

2022 届星云教学联盟高三年级第一次线上联考

数 学

本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分。考试时间为 2021 年 8 月 1 日 15:00—17:00，共 120 分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的准考证号填写在答题卡上。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案。
4. 考生必须保持答题卡的清洁。考试结束后，考生有 10 分钟的时间提交自己的答题卡，逾期提交答题卡的成绩无效。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 i 是虚数单位，复数 z 满足 $z + 2\bar{z} = 3 - 6i$ ，则 $z =$
A. $1 + 6i$ B. $1 - 6i$ C. $1 + 2i$ D. $1 - 2i$
2. 若抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点 $A(6, y_0)$ 到焦点的距离为 8，则 $p =$
A. 1 B. 2 C. 4 D. 8
3. 已知 M, N 是全集 U 的两个非空子集. 若 $M \cap (\complement_U N) = M$ ，则下列说法可能正确的是
A. $M \cup (\complement_U N) = U$ B. $(\complement_U M) \cup N = M$ C. $M \cap N \neq \emptyset$ D. $M \cup N = U$
4. 如图是藏于清华大学的“算表”. 算表距今已有 2300 余年历史，它能够快速进行 100 以内任意两整数的乘除运算，其计算能力远强于人们熟知的“九九乘法表”. 算表是迄今为止发现的人类最早的十进制计算器，表明当时中国的数学研究水平已经初具规模.

下以计算 22×35 为例，解释算表的大致原理：

- ①将 22 分为 2 和 20；将 35 分为 5 和 30；
- ②在算表第 1 行分别找到 2 和 20；在算表第 1 列找到 5 和 30；
- ③分别在算表中找到 2 和 5、30 及 20 和 5、30 的交叉点所对应的数字；
- ④将 4 个对应的数字相加，得 $22 \times 35 = 10 + 60 + 100 + 600 = 770$.



$\times$	2	10	20
5	10	...	100
10	...	...	...
30	60	...	600

如果从现代数学体系来看，该计算方法所利用的公理是

- A. 加法交换律 B. 乘法分配律 C. 加法结合律 D. 乘法交换律

5. 若 $\frac{\sin 2\alpha}{3\cos\alpha - 1} = \tan\alpha$, 则 $\cos\alpha$ 的值为
- A. 1 或 $\frac{1}{2}$ B. -1 或 $-\frac{1}{2}$ C. -1 或 $\frac{1}{2}$ D. ± 1 或 $\frac{1}{2}$
6. 已知随机变量 $X \sim N(1, m) (m > 0)$, 则下列说法不正确的是
- A. 若 $P(X > m) = 0.5$, 则 $DX = 1$
- B. 若 $P(X \geq 2) = 0.3$, 则 $P(0 \leq x < 1) = 0.2$
- C. 不论 m 取何值, $EX = 1$ 总成立
- D. 根据“ 3σ 原则”, 在一次试验中, 事件“ $X \notin (1 - 3m, 1 + 3m)$ ”几乎不可能发生
7. 已知数列 $\{a_n\}$, 设 $p: a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ 三项既是等差数列, 又是等比数列; $q: \{a_n\}$ 是常数列. 则 p 是 q 的
- A. 充要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件
8. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续偶函数满足 $f(x+1) + f(-x+1) = 0$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$. 若函数 $g(x) = f(x) - kx + k (k \in \mathbf{R})$ 恰好有 5 个零点, 则实数 k 的取值范围是
- A. $\{-\frac{\sqrt{5}}{10}\} \cup (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ B. $\{-\frac{\sqrt{6}}{6}\} \cup (\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
- C. $\{-\frac{\sqrt{5}}{10}\} \cup (\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6})$ D. $\{-\frac{\sqrt{6}}{6}\} \cup (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

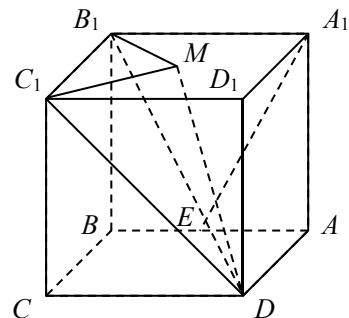
9. 对于一组样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 下列表达式中，能够刻画该组数据的离散程度的是

注： $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$; $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 和 $\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 分别表示 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中的最大值和最小值.

