于 $300,600,900$ 的概率分别为 0.3, $0.7,0.9$.

（1）求工期延误天数 Y 的均值与方差；

（2）求在降水量 X 至少是 300 的条件下，工期延误不超过 5 天的概率；

（3）由于该工程在 $7\sim8$ 月施工，故当气温较高时，工人可能无法按时完成当日计划工作量. 已知在某个 40 天的施工周期内，有 30 天的最高气温不低于 $35^\circ\mathrm{C}$，这其中仅有 12 天完成了当日的工作量；剩余 10 天中，有 8 天完成了当日的工作量. 依据小概率值 $\alpha=0.005$ 的 χ^2 独立性检验，判断“当日最高气温不低于 $35^\circ\mathrm{C}$”和“工人能完成当日的工作量”是否相互独立，并写出零假设.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+c)(b+d)(b+c)(a+d)}$，临界值 $x_{0.005}=7.879$.

解：（1）由题，$P(X\in[0,300))=0.3$，$P(X\in[300,600))=0.7-0.3=0.4$，

$P(X\in[600,900))-\ 0.9$ ，$P(X\in[900,+\infty))=1-0.9=0.1$.

对应有 $P(Y=0)=0.3$，$P(Y=2)=0.4$，$P(Y=5)=0.2$，$P(Y=8)=0.1$.

因此 $E(Y)=0\times0.3+2\times0.4+5\times0.2+8\times0.1=2.6$，

$D(Y)=0.3\times(0-2.6)^2+0.4\times(2-2.6)^2+0.2\times(5-2.6)^2+0.1\times(8-2.6)^2=6.24$.

（2）记事件 A：降水量 X 至少是 300；事件 B：工期延误不超过 5 天.

故所求概率 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.4+0.2}{0.4+0.2+0.1}=\dfrac{6}{7}$.

（3）记零假设为 H_0. 由题可写出零假设如下：

H_0：“当日最高气温不低于 $35^\circ\mathrm{C}$”和“工人能完成当日的工作量”相互独立.

根据题意可以得到如下的 2×2 列联表：

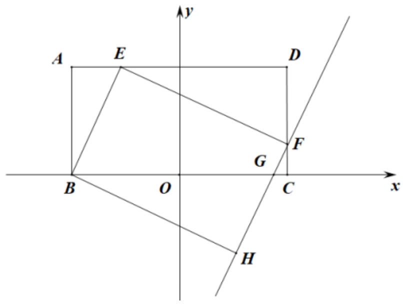
	工人完成当日工作量	工人未完成当日工作量
最高气温低于 $35^\circ\mathrm{C}$	8	2
最高气温不低于 $35^\circ\mathrm{C}$	12	18

故 $\chi^2=\dfrac{40\times(8\times18-2\times12)^2}{10\times30\times20\times20}=4.8<x_{0.005}=7.879$，$H_0$ 不能被推翻.

因此，可以认为“当日最高气温不低于 $35^\circ\mathrm{C}$”和“工人能完成当日的工作量”相互独立.

21.（12 分）

如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，矩形 $ABCD$ 的顶点坐标分别为 $A(-2,2)$，$B(-2,0)$，$C(2,0)$，$D(2,2)$．点 E,F,G 分别为线段 AD,CD,BC 上一点（不含端点），且满足 $BE\perp EF$，$EF\perp FG$．



（1）若点 E 在第二象限，求 $|CG|$ 的最大值；

（2）过点 B 作直线 FG 的垂线，垂足为点 H，求 H 的轨迹方程.

解：（1）设 $E(t-2,2)$，则 $|AE|=t$，且点 E 在第二象限，从而 $0<t<2$．

由于四边形 $BEFH$ 为矩形，且 $BE\perp EF$，$EF\perp FG$，故 $\triangle BAE\backsim\triangle EDF\backsim\triangle FCG$．

所以 $\dfrac{|AB|}{|AE|}=\dfrac{|DE|}{|DF|}=\dfrac{|CF|}{|CG|}$，可得 $|DF|=\dfrac{|DE|\cdot|AE|}{|AB|}=\dfrac{t(4-t)}{2}$，

$$|CG|=\frac{|CF|\cdot|AE|}{|AB|}=\frac{[2-\frac{t(4-t)}{2}]\cdot t}{2}=\frac{1}{4}(t^3-4t^2+4t).$$

设 $f(t)=t^3-4t^2+4t$，$f'(t)=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$.

因此 $f(t)$ 在 $(0,\dfrac{2}{3})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{2}{3},2)$ 上单调递减，

所以，当 $|AE|=\dfrac{2}{3}$ 时，$|CG|_{\max}=f(\dfrac{2}{3})=\dfrac{8}{27}$.

（2）由题，四边形 $BEFH$ 为矩形，因此 $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{EF}$.

由于点 E,F 不为对应线段的端点，则 $t\in(0,2)\cup(2,4)$.

