

盐城市 2021 届高三年级第三次模拟考试

数 学 试 题

注意事项:

1. 本试卷考试时间为 120 分钟, 试卷满分 150 分, 考试形式闭卷;
2. 本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置, 否则不给分;
3. 答题前, 务必将自己的学校、班级、姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在答题卡上。

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 设集合 $A = \{x | y = \sqrt{x-2}\}$, $B = \{y | y = \sqrt{x-2}\}$, $C = \{(x, y) | y = \sqrt{x-2}\}$, 则下列集合不为空集的是
A. $A \cap B$ B. $A \cap C$ C. $B \cap C$ D. $A \cap B \cap C$
2. 若复数 z 满足 $|z-i| \leq 2$, 则 $z\bar{z}$ 的最大值为
A. 1 B. 2 C. 4 D. 9
3. 同学们都知道平面内直线方程的一般式为 $Ax + By + C = 0$, 我们可以这样理解: 若直线 l 过定点 $P_0(x_0, y_0)$, 向量 $\vec{n} = (A, B)$ 为直线 l 的法向量, 设直线 l 上任意一点 $P(x, y)$, 则 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$, 得直线 l 的方程为 $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$, 即可转化为直线方程的一般式. 类似地, 在空间中, 若平面 α 过定点 $Q_0(1, 0, -2)$, 向量 $\vec{m} = (2, -3, 1)$ 为平面 α 的法向量, 则平面 α 的方程为
A. $2x - 3y + z + 4 = 0$ B. $2x + 3y - z - 4 = 0$
C. $2x - 3y + z = 0$ D. $2x + 3y - z + 4 = 0$
4. 将函数 $f(x) = \sin \frac{1}{2}x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 若 $x \in (0, m)$ 时, 函数 $g(x)$ 的图象在 $f(x)$ 的上方, 则实数 m 的最大值为
A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{5\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{6}$
5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n}{(n+1)!}$, 则其前 n 项和为
A. $1 - \frac{1}{(n+1)!}$ B. $1 - \frac{1}{n!}$ C. $2 - \frac{1}{n!}$ D. $2 - \frac{1}{(n+1)!}$
6. 韦达是法国杰出的数学家, 其贡献之一是发现了多项式方程根与系数的关系, 如: 设一元三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ 的 3 个实数根为 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}$, $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$. 已知函数 $f(x) = 2x^3 - x + 1$, 直线 l 与 $f(x)$ 的图象相切于点 $P(x_1, f(x_1))$, 且交 $f(x)$ 的图象于另一点 $Q(x_2, f(x_2))$, 则



A. $2x_1 - x_2 = 0$ B. $2x_1 - x_2 - 1 = 0$ C. $2x_1 + x_2 + 1 = 0$ D. $2x_1 + x_2 = 0$

7. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的焦距为 2, 若以点 $P(m, n) (m < a)$ 为圆心的圆 P 过 C 的右顶点且与 C 的两条渐近线相切, 则 OP 长的取值范围是

A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(0, 1)$ C. $(\frac{1}{2}, 1)$ D. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

8. 已知正数 x, y, z 满足 $x \ln y = ye^z = zx$, 则 x, y, z 的大小关系为

A. $x > y > z$ B. $y > x > z$ C. $x > z > y$ D. 以上均不对

二、多项选择题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求的. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 已知 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\mu_1 > \mu_2$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, 则下列结论中一定成立的有

A. 若 $\sigma_1 > \sigma_2$, 则 $P(|X - \mu_1| \leq 1) < P(|Y - \mu_2| \leq 1)$;
 B. 若 $\sigma_1 > \sigma_2$, 则 $P(|X - \mu_1| \leq 1) > P(|Y - \mu_2| \leq 1)$;
 C. 若 $\sigma_1 = \sigma_2$, 则 $P(X > \mu_2) + P(Y > \mu_1) = 1$;
 D. 若 $\sigma_1 = \sigma_2$, 则 $P(X > \mu_2) + P(Y > \mu_1) < 1$.

10. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_n + S_n = An^2 + Bn + C$, 则下列说法中正确的有

A. 存在 A, B, C 使得 $\{a_n\}$ 是等差数列;
 B. 存在 A, B, C 使得 $\{a_n\}$ 是等比数列;
 C. 对任意 A, B, C 都有 $\{a_n\}$ 一定是等差数列或等比数列;
 D. 存在 A, B, C 使得 $\{a_n\}$ 既不是等差数列也不是等比数列.

11. 已知矩形 $ABCD$ 满足 $AB = 1$, $AD = 2$, 点 E 为 BC 的中点, 将 $\triangle ABE$ 沿 AE 折起, 点 B 折至 B' , 得到四棱锥 $B' - AECD$, 若点 P 为 $B'D$ 的中点, 则

A. $CP \parallel$ 平面 $B'AE$;
 B. 存在点 B' , 使得 $CP \perp$ 平面 $AB'D$;
 C. 四棱锥 $B' - AECD$ 体积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$;
 D. 存在点 B' , 使得三棱锥 $B' - ADE$ 外接球的球心在平面 $AECD$ 内.