- A. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$ B. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})$
- C. $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} - \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ D. $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$
10. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $ab = 1$, 则
- A. $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq 4$ B. $a^b < \frac{3}{2}$ C. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2$ D. $\frac{a^2 + 3b^2}{b^2 + 1} \geq 2$

11. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, 点 M 为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 内部一点, 点 E 为棱 AB 中点, $C_1M \perp$ 平面 B_1DM . 则

- A. 异面直线 A_1E 和 C_1M 夹角的余弦值为 $\frac{1}{2}$
 B. 点 A_1 和点 C 到平面 B_1DM 的距离相等
 C. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 被平面 A_1EM 截得的截面为等腰梯形
 D. 三棱锥 C_1-B_1DM 外接球的半径为 $\sqrt{3}$



12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 2ax - \frac{2}{a}y + a^2 + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4} = 0 (a > 0)$, 直线 $l: x + y = 0$, AB 为圆 C 上一动弦, 且 $|AB|=1$. 则
- A. 当实数 a 变化时, 圆 C 最多能够经过 3 个象限
 B. 存在 $a > 0$, 使得直线 l 和圆 C 相交
 C. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的最小值是 $\frac{15}{4}$
 D. 点 A 到直线 l 距离的最小值是 $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若平面单位向量 a, b, c 满足 $c = 2(a + b)$, 则 $a \cdot c =$ _____.
14. 写出一个同时满足下列要求的连续函数 $f(x) =$ _____.

① $f(x)$ 的表达式中至少含有 e^x 、 $x^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 、 $\ln x$ 中的两个; ② 存在一个极值点 $x = 3$.

15. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 . 与 x 轴垂直的直线 l 经过 F_2 , 交 C 于 A, B 两点. 记 $|F_1F_2| = 2c$. 若 $\triangle ABF_1$ 内切圆的半径为 $\frac{c}{2}$, 则 C 的离心率为 _____.
16. 在四面体 $P-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, $PA \perp$ 平面 ABC , 且 $PA = 1$, 则点 A 到平面 PBC 的距离是 _____; 动点 M, N 分别在线段 PA (含端点) 上和 $\triangle PBC$ 所在平面中运动, 满足 $MN = 1$. 记 $\triangle ABC$ 的外心为 O , 则 ON^2 的取值范围是 _____. (本小题第一空 2 分, 第二空 3 分)

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别为 A, B, C 所对的边， $\frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} = \frac{2a}{c}$ ， $\tan A = 4\sqrt{3}$ 。

(1) 求 B ；

(2) 若 $b = 7$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积 S 。

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = a (a \in \mathbf{R})$ ， $a_{n+1} = a_n^2$ 。

(1) 若 $\{a_n\}$ 是常数列，求 a ；

(2) 已知 $a = 2$ 。

(i) 证明： $\{\log_2 a_n\}$ 是等比数列；

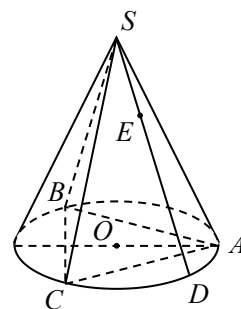
(ii) 设 $b_n = \frac{\log_2 a_{n+1}}{(\log_2 a_{n+1} - 1)(\log_2 a_{n+2} - 1)}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

19. (12 分)

如图，在圆锥 SO 中， $\odot O$ 的内接三角形 $\triangle ABC$ 为等边三角形， $OA = 2$ ，且圆锥的侧面展开图恰好为半圆。

(1) 证明： $SA \perp BC$ ；

(2) 点 D 是底面 $\odot O$ 上的一个动点， $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{ES}$ ，求二面角 $A-BC-E$ 余弦值的最小值。



20. (12 分)

