

## 2021 年广州市普通高中毕业班综合测试 (二)

## 数 学

本试卷共 6 页, 22 小题, 满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项: 1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、试室号和座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上, 并在答题卡相应位置上填涂考生号。

2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后, 将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $P = \{x | x < 3\}$ ,  $Q = \{x | -2 < x < 2\}$ , 则

A.  $P \subseteq Q$       B.  $Q \subseteq P$       C.  $P \cap Q = P$       D.  $P \cup Q = Q$

2. 某中学甲, 乙, 丙, 丁四名同学去 A, B, C, D 四个社区开展“厉行节约, 反对餐饮浪费”宣传活动, 每名同学只去一个社区, 每个社区一名同学。甲说: 我不去 A 社区; 乙说: 我不去 A 社区也不去 D 社区; 丙说: 我不去 B 社区。若甲, 乙, 丙三人中只有甲和乙说了真话, 则去 D 社区的是

A. 甲      B. 乙      C. 丙      D. 丁

3. 已知  $z_1, z_2$  都是复数,  $z_2$  的共轭复数为  $\overline{z_2}$ , 下列命题中, 真命题的是

A. 若  $|z_1| = |z_2|$ , 则  $z_1 = z_2$       B. 若  $z_1 > z_2$ , 则  $|z_1| > |z_2|$   
C. 若  $z_1 = z_2$ , 则  $z_1 = \overline{z_2}$       D. 若  $z_1 = \overline{z_2}$ , 则  $z_1 + z_2$  为实数

4. 已知第二象限角  $\theta$  的终边上有两点  $A(-1, a)$ ,  $B(b, 2)$ , 且  $\cos \theta + 3\sin \theta = 0$ , 则  $3a - b =$

A. -7      B. -5      C. 5      D. 7



5.  $(x^2+1)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$  展开式中的常数项是

A. 160

B. 100

C. -100

D. -160

6. 已知函数  $f(x) = xe^x + \frac{x}{e^x}$ , 且  $f(1+a) + f(-a^2+a+2) > 0$ , 则  $a$  的取值范围是

A.  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

B.  $(-1, 3)$

C.  $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

D.  $(-3, 1)$

7. 学生到工厂参加劳动实践, 用薄铁皮制作一个圆柱体, 圆柱体的全面积为  $8\pi$ , 则该圆柱体的外接球的表面积的最小值是

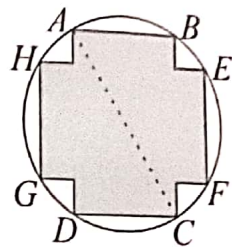
A.  $4(\sqrt{5}-1)\pi$

B.  $8(\sqrt{5}-1)\pi$

C.  $4(\sqrt{5}+1)\pi$

D.  $8(\sqrt{5}+1)\pi$

8. 如图, 有一种变压器, 铁芯的截面是正十字形(阴影部分, 其中矩形  $ABCD$  绕其对称中心按顺时针方向旋转  $90^\circ$  后与矩形  $EFGH$  重合), 已知  $AB=2$ , 正十字形有一个外接圆, 从外接圆内部随机取一点, 此点取自正十字形的概率为



$\frac{2(\sqrt{5}-1)}{\pi}$ , 则  $\tan \angle ACD =$

A.  $\sqrt{5}-1$

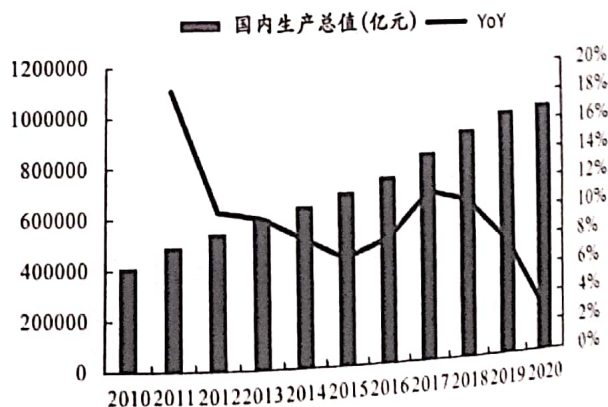
B.  $2\sqrt{3}-2$

C.  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

D.  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 2020 年中国经济在疫情阻击战的基础上实现了正增长, 国内生产总值首次突破百万亿大关. 根据中国统计局官网提供的数据, 2010 年~2020 年中国国内生产总值(单位: 亿元)的条形图和国内生产总值年增长率(YoY)的折线图如图, 根据该图, 下列结论正确的是