由（1）可得 $E(t-2,2)$，$F(2,2-\dfrac{t(4-t)}{2})$，$\overrightarrow{EF}=(4-t,-\dfrac{t(4-t)}{2})=\overrightarrow{BH}$，

因此点 H 的坐标为 $(2-t,-\dfrac{t(4-t)}{2})$．因为 $-\dfrac{t(4-t)}{2}=\dfrac{[-2+(2-t)][2+(2-t)]}{2}$，

故 H 的横坐标 x_H 和纵坐标 y_H 满足 $y_H=\dfrac{(-2+x_H)(2+x_H)}{2}$，

即 H 在抛物线 $y=\dfrac{x^2-4}{2}$ 上．注意到 $x_H=2-t\in(-2,0)\cup(0,2)$，

故 H 的轨迹方程为：$y=\dfrac{x^2-4}{2}$，$x\in(-2,0)\cup(0,2)$

注：若考生在（1）使用三个正数的算术−几何平均不等式，并说明取等条件，亦可.

22.（12 分）

设函数 $f(x)=\log_a x+ax\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的零点个数；

（2）设 $a_n=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^n$，求证：$\forall n\in\mathbf{N}^*$，有 $\mathrm{e}\ln(1+n)<a_1+a_2+\cdots+a_n\leq 2+\mathrm{e}\ln n$.

解：（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，对任意 $a>0$ 都有 $f(\frac{1}{a})=-1+1=0$.

对 $f(x)$ 求导数得 $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}+a=\frac{ax\ln a+1}{x\ln a}$.

①若 $a>1$，则 $x\ln a>0$，$ax\ln a+1>0$，

故 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 只有一个零点 $\frac{1}{a}$；

②若 $0<a<1$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=-\frac{1}{a\ln a}$．结合分母 $x\ln a<0$ 得：

x	$(0,-\frac{1}{a\ln a})$	$-\frac{1}{a\ln a}$	$(-\frac{1}{a\ln a},+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小	↗

因此 $f(x)$ 的最小值为 $f(-\frac{1}{a\ln a})=\frac{\ln(-\frac{1}{a\ln a})}{\ln a}-\frac{1}{\ln a}=\frac{-\ln a-\ln(-\ln a)-1}{\ln a}$.

设 $g(t)=t-\ln t-1$，$g(1)=0$，$g'(t)=1-\frac{1}{t}$，

因此 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$g(t)\geq g(1)=0$.

令 $t=-\ln a\in(0,+\infty)$，得 $f(-\frac{1}{a\ln a})=\frac{g(t)}{-t}\leq 0$，当且仅当 $a=\mathrm{e}^{-1}$ 时等号成立.

（i）当 $a=\mathrm{e}^{-1}$ 时，$f(x)$ 只有一个零点 e；

（ii）当 $0<a<\mathrm{e}^{-1}$ 时，$f(1)=a>0$，$f(-\frac{1}{a\ln a})<0$，故 $f(x)$ 在 $(1,-\frac{1}{a\ln a})$ 上有一根 x_1，另一根为 $\frac{1}{a}$；

（iii）当 $\mathrm{e}^{-1}<a<1$ 时，一根为 $\frac{1}{a}$；又由于 $x>0$ 时，$\ln x<\sqrt{x}$，

故 $f(x)>\frac{\sqrt{x}}{\ln a}(1+a\sqrt{x}\ln a)$，所以 $f(\frac{1}{a^2\ln^2 a})>0$． 因此 $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{a\ln a},\frac{1}{a^2\ln^2 a})$ 上有一根 x_2．

综上所述，当 $a\in\{e^{-1}\}\cup(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 有一个零点；

当 $a\in(0,e^{-1})\cup(e^{-1},1)$ 时，$f(x)$ 有两个零点.

（2）由（1）知，$\ln(1+\frac{1}{n})^n=n\ln(1+\frac{1}{n})<n\cdot\frac{1}{n}=1$，故 $a_n\le(1+\frac{1}{n})^n<e$．

又当 $x\ne e$ 时，$-\ln x+\frac{x}{e}>0$，故 $x>e\ln x$．

令 $x=(1+\frac{1}{n})^n$，得 $a_n>\frac{e}{n}\cdot n[\ln(n+1)-\ln n]=e[\ln(n+1)-\ln n]$．

所以，$a_1+a_2+\cdots+a_n>e\{(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]\}=e\ln(n+1)$；

另一方面，$a_n=\frac{1}{n}e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}<\frac{1}{n}e^{n(1-\frac{n}{n+1})}=\frac{e}{n}\cdot\frac{1}{e^{\frac{1}{n+1}}}<e\cdot\frac{n+1}{n(n+2)}<\frac{e}{n}$，

其中前两个不等号应用不等式 $\ln x>1-\frac{1}{x}\ (x\ne 1)$ 和 $e^x>x+1\ (x\ne 0)$ 可以得到.

而当 $n>1$ 时，有 $\frac{e}{n}=e(1-\frac{n-1}{n})<e\ln(1+\frac{1}{n-1})=e[\ln n-\ln(n-1)]$．

因此 $n=1$ 时，$a_1=2\le 2+e\ln 1$ 成立；当 $n\ge 2$ 时，$a_1+a_2+\cdots+a_n<$ $2+e\{(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+[\ln n-\ln(n-1)]\}=2+e\ln n$． 至此，不等式得证.