

2021 年广州市普通高中毕业班综合测试（一）

数学试题参考答案及评分标准

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.

2. 对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分正确解答应得分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分.

3. 解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

4. 只给整数分数. 选择题不给中间分.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	B	A	C	B	D	A

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

9. AC

10. BC

11. BCD

12. ABD

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. -1

14. 68

15. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

16. $\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}$

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分.

17. (10 分)

(1) 解: 在 $\triangle ABC$ 中, $A+C=\pi-B$, 所以 $\cos(A+C)=\cos(\pi-B)=-\cos B$.

.....1 分

由 $\cos 2B=\cos(A+C)$, 得 $2\cos^2 B-1=-\cos B$,

即 $(2\cos B-1)(\cos B+1)=0$2 分

因为 $0<B<\pi$, 所以 $\cos B+1\neq 0$3 分

所以 $2\cos B-1=0$, 即 $\cos B=\frac{1}{2}$4 分

所以 $B=\frac{\pi}{3}$5 分

(2) 解: 因为 $a\sin A+c\sin C=6\sin B$,

根据正弦定理得 $a^2+c^2=6b$6 分

因为 $b=3$, 所以 $a^2+c^2=18$.

$$\text{由 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \text{ 得 } \frac{1}{2} = \frac{a^2 + c^2 - 9}{2ac}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{则 } ac = 9. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由 } (a+c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac = 36,$$

$$\text{得 } a+c = 6. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的周长为 } 9. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. (12 分)

(1) 解: 因为 a_2 是 a_1, a_5 的等比中项,

$$\text{所以 } a_2^2 = a_1 a_5. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } (a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 4d), \text{ 得 } d^2 = 2a_1 d.$$

$$\text{因为 } d \neq 0, \text{ 所以 } d = 2a_1. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } S_5 = 25, \text{ 所以 } 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2} d = 25. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } a_1 = 1, d = 2. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 解法 1: 由 (1) 得 } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = n^2. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{由 } b_n + b_{n+1} = S_n = n^2, \text{ 得 } b_{n-1} + b_{n+2} = (n+1)^2, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } b_{n+2} - b_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } b_{20} - b_2 = (b_{20} - b_{18}) + (b_{18} - b_{16}) + \dots + (b_4 - b_2) \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$= (2 \times 18 + 1) + (2 \times 16 + 1) + \dots + (2 \times 2 + 1)$$

$$= 2 \times (18 + 16 + \dots + 2) + 9$$

$$= 2 \times \frac{(18+2) \times 9}{2} + 9 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$= 189. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } b_2 - b_{20} = -189. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

解法 2: 由 (1) 得 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = n^2$6 分

由 $b_n + b_{n+1} = S_n = n^2$, 得 $b_{n-1} + b_{n+2} = (n+1)^2$7 分

所以 $b_{n+2} - b_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$8 分

则 $b_{n+4} - b_{n-2} = 2(n+2)+1 = 2n+5$,

所以 $b_{n+4} - b_n = 4n+6$9 分

则 $b_{n+8} - b_{n+4} = 4(n+4)+6 = 4n+22$,

所以 $b_{n+8} - b_n = 8n+28$.

则 $b_{n+16} - b_{n+8} = 8(n+8)+28 = 8n+92$,

所以 $b_{n+16} - b_n = 16n+120$.

而 $b_{n+18} - b_{n-16} = 2(n+16)+1 = 2n+33$,

所以 $b_{n+18} - b_n = 18n+153$10 分

所以 $b_{20} - b_2 = 18 \times 2 + 153 = 189$11 分

所以 $b_2 - b_{20} = -189$12 分

解法 3: 由 (1) 得 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = n^2$6 分

由 $b_n + b_{n+1} = S_n = n^2$, 得 $b_{n+1} - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1) = -\left(b_n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right)$7 分

若 $b_1 = 0$, 则 $b_n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = 0$, 即 $b_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$8 分

所以 $b_2 - b_{20} = \frac{1}{2} \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 2 - \left(\frac{1}{2} \times 20^2 - \frac{1}{2} \times 20\right) = -189$9 分

若 $b_1 \neq 0$, 则数列 $\left\{b_n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right\}$ 是以 b_1 为首项, 公比为 -1 的等比数列.

