

2021 届长郡十五校高三联考 第二次考试

数学参考答案

一、二、选择题

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案	D	C	B	C	C	A	C	B	BC	AD	AB	ABC

1. D 【解析】 $\because U=A \cup B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}, A \cap \complement_U B=\{1,3,5,7\},$

$\therefore B=\{0,2,4,6,8\}$, 故选 D.

2. C 【解析】设 $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R}), \therefore z^2=a^2-b^2+2abi=\frac{7}{4}+6i,$

$$\therefore \begin{cases} a^2-b^2=\frac{7}{4}, \\ 2ab=6, \end{cases}$$

$$\because a < 0, b < 0, \therefore a = -2, b = -\frac{3}{2}, \therefore z = -2 - \frac{3}{2}i,$$

$$\therefore \bar{z} = -2 + \frac{3}{2}i, \text{ 故选 C.}$$

3. B 【解析】解 $a^2-3a+2 \leq 0$ 得 $1 \leq a \leq 2$, 故选 B.

4. C 【解析】 $P=C_2^1 \times \frac{1}{12} \times \frac{11}{12} = \frac{11}{72}$, 故选 C.

5. C 【解析】 $\because \sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{8}{5},$

$$\therefore \sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 1 - 2\sin^2(x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{7}{25}, \text{ 故选 C.}$$

6. A 【解析】 $\because x^2 - \cos x \neq 0$, 排除 C、D,

$$\because x = \frac{\pi}{2} \text{ 时 } f(x) > 0, \text{ 故选 A.}$$

7. C 【解析】若派到山区 A 有 2 人, 则不同派法有 $A_5^2=120$ 种; 若派到山区 A 只有甲, 则不同派法有 $(C_5^2-1)A_4^1=216$ 种, 故不同安排方法一共有 $120+216=336$ 种, 故选 C.

8. B 【解析】令 $f(x)=\frac{x-1}{e^x}, \therefore x > 1$ 时 $f(x) > 0, \therefore a \leq 0$ 不合条件.

$$\text{令 } h(x)=\frac{x-1}{e^x}-ax+1, \therefore h'(x)=\frac{2-x-ae^x}{e^x},$$

令 $g(x)=2-x-ae^x$, 知 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减,

$\because h(0)=0, \therefore h(x)$ 要在 $x=0$ 处取最大值,

$$\therefore g(0)=2-a=0,$$

$$\therefore a=2, \text{ 故选 B.}$$

9. BC 【解析】2018 年全国少儿电视节目播出时间比上一年增长 0.35%, 故 A 错; 由图知电视动画节目播出时间的方差最小, B 正确; 少儿广播节目播出时间的平均数约为 21 万小时, C 正确; 2014 年到 2015 年少儿电视节目播出时间降低, D 错.

10. AD 【解析】直线 $AB: x=y+\frac{p}{2}$, 联立 $y^2=2px$ 得 $y^2-2py-p^2=0$,

$$\text{解得 } y_1=(1+\sqrt{2})p, y_2=(1-\sqrt{2})p,$$

$$\therefore \left| \frac{AF}{BF} \right| = \left| \frac{y_1}{y_2} \right| = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 3+2\sqrt{2}, \text{ 或 } \left| \frac{AF}{BF} \right| = \left| \frac{y_2}{y_1} \right| = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3-2\sqrt{2}, \text{ 故选 AD.}$$

11. AB 【解析】 $\because y = -f(-x) = \sin(-2x + \frac{2\pi}{3}) = -\sin(2x - \frac{2\pi}{3}) = \cos(2x - \frac{\pi}{6}) = g(x)$, A 正确;

$$\because f(x) = -\sin(2x + \frac{2\pi}{3}) = \cos(2x + \frac{7\pi}{6}) = \cos(2x - \frac{5\pi}{6}), \text{ 向左平移 } \frac{\pi}{3} \text{ 个单位长度, 得到 } y = \cos(2x + \frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}) =$$

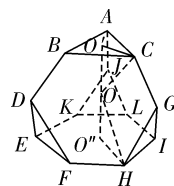
$$\cos(2x - \frac{\pi}{6}) = g(x), \text{ B 正确; } x = \frac{\pi}{12} \text{ 时 } g(x) = 1, \text{ 故 C 错误;}$$

$$\text{由 } 2x + \frac{2\pi}{3} = k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}) \text{ 得 } f(x) \text{ 的对称轴为 } x = \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ D 错误, 故选 AB.}$$