A. 2017 年国内生产总值年增长率最大

B. 2011 年国内生产总值年增长率最大

C. 这 11 年国内生产总值年增长率不断减小

D. 这 11 年国内生产总值逐年增长



10. 过双曲线  $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  的左焦点  $F$  作直线  $l$  交  $C$  于  $A, B$  两点, 则

- A. 若  $|AB|=1$ , 则直线  $l$  只有 1 条      B. 若  $|AB|=2$ , 则直线  $l$  有 2 条  
C. 若  $|AB|=3$ , 则直线  $l$  有 3 条      D. 若  $|AB|=4$ , 则直线  $l$  有 3 条

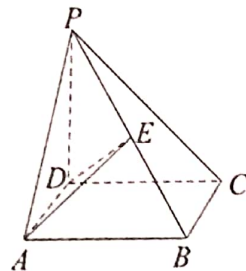
11. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面为矩形,  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AD=1$ ,  $PD=AB=2$ , 点  $E$  是  $PB$  的中点, 过  $A, D, E$  三点的平面  $\alpha$  与平面  $PBC$  的交线为  $l$ , 则

A.  $l \parallel$  平面  $PAD$

B.  $AE \parallel$  平面  $PCD$

C. 直线  $PA$  与  $l$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. 平面  $\alpha$  截四棱锥  $P-ABCD$  所得的上, 下两部分几何体的体积之比为  $\frac{3}{5}$



12. 对于函数  $f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 1, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ -f(x-1), & x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right], \\ \frac{1}{2}f(x-2), & x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right), \end{cases}$  则下列结论中正确的是

A. 任取  $x_1, x_2 \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ , 都有  $|f(x_1) - f(x_2)| < 2$  恒成立

B.  $f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + \dots + f(2020) = 2 - \frac{1}{2^{1010}}$

C. 对任意  $x > 0$ , 不等式  $f(x) \leq \frac{k}{x}$  恒成立, 则实数  $k$  的取值范围是  $[1, +\infty)$

D. 函数  $y = f(x) - \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$  有且仅有 2 个零点

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_3 = 2$ ,  $a_4 + a_5 = 10$ , 则  $\log_2 a_6 =$  \_\_\_\_\_.

14. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = \sqrt{3}$ ,  $AC = 3$ , 点  $D$  在  $AC$  上, 且  $AD = 2DC$ ,

则  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} =$  \_\_\_\_\_.



15. 若直线  $y = -2x + \frac{2}{3}$  与曲线  $y = \frac{1}{3}x^3 - ax$  相切, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

16. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的两个焦点为  $F_1(-2, 0)$  和  $F_2(2, 0)$ , 直线  $l$  过点  $F_1$ , 点

$F_2$  关于  $l$  的对称点  $A$  在  $C$  上, 且  $(\overrightarrow{F_1A} + 2\overrightarrow{F_1F_2}) \cdot \overrightarrow{AF_2} = 8$ , 则  $C$  的方程为 \_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 1$ ,  $S_{n+1} + 2S_{n-1} = 3S_n (n \geq 2)$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 令  $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

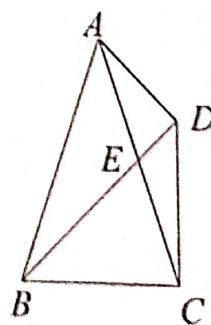
18. (12 分)

如图, 在四边形  $ABCD$  中,  $\triangle BCD$  是等腰直角三角形,  $\angle BCD = 90^\circ$ ,

$\angle ADB = 90^\circ$ ,  $\sin \angle ABD = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  $BD = 2$ ,  $AC$  与  $BD$  交于点  $E$ .

