2021年上海市高考数学试卷

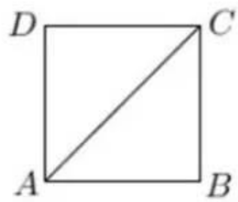
2021.06.07

一、填空题（本大题共12题，满分54分，第1-6题每题4分，第7∽12题每题5分）

1. 已知 $z_1=1+i, z_2=2+3i$，则 $z_1+z_2=$__________

2. 已知 $A=\{x\mid 2x\le 1\}, B=\{-1,0,1\}$，则 $A\cap B=$__________

3. 已知圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$，则该圆的圆心坐标为__________



4. 如图，正方形ABCD的边长为3，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$__________

5. 已知 $f(x)=\dfrac{3}{x}+2$，则 $f^{-1}(1)=$__________

6. 已知二项式 $(x+a)^5$ 展开式中，x^2 项的系数为80，则__________

7. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}x\le 3\\ 2x-y-2\ge 0\\ 3x+2y-8\ge 0\end{cases}$，则 $z=x-y$ 的最大值为__________

8. 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，满足 $a_1=3, b_n=a_{2n}$，a_{2n} 的各项和为9，则数列 $\{b_n\}$ 的各项和为__________

9. 已知圆柱的底面半径为1，高为2，AB为上底面圆的一条直径，C为下底面圆周上的—个动点，则的面积的取值范围为__________

10. 已知花博会有四个不同的场馆A、B、C、D，甲、乙两人每人选2个去参观，则他们的选择中，恰有一个场馆相同的概率为__________

11. 已知抛物线：$y^2=2px(p>0)$，若第一象限的A、B两点在抛物线上，焦点为F，$|AF|=2, |BF|=4, |AB|=3$，则直线AB的斜率为__________

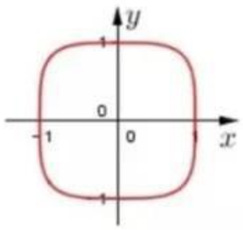
12. 已知 $a_i\in N^*(i=1,2,\ldots,9)$，对任意的 $k\in N^*(2\le k\le 8), a_k=a_{k-1}+1$ 或 $a_k=a_{k+1}-1$ 中有且仅有一个成立，且 $a_1=6, a_9=9$，则 $a_1+\ldots+a_9$ 的最小值为__________

二、选择题（本大题共4题，每题5分，共20分）

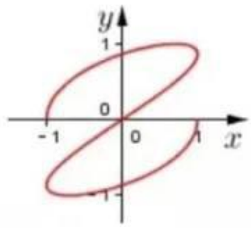
13. 下列函数中，既是奇函数又是减函数的是……………………………………………（　　）

A. $y=-3x$　　B. $y=x^3$　　C. $y=\log_3 x$　　D. $y=3^x$

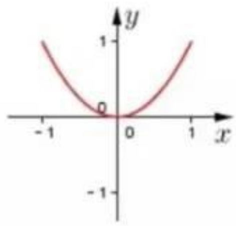
14. 已知参数方程$\begin{cases} x=3t-4t^3 \\ y=2t\sqrt{1-t^2} \end{cases} t\in[-1,1]$，下列选项的图中，符合该方程的是……………… （　　）



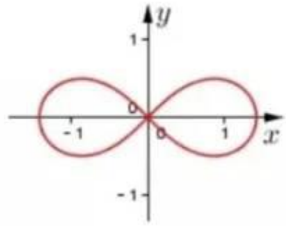
A.



B.



C.



D.

15. 已知$f(x)=3\sin x+2$，对任意的$x_1\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，都存在$x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使得$f(x)=2f(x+\theta)+2$成立，则下列选项中，$\theta$可能的值为…………………………………………………………………… （　　）

A. $\frac{3\pi}{5}$　　B. $\frac{4\pi}{5}$　　C. $\frac{6\pi}{5}$　　D. $\frac{7\pi}{5}$

16. 已知x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3同时俩足：①$x_1<y_1,x_2<y_2,x_3<y_3$；②$x_1+y_1=x_2+y_2=x_3+y_3$；③$x_1y_1+x_3y_3=2x_2y_2$，则下列选项中恒成立的是……………………………………………… （　　）