12. ABC 【解析】题中截角四面体由 4 个边长为 a 的正三角形, 4 个边长为 a 的正六边形构成, 故 $S = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 +$

$$4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 7\sqrt{3}a^2, \text{ A 正确; } \because \text{棱长为 } a \text{ 的正四面体的高 } h = \frac{\sqrt{6}}{3}a,$$

$$\therefore V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(3a)^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot (3a) - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{23\sqrt{2}}{12}a^3, \text{ B 正确;}$$



∵截角四面体上下底面距离为 $\sqrt{6}a - \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$,

∴ $\sqrt{R^2 - O'C^2} + \sqrt{R^2 - O'H^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$,

∴ $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}} + \sqrt{R^2 - a^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$,

∴ $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a - \sqrt{R^2 - a^2}$,

∴ $R^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{8}{3}a^2 + R^2 - a^2 - \frac{4\sqrt{6}}{3}a \cdot \sqrt{R^2 - a^2}$,

∴ $R^2 = \frac{11}{8}a^2$,

∴ $S = 4\pi R^2 = \frac{11}{2}\pi a^2$, C 正确;

二面角 $A-BC-D$ 的余弦值为负值, D 不对, 故选 ABC.

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分)

13. $\frac{\pi}{3}$ 【解析】∵ $b^2 = 1 + 3 = 4$,

∴ $(a + 2b) \cdot b = a \cdot b + 2b^2 = a \cdot b + 8 = 10$,

∴ $a \cdot b = 2$, ∴ $\cos \langle a, b \rangle = \frac{1}{2}$, a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

14. $(-1, 1)$ 【解析】∵ $f'(x) = 3x^2 - 2 = 1$,

∴ $x = 1$ 或 $x = -1$, $f(1) = -1$, $f(-1) = 1$, ∴ $(1, -1)$ 在直线上, 不成立,

故答案为 $(-1, 1)$.

15. $\sqrt{2}$ 【解析】如图, ∵ $ON \parallel MF_2$, ∴ $F_1N \perp ON$,

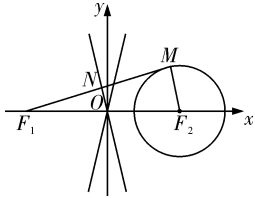
∴ $|F_1N| = b$, ∴ $|ON| = a$,

∴ $|MF_2| = 2a$, $|MF_1| = 2b$,

∴ $S_{\triangle MF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 2ab = c^2$,

∴ $4a^2(c^2 - a^2) = c^4$, ∴ $e^4 - 4e^2 + 4 = 0$,

∴ $e^2 = 2$, ∴ $e = \sqrt{2}$.



16. $\sqrt{6} - 1$ 【解析】设 AC 中点为 D, 则 $\vec{BO} \cdot \vec{AC} = (\vec{BD} + \vec{DO}) \cdot \vec{AC} = \vec{BD} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{BA}) \cdot (\vec{BC} - \vec{BA}) = \frac{1}{2}\vec{BC}^2 - \frac{1}{2}\vec{BA}^2$,

∴ $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}c^2 = 12$,

∴ $a = 7$,

由 $c < a$ 知角 C 为锐角,

故 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49 + b^2 - 25}{14b} = \frac{1}{14} \left(b + \frac{24}{b} \right) \geq \frac{1}{14} \times 2\sqrt{b \cdot \frac{24}{b}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$,

当且仅当 $b = \frac{24}{b}$, 即 $b = 2\sqrt{6}$ 时 $\cos C$ 最小, 又 $y = \cos x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 递减, 故 C 最大.

此时, 恰有 $a^2 = b^2 + c^2$, 即 $\triangle ABC$ 为直角三角形,

∴ $r = \frac{5 + 2\sqrt{6} - 7}{2} = \sqrt{6} - 1$.

四、解答题(本大题共 6 小题, 共计 70 分.)