则 $b_n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = (-1)^{n-1} b_1$, 即 $b_n = (-1)^{n-1} b_1 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$10 分

所以 $b_2 - b_{20} = b_1 + \frac{1}{2} \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 2 - \left(b_1 + \frac{1}{2} \times 20^2 - \frac{1}{2} \times 20 \right) = -189$11 分

综上所述得 $b_2 - b_{20} = -189$12 分

19. (12 分)

(1) 证明: 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 60^\circ$,

所以 $\triangle ABD$ 是等边三角形.1 分

因为点 E 是边 AB 的中点,

所以 $DE \perp BE$, $DE \perp AE$, 折叠后有 $DE \perp A_1E$2 分

因为 $BE \cap A_1E = E$, $BE \subset$ 平面 A_1BE , $A_1E \subset$ 平面 A_1BE ,

所以 $DE \perp$ 平面 A_1BE3 分

因为 $DE \subset$ 平面 $BCDE$,

所以平面 $A_1BE \perp$ 平面 $BCDE$4 分

(2) 解法 1: 因为 $A_1E \perp BE$, $A_1E \perp DE$, $DE \perp BE$,

故以点 E 为原点, 以射线 EB, ED, EA_1 分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标

系 $E-xyz$6 分

因为菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD = 60^\circ$,

所以 $CD = 2$, $DE = \sqrt{3}$, $A_1E = 1$7 分

则 $E(0, 0, 0)$, $A_1(0, 0, 1)$, $C(2, \sqrt{3}, 0)$, $D(0, \sqrt{3}, 0)$.

所以 $\overrightarrow{CE} = (-2, -\sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{DC} = (2, 0, 0)$, $\overrightarrow{A_1D} = (0, \sqrt{3}, -1)$8 分

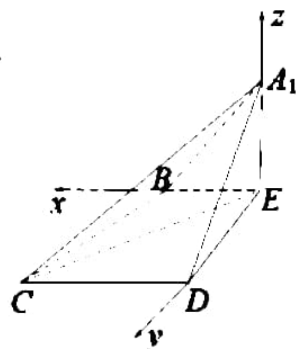
设平面 A_1CD 的法向量为 $n = (x, y, z)$.

由 $n \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, $n \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0$, 得 $x = 0$, $\sqrt{3}y - z = 0$9 分

令 $y = 1$, 得 $z = \sqrt{3}$.

所以平面 A_1CD 的一个法向量为 $n = (0, 1, \sqrt{3})$10 分

设直线 CE 与平面 A_1CD 所成角为 θ .



$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \vec{CE} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{CE}|}{|\vec{n}| |\vec{CE}|} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14}. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以直线 } CE \text{ 与平面 } A_1CD \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{\sqrt{21}}{14}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

解法 2: 因为 $A_1E \perp BE$, 又 $BE \perp DE$, $A_1E \cap DE = E$,

所以 $BE \perp$ 平面 A_1DE . $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

因为 $CD \parallel BE$, 所以 $CD \perp$ 平面 A_1DE . $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

因为 $CD \subset$ 平面 A_1CD ,

所以平面 $A_1DE \perp$ 平面 A_1CD . $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

因为平面 $A_1DE \cap$ 平面 $A_1CD = A_1D$,

作 $EF \perp A_1D$ 于 F , 则 $EF \perp$ 平面 A_1CD . $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

连接 CF , 则 $\angle ECF$ 是直线 CE 与平面 A_1CD 所成角. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

因为菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD = 60^\circ$,

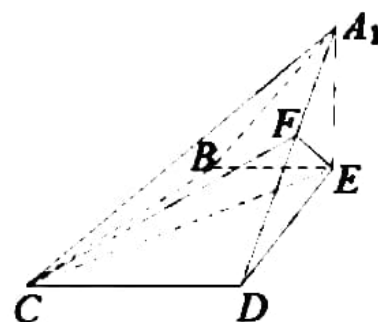
所以 $CD = 2$, $DE = \sqrt{3}$, $A_1E = 1$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, $CE = \sqrt{CD^2 + DE^2} = \sqrt{7}$.

在 $\text{Rt}\triangle EFA_1$ 中, $EF = A_1E \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

在 $\text{Rt}\triangle CFE$ 中, $\sin \angle ECF = \frac{EF}{CE} = \frac{\sqrt{21}}{14}$, $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

所以直线 CE 与平面 A_1CD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{14}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$



(1) 解: 设甲选择在 A 区投篮的球数为 a ($a=0,1,2,3,4,5$), 进球数为 X_1 , 得分为 Y_1 ,

则 $Y_1 = 2X_1$1 分

因为 $X_1 \sim B\left(a, \frac{2}{3}\right)$, 所以 $E(X_1) = \frac{2}{3}a$, $E(Y_1) = E(2X_1) = \frac{4}{3}a$.