近日，河南突降暴雨，郑州、驻马店等多地陷入灾情。习近平总书记对防汛救灾工作作出重要指示，各地迅速向河南伸出援手，体现了“一方有难，八方支援”的人间真情。

降雨重现期是指在一定年代的降雨量记录资料统计期间内，大于或等于某暴雨强度的降雨出现一次的平均间隔时间。现已知近年来郑州市暴雨强度 i (mm/min) 与降雨历时 t (min) 具有的关系大致是

$$i = \frac{A}{(t + 20)^{0.85}}.$$

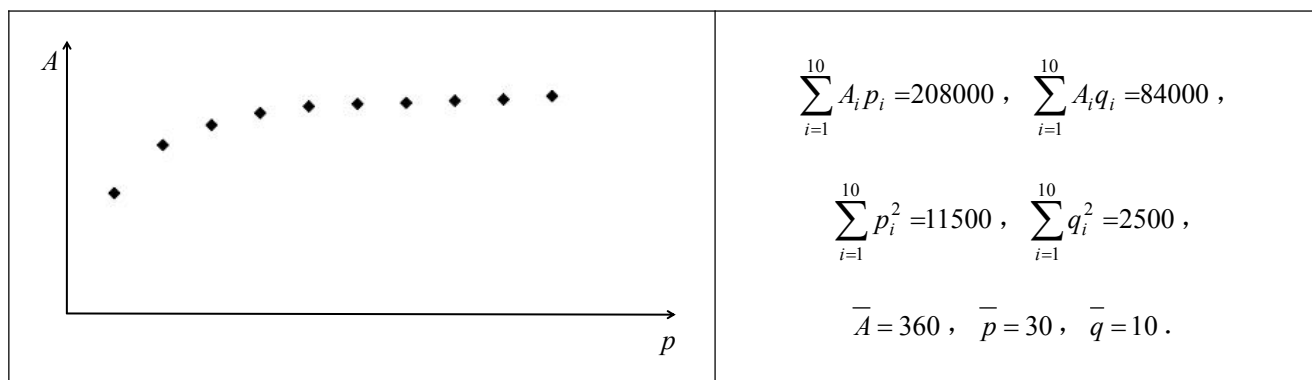
其中中间变量 A 与降雨重现期 p (年) 具有如图所示的关系。

现有两个回归模型可供选择：

①根据 A 与 p 成正相关关系，直接采用线性回归模型 $\hat{A} = bp + a$ ；

②根据 A 与 p 成正相关关系，且考虑模型拟合曲线的增减速率，采用回归模型 $\hat{A} = b \lg p + a$ 。

相关数据统计如下表（其中 $q_i = \lg p_i$ ）：



(1) 请选择合适的回归模型，求出暴雨强度 i (mm/min)、降雨历时 t (min)、降雨重现期 p (年) 具有的函数关系；

(2) 已知郑州 7 月 20 日 16 时—17 时降雨量曾经达到过 3.4 mm/min。请利用 (1) 得到的函数关系，分析“今年河南的暴雨千年一遇”这种说法的合理性。（参考数据： $80^{0.85} \approx 40$ ， $60^{0.85} \approx 30$ ）

附：对于一组数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$ ，其回归直线 $\hat{y} = bx + a$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$

21. (12 分)

设函数 $f(x) = (ax+1)\ln x - \frac{x^2}{2} - ax + a + \frac{1}{2} (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a=2$ 时, 证明: $f(x) \leq 0$;

(2) 已知 $f(x)$ 恰好有 3 个极值点 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$.

(i) 求实数 a 的取值范围;

(ii) 证明: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} > a^2 - 4a + 7$.

22. (12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点和右焦点的距离是 3, 且 C 的离心率是 2.

(1) 求双曲线 C 的标准方程;

(2) 点 $A(x_0, y_0)$ 是 C 上位于第一象限的一点, 点 A, B 关于原点 O 对称, 点 A, D 关于 y 轴对称. 延长 AD 至 E 使得 $|DE| = \frac{1}{3}|AD|$, 且直线 BE 和 C 的另一个交点 F 位于第二象限中.

(i) 求 x_0 的取值范围;

(ii) 证明: AE 不可能是 $\angle BAF$ 的三等分线.