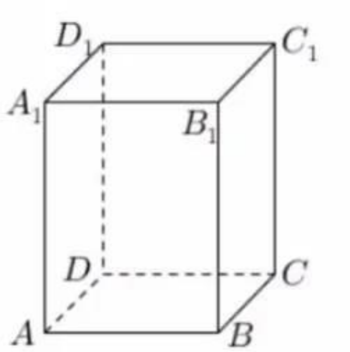
A. $2x_2<x_1+x_3$　　B. $2x_2>x_1+x_3$　　C. $x_2^2<x_1x_3$　　D. $x_2^2>x_1x_3$

三、解答题（本大题共 5 题，共 14+14+14+16+18=76 分）

17. 如图，在长方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 AB=BC=2，AA_1=3.

（1）若点尸是棱 A_1D_1 上的动点，求三棱锥 C-PAD 的体积；

（2）求直线 AB_1，与平面 ACC_1A_1 的夹角大小.



18. 已知在△ABC 中，A、B、C 所对边分别为 a、b、c，且 a=3，b=2c.

（1）若 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，求的面积；

（2）若 2sinB－sinC=1，求的周长.

19. 已知某企业今年（2021 年）第一季度的营业额为 1.1 亿元，以后每个季度的营业额比上个季度增加 0.05 亿元，该企业第一季度的利润为 0.16 亿，以后每季度比前一季度增长 4%.

（1）求 2021 年起前 20 季度营业额的总和；

（2）请问哪一季度的利润首次超过该季度营业额的 18%?

20. 已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，$F_1,F_2$ 是其左右焦点，直线 l 过点 $P(m,0)(m<-\sqrt{2})$ 交椭圆 Γ 于 AB 两点，且 A、B 在 x 轴上方，点 A 在线段 BP 上.

（1）若 B 是上顶点，$\left|\overrightarrow{BF_1}\right|=\left|\overrightarrow{PF_1}\right|$，求 m 的值；

（2）若 $\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_2A}=\dfrac{1}{3}$，且原点 O 到直线 l 的距离为 $\dfrac{4\sqrt{15}}{15}$，求直线 l 的方程；

（3）对于任意点 P，是否存在唯一直线 l，使得成立，若存在，求出直线/的方程，若不存在，请说明理由.

21. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，若对任意的 $x_1,x_2\in R,x_1-x_2\in S$，均有 $f(x_1)-f(x_2)\in S$，则称 $f(x)$ 是 S 关联

（1）判断和证明 $f(x)=2x+1$ 是否是 $[0,+\infty)$ 关联？是否是[0，1]关联？

（2）$f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联，当 $x\in[0,3)$ 时，$f(x)=x^2-2x$，解不等式 $2\le f(x)\le 3$；

（3）证明：“$f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联，且是 $[0,+\infty)$ 关联”的充要条件是“$f(x)$ 是[1，2]关联”

2021年上海市高考数学试卷答案

2021.06.07

一、填空题

1. 已知$z_1=1+i,z_2=2+3i$，则$z_1+z_2=$__________

【解析】$3+4i, z_1+z_2=1+i+2+3i=3+4i$

2. 已知$A=\{x\mid 2x\le 1\}, B=\{-1,0,1\}$，则$A\cap B=$__________

【解析】$\{-1,0\}. A=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right], B=\{-1,0,1\}, \therefore A\cap B=\{-1,0\}$

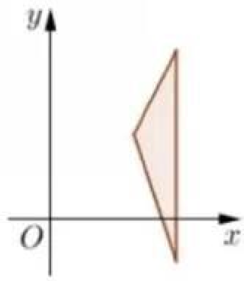
3. 已知圆$x^2+y^2-2x-4y=0$，则该圆的圆心坐标为__________

【解析】$(1,2), x^2+y^2-2x-4y=0\Rightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=5$，故圆心为$(1,2)$

4. 如图，正方形ABCD的边长为3，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$__________

【解析】9，由数量积$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}^2=9$

5. 已知$f(x)=\frac{3}{x}+2$，则$f^{-1}(1)=$__________



【解析】$-3, f(x)=\frac{3}{x}+2=1\Rightarrow x=-3, \therefore f(-3)=1\Rightarrow f^{-1}(1)=-3$

