

2021 年苏北七市高三第三次联考

数学试题

2021. 5. 6

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{x | \log_2(x-1) \leq 1\}$, $B = \{x | 2^{2-x} \geq \frac{1}{2}\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[1, 2]$ C. $(1, 2]$ D. $(1, 3]$

2. 已知复数 $z = \frac{2}{1+i} + 3i$, 则 $|z| =$

- A. 5 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{17}$ D. $3 + \sqrt{2}$

3. 设 $a = 3^{\frac{1}{4}}$, $b = \log_4 3$, $c = 4^{\frac{1}{4}}$, 则

- A. $c > b > a$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $a > b > c$

4. 已知点 $A(1, 1)$, $B(7, 5)$, 将向量 $\overrightarrow{AB}$ 绕点 A 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到 $\overrightarrow{AC}$, 则点 C 的坐标为

- A. $(5, -5)$ B. $(3, -7)$ C. $(-5, 5)$ D. $(-3, 7)$

5. “角谷猜想”最早流传于美国, 不久传到欧洲, 后来日本数学家角谷把它带到亚洲. 该猜想是指对于每一个正整数, 如果它是奇数, 则对它乘 3 再加 1; 如果它是偶数, 则对它除以 2. 如此循环, 经过有限步演算, 最终都能得到 1. 若正整数 n 经过 5 步演算得到 1, 则 n 的取值不可能是

- A. 32 B. 16 C. 5 D. 4

6. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 A 在双曲线 E 的左支上, 且 $\angle F_1 A F_2 = 120^\circ$, $A F_2 = 2 A F_1$, 则双曲线 E 的离心率为

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{7}$ D. 7

7. 在数 1 和 3 之间插入 n 个实数, 使得这 $n+2$ 个数构成等差数列, 将这 $n+2$ 个数的和记为 b_n , 则数列 $\{\log_3 \frac{b_{n+1}}{b_n}\}$ 的前 78 项的和为

- A. 3 B. $\log_3 78$ C. 5 D. $\log_3 8$

8. 已知函数 $f(x) = 2 \ln x - x^2 e^x + 1$. 若存在 $x_0 > 0$, 使 $f(x_0) \geq a x_0$, 则 a 的最大值为

- A. 0 B. -1 C. $1 - e$ D. $1 - e^2$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点. 若 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, 则 $|\overrightarrow{AM}| =$

- A. $\frac{1}{2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ B. $\frac{1}{2} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$
C. $\frac{1}{2} \sqrt{2(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) - (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2}$ D. $\frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$

10. 在 $(2x^2 - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中, 下列说法正确的是

- A. 各项系数和为 1 B. 第 2 项的二项式系数为 15
C. 含 x^3 的项的系数为 -160 D. 不存在常数项

11. 2021年3月30日,小米正式开始启用具备“超椭圆”数学之美的新logo. 设计师的灵感来源于曲线 $C: |x|^n + |y|^n = 1$. 则下列说法正确的是
- A. 曲线 C 关于原点成中心对称
 B. 当 $n=-2$ 时,曲线 C 上的点到原点的距离的最小值为2
 C. 当 $n>0$ 时,曲线 C 所围成图形的面积的最小值为 π
 D. 当 $n>0$ 时,曲线 C 所围成图形的面积小于4

12. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为2, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$. 将 $\triangle DAC$ 沿着对角线 AC 折起至 $\triangle D'AC$,连接 BD' . 设二面角 $D'-AC-B$ 的大小为 θ ,则下列说法正确的是

- A. 若四面体 $D'ABC$ 为正四面体,则 $\theta = \frac{\pi}{3}$ B. 四面体 $D'ABC$ 的体积最大值为1
 C. 四面体 $D'ABC$ 的表面积最大值为 $2(\sqrt{3}+2)$
 D. 当 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 时,四面体 $D'ABC$ 的外接球的半径为 $\frac{\sqrt{21}}{3}$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a=4, b=6, \cos B = \frac{5}{13}$,则 $\sin A =$ _____.
14. 为了解某小区居民的家庭年收入 x (万元)与年支出 y (万元),随机调查了该小区的10户家庭,根据调查数据的散点图可以看出 y 与 x 之间有线形相关关系,设其回归直线方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$. 已知 $\bar{x} = 20, \bar{y} = 16, \hat{b} = 0.76$. 若该小区某家庭的年收入为30万元,则据此估计,该家庭的年支出为 _____ 万元.
15. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$. 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x^2$,则直线 $y = \frac{1}{5}x$ 与函数 $y = f(x)$ 的图象的交点的个数为 _____.
16. 若矩形 $ABCD$ 满足 $\frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,则称这样的矩形为黄金矩形. 现有如图1所示的黄金矩形卡片 $ABCD$,已知 $AD = 2x, AB = 2y$, E 是 CD 的中点, $EF \perp CD, FG \perp EF$,且 $EF = FG = x$,沿 EF, FG 剪开. 用3张这样剪开的卡片,两两垂直地交叉拼接,得到如图2所示的几何模型. 若连结这个几何模型的各个顶点,便得到一个正 _____ 面体; 若 $y=2$,则该正多面体的表面积为 _____.