所以甲在 A 区投篮得分的期望值为 $\frac{4}{3}a$2 分

甲在 B 区投篮的球数为 $5-a$, 进球数为 X_2 , 得分为 Y_2 , 则 $Y_2 = 3X_2$3 分

因为 $X_2 \sim B\left(5-a, \frac{1}{2}\right)$, $E(X_2) = \frac{1}{2}(5-a)$, $E(Y_2) = E(3X_2) = \frac{3}{2}(5-a)$.

所以甲在 B 区投篮得分的期望值为 $\frac{3}{2}(5-a)$4 分

依题意得 $\frac{4}{3}a + \frac{3}{2}(5-a) \geq 7$, 解得 $a \leq 3$5 分

所以甲选择在 A 区投篮的球数最多是 3 个.6 分

(2) 解法 1: 设“甲在 A 区投篮得分高于在 B 区投篮得分”为事件 C ,

“甲在 A 区投篮得 6 分且在 B 区投篮得 3 分或 0 分”为事件 D ,

“甲在 A 区投篮得 4 分且在 B 区投篮得 3 分或 0 分”为事件 E ,

“甲在 A 区投篮得 2 分且在 B 区投篮得 0 分”为事件 F ,

则事件 $C = D \cup E \cup F$, 且事件 D , 事件 E 与事件 F 之间两两互斥.7 分

$$P(D) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left[C_1^1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] = \frac{2}{9}, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$P(E) = C_3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times \left[C_1^1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] = \frac{1}{3}, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$P(F) = C_3^1 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{18}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$P(C) = P(D \cup E \cup F) = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} = \frac{11}{18}. \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

所以甲在 A 区投篮得分高于在 B 区投篮得分的概率为 $\frac{11}{18}$12 分

解法 2: 设甲在 A 区投篮得分为 X , 在 B 区投篮得分为 Y , 其分布列分别为:

X	0	2	4	6	
P	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$C_3^1 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$	$C_3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	7 分

Y	0	3	6	
P	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$C_2^1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	8 分

设“甲在 A 区投篮得分高于在 B 区投篮得分”为事件 C .

则 $P(C) = P(Y=0) \cdot [1 - P(X=0)] + P(Y=3) \cdot [P(X=4) + P(X=6)]$ 10 分

$$= \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{27}\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{9} + \frac{8}{27}\right) \quad \text{.....11 分}$$

$$= \frac{11}{18}.$$

所以甲在 A 区投篮得分高于在 B 区投篮得分的概率为 $\frac{11}{18}$12 分

21. (12 分)

(1) 解: 由已知得, 圆 O_1 的圆心为 $O_1(-1,0)$, 半径 $r = |BO_1| = 4$, 点 $A(1,0)$.

因为线段 AB 的垂直平分线与 BO_1 相交于点 C , 所以 $|CA| = |CB|$1 分

所以 $|CA| + |CO_1| = |CB| + |CO_1| = |BO_1| = 4 > |O_1A|$2 分

所以点 C 的轨迹是以 O_1, A 为焦点, 长轴长为 4 的椭圆.3 分

设曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

则 $2a = 4$, $c = 1$, $b^2 = a^2 - c^2 = 3$.

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$4 分

(2) 解法 1: 由题意可知, 直线 l_1, l_2 的斜率都存在且不为 0,

设 $l_1: y = k(x+1)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x+1) \end{cases} \text{得} (4k^2+3)x^2 + 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0, \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

$$\Delta = (8k^2)^2 - 4(4k^2+3)(4k^2-12) = 144(k^2+1) > 0.$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{8k^2}{4k^2+3}, \quad x_1 x_2 = \frac{4k^2-12}{4k^2+3}, \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$|MN| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$= \sqrt{1+k^2} \sqrt{\left(-\frac{8k^2}{4k^2+3}\right)^2 - 4 \times \frac{4k^2-12}{4k^2+3}}$$

$$= \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{12\sqrt{k^2+1}}{4k^2+3} = \frac{12(k^2+1)}{4k^2+3}. \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

由于直线 l_2 过圆 O_1 的圆心, 则 $|PO_1| = |QO_1| = 4$ 且 P, Q 两点到直线 MN 的距离相等.