6. 已知二项式$(x+a)^5$展开式中，x^2项的系数为80，则__________

【解析】$2, C_5^3x^2a^3=80x^2\Rightarrow a=2$

7. 已知实数x,y满足$\begin{cases}x\le 3\\2x-y-2\ge 0\\3x+2y-8\ge 0\end{cases}$，则$z=x-y$的最大值为__________

【解析】4，可行域的三个顶点为$(3,4),(2,2),(3,-1)$可知$z_{\max}=3-(-1)=4$

8. 已知无穷等比数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，满足$a_1=3,b_n=a_{2n}$，a_{2n}的各项和为9，则数列$\{b_n\}$的各项和为__________

【解析】$\frac{18}{5}, \lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)=\frac{3}{1-q}=9\Rightarrow q=\frac{2}{3}, a_2=a_1q=2$，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(a_2+a_4+\ldots+a_n)=\frac{a_2}{1-q^2}=\frac{18}{5}$

9. 已知圆柱的底面半径为 1，高为 2，AB 为上底面圆的一条直径，C 为下底面圆周上的—个动点，则的面积的取值范围为________

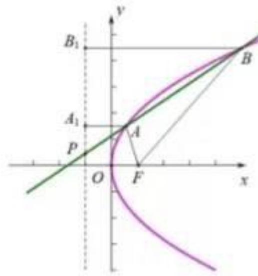
【解析】 $\left[2,\sqrt{5}\right]$, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot h=h\because h\in\left[2,\sqrt{5}\right]\therefore S_{\Delta ABC}\in\left[2,\sqrt{5}\right]$

10. 已知花博会有四个不同的场馆 A、B、C、D，甲、乙两人每人选 2 个去参观，则他们的选择中，恰有一个场馆相同的概率为________

【解析】 $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{C_4^1P_3^2}{C_4^2C_4^2}=\dfrac{2}{3}$

11. 已知抛物线：$y^2=2px(p>0)$，若第一象限的 A、B 两点在抛物线上，焦点为 F，$|AF|=2,|BF|=4,|AB|=3$，则直线 AB 的斜率为________

【解析】 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$|AF|=x_1+\dfrac{p}{2}=2,|BF|=x_2+\dfrac{p}{2}=4$



$\therefore |x_1-x_2|=2$，由 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=3$ 且 $k>0$，$\therefore k=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

法二：$AA_1=2,BB_1=4$，由 $\dfrac{AA_1}{BB_1}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow AP=AB=3$,

$\therefore \cos\angle ABB_1=\dfrac{BB_1}{BP}=\dfrac{4}{6}\Rightarrow \tan\angle ABB_1=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，即 $k_{AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 12. 已知 $a_i\in N^*(i=1,2,\dots,9)$，对任意的 $k\in N^*(2\le k\le 8)$, $a_k=a_{k-1}+1$ 或 $a_k=a_{k+1}-1$ 中有且仅有一个成立，且 $a_1=6,a_9=9$，则 $a_1+\dots+a_9$ 的最小值为________

12. 已知 $a_i\in N^*(i=1,2,\dots,9)$，对任意的 $k\in N^*(2\le k\le 8)$, $a_k=a_{k-1}+1$ 或 $a_k=a_{k+1}-1$ 中有且仅有一个成立，且 $a_1=6,a_9=9$，则 $a_1+\dots+a_9$ 的最小值为________

【解析】 31, 令 $b_k=a_{k+1}-a_k$，则依题意，b_k 和 b_{k+1} 中，仅有一个为 1(即只能隔项为 1)若 $b_1=b_3=b_5=b_7=1$，

则 $a_1=6,a_2=7,a_3\ge 1,a_4\ge 2,a_5\ge 1,a_6\ge 2,a_7\ge 1,a_8\ge 2,a_9=9$，此时 $a_1+\dots+a_9$ 的最小值为 31

若 $b_2=b_4=b_6=b_8=1$，则 $a_2\ge 1,a_3\ge 2,a_4\ge 1,a_5\ge 2,a_6\ge 1,a_7\ge 2,a_8=8,a_9=9$，此时 $a_1+\dots+a_9$ 的最小值为 32；故最小值为 31

