

高三数学第三次调研参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1. C 2. B 3. C 4. D 5. B 6. C 7. A 8. B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. BC 10. AC 11. ABD 12. BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{8}{13}$ 14. 23.6 15. 7 16. (第一空 2 分，第二空 3 分) 二十, $120\sqrt{3} - 40\sqrt{15}$

17. (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ($d \neq 0$), 则 $S_7 = 7a_4 = 35$, 即 $a_4 = 5$, 1 分

$$\text{所以 } a_1 = a_4 - 3d = 5 - 3d, \quad a_7 = a_4 + 3d = 5 + 3d.$$

$$\text{因为 } a_1, a_4 - 1, a_7 \text{ 成等比数列, 所以 } (a_4 - 1)^2 = a_1 a_7,$$

$$\text{即 } 4^2 = (5 - 3d)(5 + 3d), \text{ 解得 } d = -1 \text{ (舍去) 或 } d = 1, \quad \text{..... 3 分}$$

$$\text{所以 } a_n = n + 1. \quad \text{..... 5 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } b_n + b_{n+1} = a_n, \text{ 所以 } T_{2n} = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_{2n-1} + b_{2n}$$

$$= (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \cdots + (b_{2n-1} + b_{2n}) = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} \quad \text{..... 8 分}$$

$$= \frac{n(2 + 2n)}{2} = n^2 + n. \quad \text{..... 10 分}$$

18. (1) 满足题意的 2 个条件的序号为 ①③. 1 分

$$\text{由条件①知, } 3\sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi\right) = 0, \text{ 所以 } 2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{即 } \varphi = k\pi - \frac{\pi}{6} \ (k \in \mathbb{Z}). \text{ 因为 } -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0, \text{ 所以 } \varphi = -\frac{\pi}{6}. \quad \text{..... 3 分}$$

$$\text{由条件②知, } 3\sin\left(2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi\right) = 3, \text{ 所以 } 2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{即 } \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}). \text{ 因为 } -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0, \text{ 所以 } \varphi = -\frac{\pi}{3}. \quad \text{..... 5 分}$$

$$\text{由条件③知, } \sin \varphi = -\frac{1}{2}, \text{ 即 } \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \varphi = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{因为 } -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0, \text{ 所以 } \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

综上, 满足题意的 2 个条件的序号为 ①③. 7 分

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } f(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{所以 } g(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 6\cos^2 x = 3\left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{6}\right) + 6 \times \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{3}{2} \cos 2x + 3 = 3 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 3. \quad \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

因为 $-1 \leq \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$, 所以 $0 \leq g(x) \leq 6$,

所以函数 $g(x)$ 的值域为 $[0, 6]$. $\cdots \cdots 12 \text{ 分}$

19. (1) 由题知, ξ 的可能取值为 0, 1, 2, 3, $\xi \sim H(4, 3, 10)$.

$$P(\xi=0) = \frac{C_3^0 C_7^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{6}, \quad P(\xi=1) = \frac{C_3^1 C_7^3}{C_{10}^4} = \frac{1}{2},$$

$$P(\xi=2) = \frac{C_3^2 C_7^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{10}, \quad P(\xi=3) = \frac{C_3^3 C_7^1}{C_{10}^4} = \frac{1}{30} \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

所以 ξ 的概率分布为:

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$\text{所以 } \xi \text{ 的数学期望 } E(\xi) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = 1.2. \quad \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

另法: 因为 $\xi \sim H(4, 3, 10)$, 数学期望 $E(\xi) = \frac{nM}{N} = \frac{4 \times 3}{10} = 1.2$.

(2) 记“至少有一个零件直径大于 124 mm”为事件 A ,

因为 $X \sim N(120, 4)$, 所以 $\mu = 120, \sigma = 2$, $\cdots \cdots 8 \text{ 分}$

$$\text{所以 } P(X > 124) = \frac{1 - P(|X - \mu| \leq 2\sigma)}{2} \approx \frac{1 - 0.9545}{2} = 0.02275,$$

$$\text{所以 } P(X \leq 124) \approx 1 - 0.02275 = 0.97725, \quad \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } P(A) = 1 - 0.97725^{10} \approx 1 - 0.7944 = 0.2056.$$

答: 至少有一件零件直径大于 124 mm 的概率为 0.2056. $\cdots \cdots 12 \text{ 分}$

20. (1) 因为平面 $BCD \perp$ 平面 ABD , 平面 $BCD \cap$ 平面 $ABD = BD$,

$BC \perp BD$, $BC \subset$ 平面 BCD , 所以 $BC \perp$ 平面 ABD .