17. 【解析】(1) 由图知 $M = 2$, 1 分

$\frac{T}{2} = \frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$,

∴ $T = \pi, \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ 2 分

$2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 3 分

又 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$,

∴ $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, 4 分

∴ $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 5 分

(2) ∵ $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \geq \frac{2ac - ac}{2ac} = \frac{1}{2}$, 当且仅当 $a = c$ 时取“=”, 7 分

∴ $B \in (0, \pi)$,

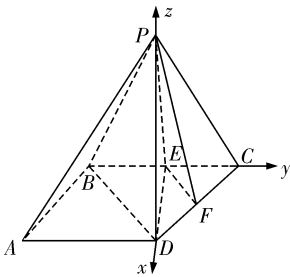
∴ $B \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$,

∴ $2B - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, 8 分

∴ $f(B) = 2\sin\left(2B - \frac{\pi}{3}\right) \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ 10 分

18.【解析】(1)∵ $2S_n=(n+1)a_n$,
 ∴ $2S_{n-1}=na_{n-1}$,
 ∴ $2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$, 1 分
 ∴ $(n-1)a_n=na_{n-1}$, 2 分
 ∴ $\{a_n\}$ 是等差数列,
 ∴ $(n-1)[a_1+(n-1)d]=n[a_1+(n-2)d]$, 3 分
 ∴ $a_1=d$, ∴ $a_n=nd$ 4 分
 ∴ $(a_5-2)^2=(a_3-2)(a_7+2)$,
 ∴ $(5d-2)^2=(3d-2)(7d+2)$,
 ∴ $d=2$ 或 $d=1$ (舍去), 5 分
 ∴ $a_n=2n$ 6 分
 (2)∵ $b_n=\frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}+2^{-a_n}=\frac{1}{4n(n+1)}+2^{-2n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{4^n}$, 8 分
 ∴ $T_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}$
 $=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)<\frac{7}{12}$ 10 分
 ∴ $\forall n \in \mathbf{N}^*, T_n < m$ 恒成立,
 ∴ $m \geq \frac{7}{12}$ 12 分

19.【解析】(1)设 $AB=2$, 则 $AD=2\sqrt{2}$,
 ∴ $CF=1, CE=\sqrt{2}$, 1 分
 ∴ $EF=\sqrt{1+2-2 \times 1 \times \sqrt{2} \times \cos 45^\circ}=1$, 2 分
 ∴ $CF^2+EF^2=CE^2$,
 ∴ $EF \perp CF$ 3 分
 在等边三角形 PBC 中, E 为 BC 的中点, ∴ $PE \perp BC$,
 ∴面 $PBC \perp$ 面 $ABCD, PE \subset$ 面 PBC ,
 面 $PBC \cap$ 面 $ABCD=BC$,
 ∴ $PE \perp$ 面 $ABCD$ 4 分
 ∴ $CD \subset$ 面 $ABCD$, ∴ $PE \perp CD$.
 ∴ $EF \perp CD, EF \cap PE=E$,
 ∴ $CD \perp$ 面 PEF 5 分
 ∴ $AB \parallel CD$, ∴ $AB \perp$ 面 PEF ,
 ∴ $AB \subset$ 面 PAB , ∴面 $PEF \perp$ 面 PAB 6 分
 (2)由(1)知 $BD=2, DE \perp BC$, 以 E 为坐标原点, ED, EC, EP 分别为 x, y, z 轴建立直角坐标系,



则 $P(0,0,\sqrt{6}), D(\sqrt{2},0,0), C(0,\sqrt{2},0), A(\sqrt{2},-2\sqrt{2},0), F\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 7 分
 $\overrightarrow{AD}=(0,2\sqrt{2},0), \overrightarrow{DP}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{6})$.
 设面 PAD 的法向量为 $\mathbf{m}=(x,y,z)$,
 $\begin{cases} 2\sqrt{2}y=0 \\ -\sqrt{2}x+\sqrt{6}z=0 \end{cases}$, 取 $z=1$, 得 $x=\sqrt{3}, y=0, \mathbf{m}=(\sqrt{3},0,1)$ 9 分
 面 PEF 的法向量为 $\overrightarrow{CD}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$, 10 分
 ∴ $\cos\langle \mathbf{m}, \overrightarrow{CD} \rangle = \frac{\sqrt{6}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, 11 分
 ∴面 PEF 与面 PAD 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 12 分

20.【解析】(1)∵ $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}=\frac{30 \times (7 \times 17-5 \times 1)^2}{12 \times 18 \times 22 \times 8} \approx 10.26 > 7.879$, 4 分
 故能在犯错误的概率不超过 0.005 的条件下认为“特别喜欢”阅读与父或母喜欢阅读有关. 5 分
 (2) ξ 可取 50, 100, 150, 200, 6 分
 $P(\xi=50)=\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}=\frac{1}{3}; P(\xi=100)=\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}+\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}=\frac{7}{18}$; 7 分
 $P(\xi=150)=2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}=\frac{2}{9}$; 8 分
 $P(\xi=200)=\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}=\frac{1}{18}$, 9 分
 则 ξ 的分布列如下:

ξ	50	100	150	200
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$

..... 10 分
 ξ 的期望为: $E(\xi)=50 \times \frac{1}{3}+100 \times \frac{7}{18}+150 \times \frac{2}{9}+200 \times \frac{1}{18}=100$ 12 分

21.【解析】(1)由椭圆的定义可知,△F ₁ AB 的周长为 4a,	2 分
∴4a=8,a=2,又离心率为 $\frac{1}{2}$,	3 分
∴c=1,	4 分
b ² =3,	5 分
所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$	7 分
(2)当直线 MN⊥x 轴时,S _{max} = $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$;	9 分
当直线 MN 不垂直 x 轴时,设 MN:y=kx,	10 分
$\begin{cases} y=kx \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases} \Rightarrow x^2=\frac{12}{3+4k^2}, y^2=\frac{12k^2}{3+4k^2},$	11 分
∴ MN = $4\sqrt{3}\sqrt{\frac{1+k^2}{3+4k^2}}$	12 分
设与 MN 平行且与椭圆 C 相切的直线为:y=kx+m,	13 分
$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases} \Rightarrow (3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0,$	14 分
∴Δ=64k ² m ² -4(3+4k ²)(4m ² -12)=0,	15 分
∴m ² =3+4k ² ,	16 分
∴P 距 MN 的最大距离为 $d_{\max}=\frac{ m }{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{\frac{3+4k^2}{1+k^2}}$,	17 分
∴S _{max} = $\frac{1}{2}\cdot MN \cdot d_{\max}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\sqrt{\frac{1+k^2}{3+4k^2}}\times \sqrt{\frac{3+4k^2}{1+k^2}}=2\sqrt{3}$,	18 分
综上,△PMN 面积的最大值为 2√3.	19 分
22.【解析】(1)∵x>0,∴证明 e ^x -f(x)≤1 即证明 $\frac{1+\ln x}{x}\leq 1$ 即证明 ln x+1-x≤0.	20 分
设 φ(x)=ln x+1-x,∴φ'(x)= $\frac{1-x}{x}$ (x>0),	21 分
∴0<x<1 时 φ'(x)>0,φ(x)单调递增;x>1 时 φ'(x)<0,φ(x)单调递减.	22 分
∴φ(x) _{max} =φ(1)=0,	23 分
∴ln x+1-x≤0 即 e ^x -f(x)≤1 成立.	24 分
(2)x>0 时,g(x)≤f(x)即 $ae^x+\frac{1+\ln x}{x}\leq 1$,	25 分
由(1)知,当 a≤0 时, $ae^x+\frac{1+\ln x}{x}\leq \frac{1+\ln x}{x}\leq 1$ 成立,	26 分
当 a>0 时,显然 x=1 时不成立,	27 分
综上,a≤0.	28 分
(3)f'(x)= $e^x-\frac{1-1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$	29 分
设 h(x)=x ² e ^x +ln x,h'(x)=e ^x (x ² +2x)+ $\frac{1}{x}$ >0,	30 分
∴h(x)在(0,+∞)上单调递增,	31 分
∴h($\frac{1}{2}$)<0,h(1)>0,	32 分
∴存在 x ₀ ∈($\frac{1}{2}$,1)使 h(x ₀)=0,且 0<x<x ₀ 时 h(x)<0 即 f'(x)<0,f(x)递减;	33 分
x>x ₀ 时 h(x)>0 即 f'(x)>0,f(x)递增,	34 分
∴f(x) _{min} =f(x ₀)=e ^{x₀} - $\frac{1+\ln x_0}{x_0}$,	35 分
∴h(x ₀)=0,∴x ₀ ² e ^{x₀} +ln x ₀ =0,∴x ₀ e ^{x₀} + $\frac{1}{x_0}\ln x_0=0$,	36 分
∴x ₀ e ^{x₀} =-ln x ₀ e ^{-ln x₀} ,	37 分
∴t(x)=xe ^x 在(0,+∞)是单调递增,	38 分
∴x ₀ =-ln x ₀ ,	39 分
∴e ^{x₀} = $\frac{1}{x_0}$,	40 分
∴f(x) _{min} =e ^{x₀} - $\frac{1+\ln x_0}{x_0}=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0}+\frac{-\ln x_0}{x_0}=1$	41 分