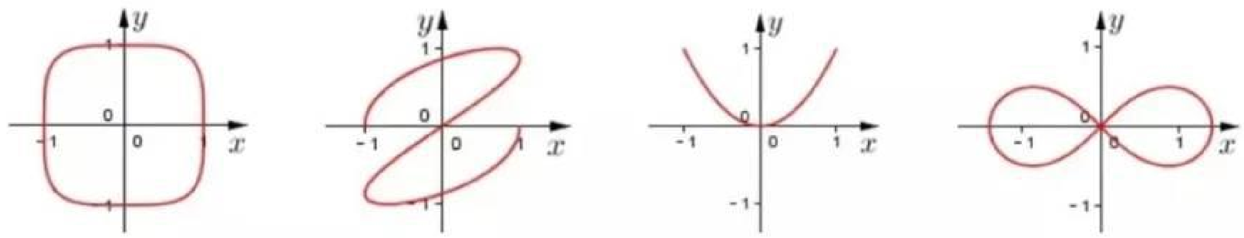
二、选择题（本大题共 4 题，每题 5 分，共 20 分）

13. 下列函数中，既是奇函数又是减函数的是……………………………………………………（　　）

A. $y=-3x$　　B. $y=x^3$　　C. $y=\log_3 x$　　D. $y=3^x$

【解析】 选 A、选项 B、C、D 均为增函数

14. 已知参数方程 $\begin{cases}x=3t-4t^3\\ y=2t\sqrt{1-t^2}\end{cases} t\in[-1,1]$，下列选项的图中，符合该方程的是………………（　　）



A.　　B.　　C.　　D.

【解析】 选 B、特殊值法，当 $y=0$ 时，$t=0,1,-1$，对应 $x=0,-1,1$

15. 已知 $f(x)=3\sin x+2$，对任意的 $x_1\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，都存在 $x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使得 $f(x)=2f(x+\theta)+2$ 成立，则下列选项中，θ 可能的值为……………………………………………………………………（　　）

A. $\frac{3\pi}{5}$　　B. $\frac{4\pi}{5}$　　C. $\frac{6\pi}{5}$　　D. $\frac{7\pi}{5}$

【解析】 选 B，设 $f(x_1)$ 范围是 A，$2f(x_2+\theta)+2$ 范围是 B，由题意 $A\subseteq B$

$\because f(x_1)\in[2,5]$，且 $2f(x_2+\theta)+2=6\sin(x+\theta)+6$，当 $\theta=\frac{4\pi}{5}$ 时，$x_2+\theta\in\left[\frac{4\pi}{5},\frac{13\pi}{10}\right]$

$6\sin(x_2+\theta)+6\left[6\sin\frac{13\pi}{10}+6,6\sin\frac{4\pi}{5}+6\right]$ $6\sin\frac{13\pi}{10}+6\approx1.14;6\sin\frac{4\pi}{5}+6\approx9.53$

16. 已知 x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3 同时俩足：① $x_1<y_1,x_2<y_2,x_3<y_3$；② $x_1+y_1=x_2+y_2=x_3+y_3$；③ $x_1y_1+x_3y_3=2x_2y_2$，则下列选项中恒成立的是…………………………………………（　　）

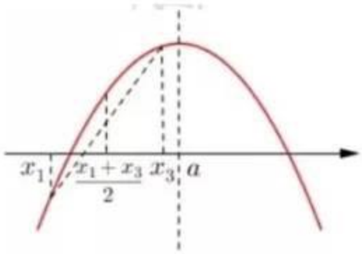
A. $2x_2<x_1+x_3$　　B. $2x_2>x_1+x_3$　　C. $x_2^2<x_1x_3$　　D. $x_2^2>x_1x_3$

【解析】 选 A，令 $x_1+y_1=x_2+y_2=x_3+y_3=2a$，由①可知，$x_1<a,x_2<a,x_3<a$，

由③得 $x_1(2a-x_1)+x_3(2a-x_3)=2x_2(2a-x_2)$ 构造函数/ $f(x)=x(2a-x)$

$\therefore f(x_1)+f(x_3)=2f(x_2)$，如图所示，$f(x)$ 为∵上凸函数，满足 $f\left(\frac{x_1+x_3}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_3)}{2}=f(x_2)$

∵ $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上严格递增，∴ $\frac{x_1+x_3}{2}>x_2$



三、解答题（本大题共 5 题，共 14+14+14+16+18=76 分）

17. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 AB=BC=2，$AA_1=3$.