又 $AD \subset$ 平面 ABD , 所以 $BC \perp AD$. $\cdots \cdots 2 \text{ 分}$

因为 A 是以 BD 为直径的半圆 O 上一点, 所以 $AB \perp AD$. $\cdots \cdots 4 \text{ 分}$

又 $AB \cap BC = B$, $AB, BC \subset$ 平面 ABC ,

所以 $AD \perp$ 平面 ABC . $\cdots \cdots 6 \text{ 分}$

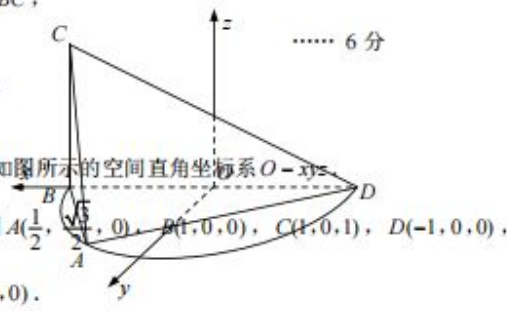
(2) 在平面 ABD 上, 过点 O 作 $Oy \perp BD$,

在平面 BCD 上, 过点 O 作 $Oz \parallel BC$,

由 (1) 知, $BC \perp$ 平面 ABD , 建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.

因为 $BD = 2BC = 2$, $\widehat{AD} = 2\widehat{AB}$, 则 $A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 0, 1)$, $D(-1, 0, 0)$,

所以 $\overrightarrow{CD} = (-2, 0, -1)$, $\overrightarrow{DA} = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.



设平面 ACD 的一个法向量为 $m = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{CD} = -2x - z = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{DA} = \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0, \end{cases}$

取 $x = 1$, 则 $y = -\sqrt{3}$, $z = -2$, 所以 $m = (1, -\sqrt{3}, -2)$ 9 分

因为 y 轴 $\perp$ 平面 BCD , 所以平面 BCD 的一个法向量 $n = (0, 1, 0)$ 10 分

设二面角 $A-CD-B$ 的平面角为 θ , θ 为锐角,

$$\text{则 } \cos \theta = |\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m||n|} = \frac{|1 \times (-\sqrt{3})|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

所以二面角 $A-CD-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 12 分

21. (1) 依据圆与抛物线的对称性, 四边形 $ABCD$ 是以 y 轴为对称轴的等腰梯形,

不妨设 $|AB| < |CD|$, A, D 在第一象限, $A(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$,

则 $B(-x_1, y_1)$, $C(-x_2, y_2)$. 联立 $\begin{cases} x^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = 4, \\ x^2 = my, (m > 0), \end{cases}$ 消去 x 得: $y^2 + (m-5)y + \frac{9}{4} = 0$ (*).

方程(*)有互异二正根, 所以 $\begin{cases} \Delta = (m-5)^2 - 9 > 0, \\ y_1 + y_2 = 5 - m > 0, \\ y_1 y_2 = \frac{9}{4}, \end{cases}$ 解得 $0 < m < 2$ 1 分

由 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{15}{4}$, 得 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{15}{4}$, 即 $m\sqrt{y_1 y_2} + y_1 y_2 = \frac{15}{4}$, 3 分

由 $y_1 y_2 = \frac{9}{4}$, 得 $m = 1$ 5 分

(2) 依据对称性, 点 G 在 y 轴上, 可设 $G(0, a)$.