设直线 l_2 的倾斜角为 θ , 则 $\tan(\pi - \theta) = k$ 即 $\tan \theta = -k$.

$$\text{又 } P \text{ 到直线 } MN \text{ 的距离 } d = |PO_1| |\sin 2\theta| = 4 \left| \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \right| = 4 \times \frac{|2 \tan \theta|}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{8|k|}{1+k^2}.$$

$\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$$\text{则四边形 } MPNQ \text{ 的面积 } S = 2S_{\triangle PMN} = d \times |MN| = \frac{96|k|}{4k^2+3}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

由于四边形 $MPNQ$ 的面积为 $8\sqrt{3}$,

$$\text{则 } \frac{96|k|}{4k^2+3} = 8\sqrt{3}, \text{ 解得 } k = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以直线 } l_1 \text{ 的方程为 } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(x+1). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

解法2: 由题意可知, 直线 l_1, l_2 的斜率都存在且不为0,

设 $l_1: y = k(x+1), l_2: y = -k(x+1), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2),$

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x+1) \end{cases} \text{得} (4k^2+3)x^2 + 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0, \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

$$\Delta = (8k^2)^2 - 4(4k^2+3)(4k^2-12) = 144(k^2+1) > 0.$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{8k^2}{4k^2+3}, \quad x_1 x_2 = \frac{4k^2-12}{4k^2+3}. \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

设点 M , N 到 l_2 的距离分别为 d_1 和 d_2 ,

$$d_1 = \frac{|-k(x_1+1)-y_1|}{\sqrt{k^2+1}}, \quad d_2 = \frac{|-k(x_2+1)-y_2|}{\sqrt{k^2+1}},$$

四边形 $MPNQ$ 的面积为

$$S = \frac{1}{2}|PQ| \cdot (d_1 + d_2) = \frac{1}{2} \times 8 \times (d_1 + d_2) = 4(d_1 + d_2). \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

因为点 M 和点 N 分布在直线 l_2 的两侧, 则

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= \left| \frac{-k(x_1+1)-y_1}{\sqrt{k^2+1}} + \frac{k(x_2+1)+y_2}{\sqrt{k^2+1}} \right| = \left| \frac{2k(x_2-x_1)}{\sqrt{k^2+1}} \right| = \frac{2|k|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{\sqrt{k^2+1}} \\ &= 2|k| \frac{12\sqrt{k^2+1}}{(4k^2+3)\sqrt{k^2+1}} = \frac{24|k|}{4k^2+3}. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{所以四边形 } MPNQ \text{ 的面积 } S = \frac{96|k|}{4k^2+3}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

由于四边形 $MPNQ$ 的面积为 $8\sqrt{3}$,

$$\text{则 } \frac{96|k|}{4k^2+3} = 8\sqrt{3}, \text{ 解得 } k = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以直线 } l_1 \text{ 的方程为 } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(x+1). \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. (12 分)

(1) 解: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{由 } f(x) = x \ln x - ax^2 + x, \text{ 得 } f'(x) = \ln x + 2 - 2ax, \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{则 } f'(1) = 2 - 2a.$$

$$\text{又 } f(1) = 1 - a,$$

$$\text{则曲线 } y = f(x) \text{ 在点 } (1, f(1)) \text{ 处的切线 } l \text{ 的方程为 } y - (1 - a) = 2(1 - a)(x - 1), \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{即 } y = 2(1 - a)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 恒过定点 } \left(\frac{1}{2}, 0\right). \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2) 证法 1: 若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 则 $x_1 \ln x_1 - \alpha x_1^2 + x_1 = 0$, $x_2 \ln x_2 - \alpha x_2^2 + x_2 = 0$.

.....4 分

$$\text{得 } a = \frac{\ln x_1}{x_1} + \frac{1}{x_1} = \frac{\ln x_2}{x_2} + \frac{1}{x_2}.$$

因为 $x_2 > 2x_1 > 0$, 令 $x_2 = tx_1 (t > 2)$5 分

$$\text{则 } \frac{\ln x_1}{x_1} + \frac{1}{x_1} = \frac{\ln(tx_1)}{tx_1} + \frac{1}{tx_1}.$$

$$\text{得 } \ln x_1 = \frac{\ln t}{t-1} - 1. \quad \text{.....6 分}$$

$$\text{则 } \ln x_2 = \ln(tx_1) = \ln t + \ln x_1 = \frac{t \ln t}{t-1} - 1. \quad \text{.....7 分}$$

$$\text{令 } h(t) = \frac{t \ln t}{t-1} - 1 (t > 2), \text{ 则 } h'(t) = \frac{(\ln t + 1)(t-1) - t \ln t}{(t-1)^2} = \frac{t - \ln t - 1}{(t-1)^2}. \quad \text{.....8 分}$$

$$\text{令 } \varphi(t) = t - \ln t - 1 (t > 2), \text{ 则 } \varphi'(t) = 1 - \frac{1}{t} > 0.$$