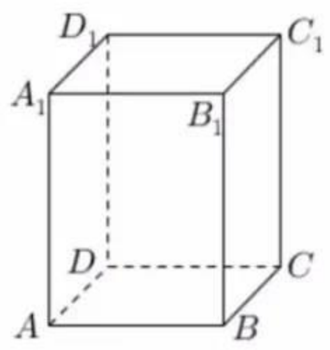
（1）若点尸是棱 A_1D_1 上的动点，求三棱锥 C-PAD 的体积；

（2）求直线 AB_1，与平面 ACC_1A_1 的夹角大小.

【解析】（1）$V_{P-ADC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ADC}\cdot h=\frac{1}{3}\times2\times3=2$

（2）$d_{B_1-ACC_1A_1}=d_{B_1-C_1A_1}=\sqrt{2}$，$AB_1=\sqrt{13}$

$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{26}}{13}$，即所求角大小为 $\theta=\arcsin\frac{\sqrt{26}}{13}$



18. 已知在△ABC 中，A、B、C 所对边分别为 a、b、c，且 a=3，b=2c.

（1）若 $A=\frac{2\pi}{3}$，求的面积；

（2）若 2sinB－sinC=1，求的周长.

【解析】（1）$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{4c^2+c^2-9}{4c^2}\Rightarrow c=\frac{3\sqrt{7}}{7}$；

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times2\times\frac{9}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{14}$

（2）依题意，正弦定理：$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow \sin B=2\sin C$

∴代入计算：$4\sin C-\sin C=1\Rightarrow \sin C=\frac{1}{3}$，则 $\sin B=\frac{2}{3}$

当 B 为锐角时，$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{2}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}\\b=\frac{8\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{3}\end{cases}$，$\therefore C_{\Delta ABC}=4\sqrt{2}-\sqrt{5}+3$

当 B 为钝角时，$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{2}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}\\b=\frac{8\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{3}\end{cases}$，$\therefore C_{\Delta ABC}=4\sqrt{2}+\sqrt{5}+3$

$\therefore C_{\Delta ABC}=4\sqrt{2}-\sqrt{5}+3$或$C_{\Delta ABC}=4\sqrt{2}+\sqrt{5}+3$

19. 已知某企业今年（2021 年）第一季度的营业额为 1.1 亿元，以后每个季度的营业额比上个季度增加 0.05 亿元，该企业第一季度的利润为 0.16 亿，以后每季度比前一季度增长 4%.

（1）求 2021 年起前 20 季度营业额的总和；

（2）请问哪一季度的利润首次超过该季度营业额的 18%?

【解析】（1）依题意：营业额是首项为 1.1，公差为 0.05 的等差数列；

$\therefore$前 20 季度营业额之和为 $S_{20}=20\times1.1+\frac{20\times19}{2}\times0.05=31.5$（亿）

（2）设 2021 年起第 n 季度 $n\in N^*$。满足条件，依题意：

第 n 季度的营业额为：$a_n=1.1+(n-1)\times0.05=0.05n+1.05$，

第 n 季度的利润为：$0.16\cdot(1+4\%)^{n-1}$

依题意：$0.16\cdot(1+4\%)^{n-1}\geq(0.05n+1.05)\times18\%$，解得：$n\geq26$

即今年起第 26 个季度时满足条件.

当 B 为锐角时，$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{2}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}\\ b=\frac{8\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{3}\end{cases}，\therefore C_{\Delta ABC}=4\sqrt{2}-\sqrt{5}+3$$

当 B 为钝角时，$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{2}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}\\ b=\frac{8\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{3}\end{cases}，\therefore C_{\Delta ABC}=4\sqrt{2}+\sqrt{5}+3$$

$\therefore C_{\Delta ABC}=4\sqrt{2}-\sqrt{5}+3$或$C_{\Delta ABC}=4\sqrt{2}+\sqrt{5}+3$

19. 已知某企业今年（2021 年）第一季度的营业额为 1.1 亿元，以后每个季度的营业额比上个季度增加 0.05 亿元，该企业第一季度的利润为 0.16 亿，以后每季度比前一季度增长 4%.

（1）求 2021 年起前 20 季度营业额的总和；

（2）请问哪一季度的利润首次超过该季度营业额的 18%?

