绝密★启用前

2022 届星云教学联盟高三年级第一次线上联考

数学试题参考答案与评分标准

一、选择题

1．A　　2．C　　3．D　　4．B

5．D　　6．D　　7．C　　8．B

二、选择题

9．AC　　10．ABD　　11．BC　　12．AD

三、填空题

13．$\dfrac{1}{4}$　　14．$\dfrac{e^x}{x^3}$（答案不唯一）

15．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　16．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$[\dfrac{11-6\sqrt{3}}{3},\dfrac{19}{3}]$

四、解答题

17．解：

（1）由 $\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{2a}{c}$ 及正弦定理得

$$\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{2\sin A}{\sin C},$$ （1 分）

所以 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin A\sin B$.

结合 $A+B+C=\pi$，得

$$\sin A=\sin(\pi-B-C)=\sin(B+C)$$
$$=\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin A\sin B .$$

因为 $A,B,C\in(0,\pi)$，所以 $\sin A>0$， $\sin B>0$， $\sin C>0$. （2 分）

于是 $\sin B=\dfrac{1}{2}$，所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$. （3 分）

因为 $\tan A=4\sqrt{3}>\sqrt{3}$，所以 $A>\dfrac{\pi}{3}$. （4 分）

所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$. （5 分）

（2）由 $\tan A=4\sqrt{3}$，得 $\sin A=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$， $\cos A=\dfrac{1}{7}$. （6 分）

由正弦定理得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},$$ （7 分）

所以 $a=8\sqrt{3}$. （8 分）

由（1）知

$$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{13}{14}.\qquad（9 分）$$

由三角形面积公式得

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=26\sqrt{3}.\qquad（10 分）$$

18．**解：**

（1）由 $\{a_n\}$ 是常数列及 $a_{n+1}=a_n^2$ 得 $a_n^2=a_n$．（1 分）

所以 $a_n=0$ 或 $a_n=1$．

因此 $a=0$ 或 1．（3 分）

（2）（ⅰ）由 $a=2$ 及 $a_{n+1}=a_n^2$ 得 $a_n\geqslant 2$．（4 分）

所以 $\log_2 a_{n+1}=\log_2 a_n^2=2\log_2 a_n$，且 $\log_2 a_n>0$．（5 分）

所以 $\{\log_2 a_n\}$ 是以 1 为首项，公比为 2 的等比数列．（7 分）

（ⅱ）由（ⅰ）知 $\log_2 a_n=2^{n-1}$．所以

$$b_n=\frac{\log_2 a_{n+1}}{(\log_2 a_{n+1}-1)(\log_2 a_{n+2}-1)}=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}.\qquad（10 分）$$

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n=(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1})=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}=\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}.\qquad（12 分）$$

19．**解：**

（1）连接 SO．根据圆锥的性质得 $SO\perp$ 平面 ABC．

因为 $BC\subset$ 平面 ABC，所以 $BC\perp SO$．（1 分）

因为⊙O 的内接三角形△ABC 为等边三角形，所以 $BC\perp OA$．（2 分）

因为 $SO\cap OA=O$，所以 $BC\perp$ 平面 SOA．（3 分）

而 $SA\subset$ 平面 SOA，因此 $SA\perp BC$．（4 分）

（2）由（1）知 SO、OA、BC 两两垂直．

以 O 为原点建立如图所示的空间直角坐标系．（5 分）

由圆锥的侧面展开图恰好为半圆得

$$\pi\cdot SA=2\pi\cdot OA$$

所以 $SA=2OA=4$．（6 分）

在 Rt△SOA 中，由勾股定理得 $SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=2\sqrt{3}$．

于是 $A(0,0,2)$，$B(-\sqrt{3},-1,0)$，$C(\sqrt{3},-1,0)$，$S(0,0,2\sqrt{3})$．（7 分）

由 D 是底面⊙O 上可设 $D(2\cos\theta,2\sin\theta,0)(\theta\in\mathbf{R})$．

于是 $\overrightarrow{SD}=(2\cos\theta,2\sin\theta,-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(2\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{CS}=(-\sqrt{3},1,2\sqrt{3})$．

由 $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{ES}$ 得 $\overrightarrow{SE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}=(\dfrac{2}{3}\cos\theta,\dfrac{2}{3}\sin\theta,-\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$．

所以 $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SE}=(\dfrac{2}{3}\cos\theta-\sqrt{3},\dfrac{2}{3}\sin\theta+1,\dfrac{4\sqrt{3}}{3})$．（8 分）

平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$．

设平面 EBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$．由 $\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CE}=0$ 得

$$\begin{cases}2x=0\\(\dfrac{2}{3}\cos\theta-\sqrt{3})x+(\dfrac{2}{3}\sin\theta+1)y+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}z=0\end{cases}.$$