(本题第一空2分,第二空3分)

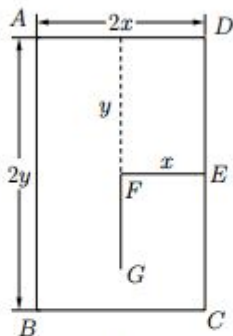


图1



图2

四、解答题:本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分10分)

设各项均为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_7=35$, 且 a_1, a_4-1, a_7 成等比数列.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n+b_{n+1}=a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项的和 T_{2n} .

18. (本题满分12分)

已知函数 $f(x)=3\sin(2x+\varphi)$ ($-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$) 同时满足下列3个条件中的2个. 3个条件依次是: ① $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称; ②当 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取得最大值; ③0是函数 $y=f(x)+\frac{3}{2}$ 的一个零点.

(1)试写出满足题意的2个条件的序号, 并说明理由;

(2)求函数 $g(x)=f(x)+6\cos^2x$ 的值域.

19. (本题满分12分)

面对新一轮科技和产业革命带来的创新机遇,某企业对现有机床进行更新换代,购进一批新机床. 设机床生产的零件的直径为 X (单位: mm).

(1) 现有旧机床生产的零件10个, 其中直径大于124 mm的有3个. 若从中随机抽取4个, 记 ξ 表示取出的零件中直径大于124 mm的零件的个数, 求 ξ 的概率分布及数学期望 $E(\xi)$:

(2) 若新机床生产的零件直径 $X \sim N(120, 4)$, 从生产的零件中随机取出10个, 求至少有一个零件直径大于124 mm的概率.

参考数据: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(|X - \mu| \leq \sigma) \approx 0.6827$, $P(|X - \mu| \leq 2\sigma) \approx 0.9545$,

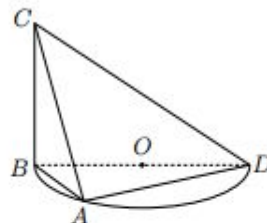
$P(|X - \mu| \leq 3\sigma) \approx 0.9974$, $0.97725^{10} \approx 0.7944$, $0.9545^{10} \approx 0.6277$.

20. (本题满分12分)

如图, A 是以 BD 为直径的半圆 O 上一点, 平面 $BCD \perp$ 平面 ABD , $BC \perp BD$.

(1) 求证: $AD \perp$ 平面 ABC ;

(2) 若 $BD = 2BC = 2$, $\widehat{AD} = 2\widehat{AB}$, 求二面角 $A - CD - B$ 的余弦值.

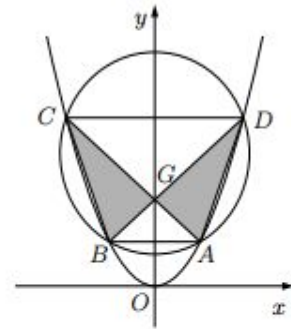


21. (本题满分 12 分)

已知圆 $M: x^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = 4$ 与抛物线 $E: x^2 = my (m > 0)$ 相交于 A, B, C, D , 且在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$.

(1) 若 $\vec{OA} \cdot \vec{OD} = \frac{15}{4}$, 求实数 m 的值;

(2) 设 AC 与 BD 相交于点 G , $\triangle GAD$ 与 $\triangle GBC$ 组成蝶形的面积为 S , 求点 G 的坐标及 S 的最大值.



22. (本题满分12分)

已知函数 $f(x) = a\sin^2 x - \sqrt{3}x$.

(1) 若 $x = \frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的一个极值点, 试讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的单调性;

(2) 设 $-2 \leq a \leq 2$, 证明: 当 $x \neq 0$ 时, $xf(x) < 0$.