【解析】（1）依题意：营业额是首项为 1.1，公差为 0.05 的等差数列；

$\therefore$前 20 季度营业额之和为 $S_{20}=20\times1.1+\frac{20\times19}{2}\times0.05=31.5$（亿）

（2）设 2021 年起第 n 季度 $n\in N^*$。满足条件，依题意：

第 n 季度的营业额为：$a_n=1.1+(n-1)\times0.05=0.05n+1.05$，

第 n 季度的利润为：$0.16\cdot(1+4\%)^{n-1}$

依题意：$0.16\cdot(1+4\%)^{n-1}\ge(0.05n+1.05)\times18\%$，解得：$n\ge26$

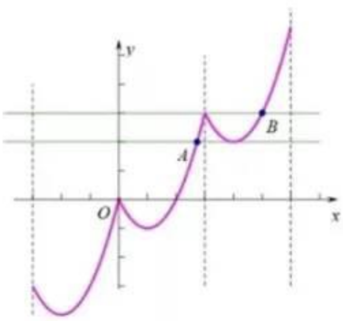
即今年起第 26 个季度时满足条件.

21. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，若对任意的 $x_1,x_2\in R,x_1-x_2\in S$，均有 $f(x_1)-f(x_2)\in S$，则称 $f(x)$ 是 S 关联

（1）判断和证明 $f(x)=2x+1$ 是否是 $[0,+\infty)$ 关联？是否是[0，1]关联？

（2）$f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联，当 $x\in[0,3)$ 时，$f(x)=x^2-2x$，解不等式 $2\le f(x)\le 3$；

（3）证明：“$f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联，且是 $[0,+\infty)$ 关联”的充要条件是“$f(x)$ 是[1，2]关联”



【解析】（1）任取 $x_1,x_2\in R$，若 $x_1-x_2\in[0,+\infty)$

则：$f(x_1)-f(x_2)=2(x_1-x_2)\in[0,+\infty)$ ∴ $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 关联

若 $x_1-x_2\in[0,1]$，则 $f(x_1)-f(x_2)=2(x_1-x_2)\in[0,2]$

∴ $f(x)$ 不是 $[0,1]$ 关联

（2）依题意：当 $x_1-x_2=3$ 时，$f(x_1)-f(x_2)=3$，即满足

$f(x+3)-f(x)=3$，数形结合：求出 $A(1+\sqrt{3},2),B(5,3)$

∴原不等式的解集为 $x\in[1+\sqrt{3},5]$

（3）证明

必要性：根据条件可得 $f(x+1)=f(x)+1$

∴ $f(x+n)=f(x)+n,n\in Z,x_2>x_1,f(x_2)\ge f(x_1)$

若 $1\le x_2-x_1\le 2$，∴ $x_1+1\le x_2\le x_1+2$，∴ $f(x_1+1)\le f(x_2)\le f(x_1+2)$

∴ $f(x_1)+1\le f(x_2)\le f(x_1)+2$，∴ $1\le f(x_2)-f(x_1)\le 2$，∴ $f(x)$ 是 $[1,2]$ 关联

充分性：$1\le x_2-x_1\le 2$ 时，$1\le f(x_2)-f(x_1)\le 2$

$1\le f(x+2)-f(x+1)\le 2$，$1\le f(x+1)-f(x)\le 2$

∴ $2\le f(x+2)-f(x)\le 4$，又 $1\le (x+2)-x\le 2$，∴ $1\le f(x+2)-f(x)\le 2$

∴ $f(x+2)-f(x)=2$，∴ $f(x+2)-f(x+1)=1,f(x+1)-f(x)=1$

∴ $f(x+n)=f(x)+n,n\in Z$，∴ $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联

若 $x_2-x_1\in[n,n+1], n\in N$， $x_2-[x_1+(n-1)]\in[1,2], n-1\in Z$

$\therefore f(x_2)-f[x_1+(n-1)]\in[1,2], f(x_2)-f(x_1)-(n-1)\in[1,2]$

$\therefore f(x_2)-f(x_1)\in[n,n+1]\subseteq[0,+\infty)$，而 $[0,+\infty)=[0,1]\cup[1,2]\cup\ldots\cup[n,n+1]\cup\ldots$,

$\therefore x_2-x_1\in[0,+\infty)$ $\therefore$ 存在 n 使 $x_2-x_1\in[n,n+1], f(x_2)-f(x_1)\in[n,n+1]\subseteq[0,+\infty)$

$\therefore f(x_2)-f(x_1)\in[0,+\infty)$ 关联

证毕