解得 $\begin{cases}x=0\\(2\sin\theta+3)y=-4\sqrt{3}z\end{cases}$，不妨取 $\boldsymbol{n}_2=(0,-4\sqrt{3},2\sin\theta+3)$．（9 分）

设二面角 $A-BC-E$ 为 φ．由图可知

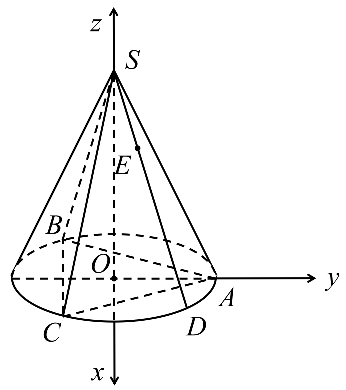
$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2\sin\theta+3}{\sqrt{1}\times\sqrt{48+(2\sin\theta+3)^2}}.$$（10 分）

记 $t=2\sin\theta+3\in[1,5]$，则

$$\cos\varphi=\frac{t}{\sqrt{48+t^2}}=\sqrt{\frac{1}{\dfrac{48}{t^2}+1}}\geqslant\sqrt{\frac{1}{48+1}}=\frac{1}{7}.$$（11 分）

当且仅当 $\sin\theta=-1$，即点 D 位于劣弧 BC 中点时，等号成立.

因此二面角 $A-BC-E$ 余弦值的最小值是 $\dfrac{1}{7}$．（12 分）



20．解：

（1）选择的回归模型是 $\hat{A}=b\lg p+a$．（1 分）

由题设数据，利用最小二乘法得到

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{10}A_iq_i-10\overline{A}\overline{q}}{\sum_{i=1}^{10}q_i^2-10\overline{q}^2}=\frac{84000-10\times360\times10}{2500-10\times10^2}=32,$$ （4 分）

$$\hat{a}=\overline{A}-\hat{b}\overline{q}=360-32\times10=40.$$ （6 分）

因此中间变量 A 与降雨重现期 p 的线性回归方程为 $\hat{A}=32\lg p+40$.

结合题设知暴雨强度 i、降雨历时 t、降雨重现期 p 具有的函数关系是

$$i=\frac{32\lg p+40}{(t+20)^{0.85}}.$$ （8 分）

（2）由题设可取 $i=3.4$ mm/min，$t=60$ min 代入（1）中函数关系，得

$$3.4=\frac{32\lg p+40}{(60+20)^{0.85}}.$$

所以 $p=10^{\frac{3.4\times40-40}{32}}=1000$（年）. （10 分）

因此可以认为"今年河南的暴雨千年一遇". （12 分）

21．**解：**

$f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$. 求导得 $f'(x)=a\ln x-x+\dfrac{1}{x}$. （1 分）

令 $g(x)=f'(x)$，得 $g'(x)=-\dfrac{x^2-ax+1}{x^2}$. （2 分）

注意到 $f(1)=f'(1)=0$.

（1）当 $a=2$ 时，注意到 $g'(x)=-\dfrac{x^2-2x+1}{x^2}=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\leqslant0$，且等号成立当且仅当 $x=1$.

因此 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. （3 分）

所以在 $(0,1)$ 上 $f'(x)>f(1)=0$，在 $(1,+\infty)$ 上 $f'(x)<f(1)=0$.

因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

于是 $f(x)\leqslant f(1)=0$. （4 分）

（2）（ⅰ）①若 $a\leqslant0$，则 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

由（1）知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$f(x)$ 有且仅有 1 个极值点，不合题意.

②若 $0<a<2$，因为二次函数 $y=x^2-ax+1$ 的判别式 $\Delta=a^2-4<0$，所以 $g'(x)<0$ 恒成立，$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

由（1）知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$f(x)$ 有且仅有 1 个极值点，不合题意.

③若 $a=2$，由（1）知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$f(x)$ 有且仅有 1 个极值点，不合题意. （5 分）

④若 $a>2$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$.

记 $x_A=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$， $x_B=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，结合二次函数 $y=x^2-ax+1$ 的图象可知，在 (x_A,x_B) 上 $g'(x)>0$，在 $(0,x_A)\cup(x_B,+\infty)$ 上 $g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,x_A)$，$(x_B,+\infty)$ 上分别单调递减，在 (x_A,x_B) 上单调递增. （6 分）

因此 $f'(x_A)<f'(1)=0$， $f'(x_B)>f'(1)=0$.

当 $x\in(0,1)$ 时，因为 $\ln x\leqslant x-1<x$，所以 $\ln x=-2\ln\sqrt{\dfrac{1}{x}}>-2\sqrt{\dfrac{1}{x}}$.