由 $k_{AG} = k_{AC}$ 得, $\frac{y_1 - a}{x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 + x_2}$, 所以 $\frac{y_1 - a}{\sqrt{m} \cdot \sqrt{y_1}} = \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{m} \cdot (\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2})} = \frac{\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}}{\sqrt{m}}$,

则 $a = \sqrt{y_1 y_2} = \frac{3}{2}$, 即 $G(0, \frac{3}{2})$ 8 分

方法一: $S = S_{\text{四边形}ABCD} - (S_{\triangle GAB} + S_{\triangle GCD}) = (x_1 + x_2)(y_2 - y_1) - [x_1(a - y_1) + x_2(y_2 - a)]$

$$= x_1 y_2 - x_2 y_1 + a(x_2 - x_1) = \sqrt{m} \cdot \sqrt{y_1 y_2} (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}) + a\sqrt{m} (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1})$$

$$= \sqrt{m} (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}) \cdot (\sqrt{y_1 y_2} + a) = 3\sqrt{m} \cdot \sqrt{y_1 + y_2 - 2\sqrt{y_1 y_2}} = 3\sqrt{m(2-m)} \quad 10 \text{ 分}$$

$$\leq 3 \cdot \frac{m + (2-m)}{2} = 3.$$

当且仅当 $m = 2 - m$, 即 $m = 1$ 时, S 最大值为 3. 12 分

方法二: $\frac{S}{2} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ABG} = x_1(y_2 - \frac{3}{2}) = \sqrt{m} y_1 (y_2 - \frac{3}{2})$

$$= \sqrt{m}(\sqrt{y_1 y_2} \cdot y_2 - \frac{3}{2}\sqrt{y_1}) = \frac{3}{2}\sqrt{m}(\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}) = \frac{3}{2}\sqrt{m} \cdot \sqrt{y_1 + y_2 - 2\sqrt{y_1 y_2}} \quad 10 \text{ 分}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{m(5-m-3)} = \frac{3}{2}\sqrt{-(m-1)^2 + 1} \leq \frac{3}{2}, \text{ 所以 } S \leq 3.$$

当且仅当 $m=1$ 时, S 最大值为 3. ……12 分

22. (1) $f'(x) = 2a \sin x \cos x - \sqrt{3} = a \sin 2x - \sqrt{3}$,

由 $f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \sqrt{3} = 0$, 知 $a=2$, …… 2 分

所以 $f'(x) = 2 \sin 2x - \sqrt{3}$. 令 $f'(x) > 0$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 得 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$;

令 $f'(x) < 0$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 得 $0 < x < \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$,

所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 上单调递增, 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 和 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减. …… 4 分

(2) (i) 当 $0 < a < 2$ 时, $f(x) = 2 \sin^2 x - \sqrt{3}x$, 设 $h(x) = 2 \sin^2 x - \sqrt{3}x$.

① 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 由 (1) 知 $h(x)_{\text{极大}} = h(\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi < 0$,

又 $h(0) = 0$, 所以 $h(x) < 0$, 从而 $f(x) < 0$.

② 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) = h(x) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi < 0$.

由①②知, 当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$ (i_1); …… 6 分

当 $x < 0$ 时, $f(x) \geq -\sqrt{3}x > 0$ (i_2). 由 (i_1)(i_2) 得, $x \neq 0$ 时, $xf(x) < 0$. …… 8 分

(ii) 当 $-2 < a < 0$ 时,

方法一: $f(x) = -2 \sin^2 x - \sqrt{3}x$, 设 $g(x) = -2 \sin^2 x - \sqrt{3}x$, $g'(x) = -2(\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

① 当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时, 由 $g'(x) = 0$ 得, $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = -\frac{\pi}{3}$,

同理有 $f(x)_{\text{极大}} = g(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi > 0$,

又 $g(-\frac{\pi}{2}) > g(-\frac{\pi}{3}) > 0$, $g(0) = 0$, 所以 $g(x) > 0$, 从而 $f(x) > 0$. ……10 分

② 当 $x = -\frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\pi > 0$.

由①②得, 当 $x < 0$ 时, $f(x) > 0$ (j_1); 当 $x > 0$ 时, 显然 $f(x) < 0$ (j_2).

由 (j_1)(j_2) 得, $x \neq 0$ 时, $xf(x) < 0$. 由 (i)(ii) 结论获证. ……12 分

方法二: 则 $0 < -a < 2$, 则 $g(x) = -a \sin^2 x - \sqrt{3}x$, 满足 $x \neq 0$ 时, $xg(x) < 0$.

又 $y = xf(x)$ 与 $y = xg(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 所以 $x \neq 0$ 时, $xf(x) < 0$.

由 (i)(ii) 结论获证. …… 12 分