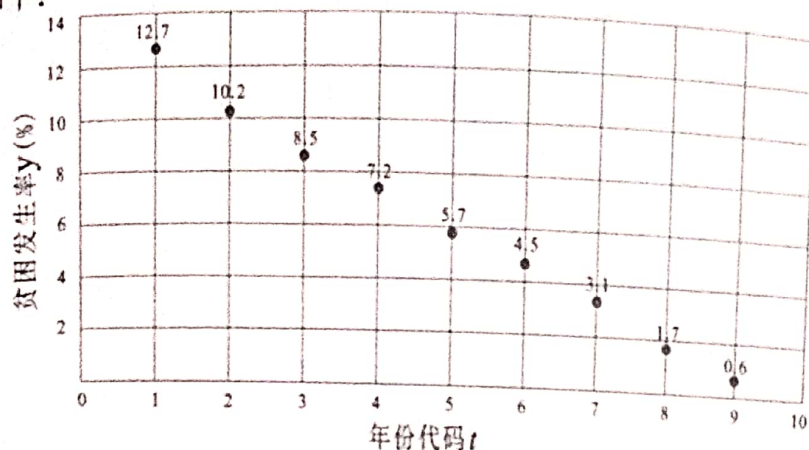
(1) 求  $\sin \angle ACD$ ;

(2) 求  $\triangle ABE$  的面积.



19. (12分)

习近平总书记指出：在扶贫的路上，不能落下一个贫困家庭，丢下一个贫困群众。根据相关统计，2010年以后中国贫困人口规模呈逐年下降趋势，2011年~2019年全国农村贫困发生率的散点图如下：



注：年份代码 1 ~ 9 分别对应年份 2011 年 ~ 2019 年。

(1) 求  $y$  关于  $t$  的回归直线方程 (系数精确到 0.01)；

(2) 已知某贫困地区的农民人均年纯收入  $X$  (单位：万元) 满足正态分布  $N(1.6, 0.36)$ ，

若该地区约有 97.72% 的农民人均年纯收入高于该地区最低人均年纯收入标准，则该地区最低人均年纯收入标准大约为多少万元？

参考数据与公式：  $\sum_{i=1}^9 y_i = 54.2$ ，  $\sum_{i=1}^9 t_i y_i = 183.6$ 。

回归直线  $\hat{y} = bt + a$  的斜率和截距的最小二乘估计分别为  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i y_i - n \bar{t} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$ ，  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{t}$ 。

若随机变量  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ，则  $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$ ，

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544$ ，  $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9974$ 。



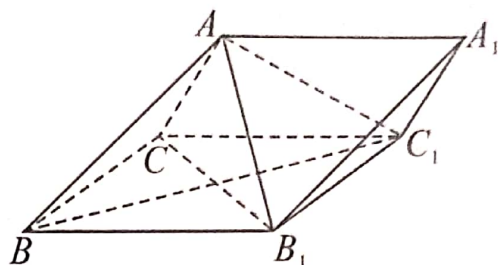
20. (12分)

如图, 三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的侧面  $BB_1C_1C$  是菱形,  $\angle ABB_1 = \angle ABC$ .

(1) 求证:  $B_1C \perp$  平面  $ABC_1$ ;

(2) 若  $BB_1 = B_1C = 2$ ,  $AB = AC_1$ , 且二面角  $B_1-AB-C$  为直二面角,

求三棱锥  $C_1-ABB_1$  的体积.



21. (12分)

已知抛物线  $C: x^2 = 2py (p > 0)$  上的点到点  $A(0, p)$  的距离的最小值为 2.

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 若点  $F$  是  $C$  的焦点, 过  $F$  作两条互相垂直的直线  $l_1, l_2$ ,  $l_1$  与  $C$  交于  $M$ ,

$N$  两点,  $l_2$  与  $C$  交于  $P, Q$  两点, 线段  $MN, PQ$  的中点分别是  $S, T$ , 是否存在定

圆使得直线  $ST$  截该圆所得的线段长恒为定值? 若存在, 写出一个定圆的方程; 若不存在,

说明理由.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = \ln(x+1) + a(x-1)^2 (a > 0)$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 证明: 对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ , 都有  $1 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{3^2} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2} < \frac{2n}{\sqrt{n+1}}$ .