取 $x_0<\dfrac{9}{64a^2}<\dfrac{1}{2}$，则 $x_0<\dfrac{1}{4x_0}$， $\dfrac{2a}{\sqrt{x_0}}<\dfrac{3}{4x_0}$，

则 $f'(x_0)>-\dfrac{2a}{\sqrt{x_0}}-x_0+\dfrac{1}{x_0}=(\dfrac{1}{4x_0}-x_0)+(\dfrac{3}{4x_0}-\dfrac{2a}{\sqrt{x_0}})>0$.

由零点存在性定理，$\exists$ 唯一 $x_1\in(0,x_A)$， $f'(x_1)=0$.

即 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有且仅有一个变号零点 x_1. （7 分）

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，因为 $f'(\dfrac{1}{x_1})=a\ln\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_1}+x_1=-(a\ln x_1-x_1+\dfrac{1}{x_1})=0$，且 $f'(x)$ 在 $(x_B,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有且仅有一个变号零点 $\dfrac{1}{x_1}$.

此时 $x_1,x_2=1,x_3=\dfrac{1}{x_1}$ 是 $f(x)$ 的极值点.

综上，实数 a 的取值范围是 $(2,+\infty)$. （8 分）

（ii）由（i）知 $f(x)$ 恰好有 3 个极值点当且仅当 $a>2$.

此时我们有 $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_3}+\dfrac{x_3}{x_1}=x_3^2+\dfrac{2}{x_3}$. （9 分）

设 $h(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$，则我们只需要证明 $h(x_3)>a^2-4a+7$.

求导得 $h'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}$，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

注意到 $x_3>x_B=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}>a-1>1$，所以 $h(x_3)>(a-1)^2+\dfrac{2}{a-1}$. （10 分）

因此我们只需要证明 $(a-1)^2+\dfrac{2}{a-1}>a^2-4a+7$.

实际上，上式等价于 $(a-2)^2>0$ ，显然成立．因此原不等式得证． （12 分）

22．**解**：

（1）令 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 为 C 的半焦距，由题设得 $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=2\\a+c=3\end{cases}$. （2 分）

解得 $\begin{cases}a=1\\b=\sqrt{3}\\c=2\end{cases}$. 所以 C 的标准方程是 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$. （4 分）

（2）（ i ）由题设得 $B(-x_0,-y_0)$ ， $E(-\dfrac{5}{3}x_0,y_0)$.

所以直线 BF 的方程是 $y=-3\dfrac{y_0}{x_0}x-4y_0$. 把它代入 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 得

$$(\frac{9y_0^2}{x_0^2}-3)x^2+\frac{24y_0^2}{x_0}x+(16y_0^2+3)=0 .$$ （5 分）

直线 BF 与 C 有 2 个交点，则 $\dfrac{9y_0^2}{x_0^2}-3\neq 0$.

由韦达定理得 $x_F\cdot(-x_0)=\dfrac{16y_0^2+3}{\dfrac{9y_0^2}{x_0^2}-3}$ ，解得 $x_F=\dfrac{16y_0^2+3}{3x_0-\dfrac{9y_0^2}{x_0}}$. （7 分）

所以 $y_F=-3\dfrac{y_0}{x_0}x-4y_0>0$ ，得 $x_F<-\dfrac{4}{3}x_0<0$ 已经成立.

因此只需要 $x_F=\dfrac{16y_0^2+3}{3x_0-\dfrac{9y_0^2}{x_0}}<-\dfrac{4}{3}x_0$ ，解得 $x_0>\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

所以 x_0 的取值范围是 $(\dfrac{3\sqrt{2}}{4},+\infty)$. （8 分）

（ii ）由（ i ）可知

$$k_{AF}=\frac{y_0+3\dfrac{y_0}{x_0}x_F+4y_0}{x_0-x_F}=\frac{-3\dfrac{y_0}{x_0}(x_0-x_F)+8y_0}{x_0-x_F}$$

$$=-3\frac{y_0}{x_0}+\frac{8y_0}{x_0+\dfrac{16y_0^2+3}{\dfrac{9y_0^2}{x_0}-3x_0}}=-3\frac{y_0}{x_0}+\frac{\dfrac{72y_0^3}{x_0}-24x_0y_0}{9y_0^2+16y_0^2+3-3x_0^2}$$

$$=-3\frac{y_0}{x_0}+\frac{\dfrac{72y_0^3}{x_0}-24x_0y_0}{24y_0^2}=-3\frac{y_0}{x_0}+\frac{72y_0}{24x_0}-\frac{24x_0y_0}{24y_0^2}=-\frac{x_0}{y_0}.$$

所以 $k_{AF}k_{OA}=-1$，即 $\angle OAF=\frac{\pi}{2}$.（11 分）

因为 $\tan\angle BAE=k_{OA}=\frac{y_0}{x_0}=\sqrt{3(1-\frac{1}{x_0^2})}\in(\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3})$，

所以 $\angle BAE\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$.

因此 AE 不可能是 $\angle BAF$ 的三等分线.（12 分）