12. 将平面向量 $\vec{a} = (x_1, x_2)$ 称为二维向量, 由此可推广至 n 维向量 $\vec{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. 对于

n 维向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 其运算与平面向量类似, 如数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ (θ 为向量

$\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角), 其向量 $\vec{a}$ 的模 $|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. 则下列说法正确的有



- A. 不等式 $(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2) \leq (\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2$ 可能成立;
- B. 不等式 $(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2) \geq (\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2$ 一定成立;
- C. 不等式 $n \sum_{i=1}^n x_i^2 < (\sum_{i=1}^n x_i)^2$ 可能成立;
- D. 若 $x_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 则不等式 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \sum_{i=1}^n x_i \geq n^2$ 一定成立.

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 文旅部在 2021 年围绕“重温红色历史、传承奋斗精神”“走进大国重器、感受中国力量”“体验美丽乡村、助力乡村振兴”三个主题, 遴选推出“建党百年红色旅游百条精品线路”. 这些精品线路中包含上海一大会议址、嘉兴南湖、井冈山、延安、西柏坡等 5 个传统红色旅游景区, 还有港珠澳大桥、北京大兴国际机场、“中国天眼”、“两弹一星”纪念馆、湖南十八洞村、浙江余村、贵州花茂村等 7 个展现改革开放和新时代发展成就、展示科技强国和脱贫攻坚成果的景区. 为安排旅游路线, 从上述 12 个景区中选 3 个景区, 则至少含有 1 个传统红色旅游景区的选法有_____种.
14. 满足等式 $(1 - \tan \alpha)(1 - \tan \beta) = 2$ 的数组 (α, β) 有无穷多个, 试写出一个这样的数组_____.
15. 若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的最小值为_____.
16. 对于函数 $f(x) = \ln x + mx^2 + nx + 1$, 有下列 4 个论断:
- 甲: 函数 $f(x)$ 有两个减区间; 乙: 函数 $f(x)$ 的图象过点 $(1, -1)$;
- 丙: 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极大值; 丁: 函数 $f(x)$ 单调.
- 若其中有且只有两个论断正确, 则 m 的取值为_____.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 点 D 满足 $3\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

- (1) 若 $b = c$, 求 A 的值;
- (2) 求 B 的最大值.

18. (本小题满分 12 分)

请在① $a_1 = \sqrt{2}$; ② $a_1 = 2$; ③ $a_1 = 3$ 这 3 个条件中选择 1 个条件, 补全下面的命题使其成为真命题, 并证明这个命题 (选择多个条件并分别证明的按前 1 个评分).

命题: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n^2$, 若_____, 则当 $n \geq 2$ 时, $a_n \geq 2^n$ 恒成立.

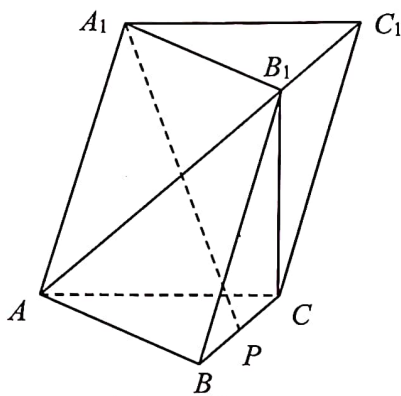


19. (本小题满分 12 分)

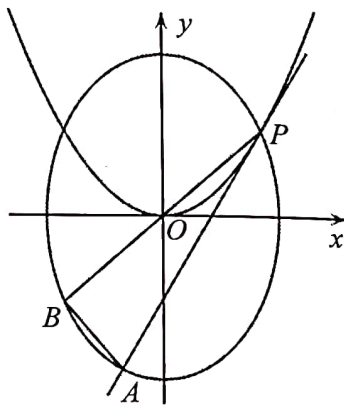
如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=BB_1=2BC=2$, $\angle CBB_1=2\angle CAB=\frac{\pi}{3}$, 且平面 $ABC \perp$ 平面 B_1C_1CB .

(1) 求证: 平面 $ABC \perp$ 平面 ACB_1 ;

(2) 设点 P 为直线 BC 的中点, 求直线 A_1P 与平面 ACB_1 所成角的正弦值.



(第 19 题图)



(第 20 题图)

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 P 是抛物线 $C_1: x^2 = 2py (p > 0)$ 上的一个点, 其横坐标为 x_0 , 过点 P 作抛物线 C_1 的切线 l .

(1) 求直线 l 的斜率 (用 x_0 与 p 表示);

(2) 若椭圆 $C_2: \frac{y^2}{2} + x^2 = 1$ 过点 P , l 与 C_2 的另一个交点为 A , OP 与 C_2 的另一个交点为 B , 求证: $AB \perp PB$.

21. (本小题满分 12 分)

运用计算机编程, 设计一个将输入的正整数 k “归零”的程序如下: 按下回车键, 等可能的将 $[0, k)$ 中的任意一个整数替换 k 的值并输出 k 的值, 反复按回车键执行以上操作直到输出 $k=0$ 后终止操作.

(1) 若输入的初始值 k 为 3, 记按回车键的次数为 ξ , 求 ξ 的概率分布与数学期望;

(2) 设输入的初始值为 $k (k \in \mathbb{N}^*)$, 求运行“归零”程序中输出 $n (0 \leq n \leq k-1)$ 的概率.

22. (本小题满分 12 分)

设 $f(x) = \frac{\ln x}{x^n} (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求证: 函数 $f(x)$ 一定不单调;

(2) 试给出一个正整数 a , 使得 $e^x > x^2 \ln x + a \sin x$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立.

(参考数据: $e \approx 2.72$, $e^2 \approx 7.39$, $e^3 \approx 20.10$,)