则 $\varphi(t)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{所以 } \varphi(t) > \varphi(2) = 2 - \ln 2 - 1 = 1 - \ln 2 > 0. \quad \text{.....9 分}$$

$$\text{所以 } h'(t) = \frac{t - \ln t - 1}{(t-1)^2} > 0.$$

所以 $h(t)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{所以 } h(t) > h(2) = 2 \ln 2 - 1 = \ln \frac{4}{e}. \quad \text{.....10 分}$$

$$\text{所以 } \ln x_2 > \ln \frac{4}{e}.$$

$$\text{所以 } x_2 > \frac{4}{e}. \quad \text{.....11 分}$$

$$\text{所以 } \sqrt{x_1^2 + x_2^2} > x_2 > \frac{4}{e}. \quad \text{.....12 分}$$

证法 2: 若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 则 $x_1 \ln x_1 - \alpha x_1^2 + x_1 = 0$, $x_2 \ln x_2 - \alpha x_2^2 + x_2 = 0$.

.....4 分

$$\text{得 } a = \frac{\ln x_1}{x_1} + \frac{1}{x_1} = \frac{\ln x_2}{x_2} + \frac{1}{x_2}.$$

因为 $x_2 > 2x_1 > 0$, 令 $x_2 = tx_1$ ($t > 2$).5 分

$$\text{则 } \frac{\ln x_1}{x_1} + \frac{1}{x_1} = \frac{\ln(tx_1)}{tx_1} + \frac{1}{tx_1}.$$

$$\text{得 } \ln x_1 = \frac{\ln t}{t-1} - 1. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{则 } \ln x_2 = \ln(tx_1) = \ln t + \ln x_1 = \frac{t \ln t}{t-1} - 1. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 = \frac{\ln t}{t-1} - 1 + \frac{t \ln t}{t-1} - 1 = \frac{(t+1) \ln t}{t-1} - 2. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{令 } h(t) = \frac{(t+1) \ln t}{t-1} - 2 \quad (t > 2), \text{ 则 } h'(t) = \frac{-2 \ln t + t - \frac{1}{t}}{(t-1)^2}.$$

$$\text{令 } \varphi(t) = -2 \ln t + t - \frac{1}{t}, \text{ 则 } \varphi'(t) = -\frac{2}{t} + 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2} = \frac{(t-1)^2}{t^2} > 0.$$

则 $\varphi(t)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{所以 } \varphi(t) > \varphi(2) = -2 \ln 2 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 2 \ln 2 > 0. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } h'(t) = \frac{-2 \ln t + t - \frac{1}{t}}{(t-1)^2} > 0.$$

所以 $h(t)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{所以 } h(t) > h(2) = 3 \ln 2 - 2 = \ln \frac{8}{e^2}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \ln(x_1 x_2) > \ln \frac{8}{e^2}.$$

$$\text{所以 } x_1 x_2 > \frac{8}{e^2}. \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \sqrt{x_1^2 + x_2^2} > \sqrt{2x_1 x_2} > \sqrt{\frac{16}{e^2}} = \frac{4}{e}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

证法 3: 因为 $f(x) = x^2 \left(\frac{\ln x + 1}{x} - a \right)$ ($x > 0$), 设 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x} - a$ ($x > 0$),

所以 $f(x)$ 的零点即为 $g(x)$ 的零点.4 分

因为 $g'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减.

因为 $g(x)$ 有两个零点, 则必有 $g(1) = 1 - a > 0$, 且 $x \rightarrow +\infty$, $g(x) \rightarrow -a < 0$,

得 $0 < a < 1$5 分

因为 $g\left(\frac{1}{e}\right) = -a < 0$, 所以 $\frac{1}{e} < x_1 < 1 < x_2$6 分

依题意有 $g(x_2) - g(2 - x_1) = g(x_1) - g(2 - x_1)$,

设 $F(x) = g(x) - g(2 - x) \left(\frac{1}{e} < x < 1 \right)$.

则 $F'(x) = \frac{-\ln x}{x^2} + \frac{-\ln(2-x)}{(2-x)^2}$.

因为 $(2-x)^2 > x^2$, 所以 $\frac{\ln(2-x)}{(2-x)^2} < \frac{\ln(2-x)}{x^2}$.

则 $F'(x) > \frac{-\ln x}{x^2} + \frac{-\ln(2-x)}{x^2} = \frac{-\ln x(2-x)}{x^2} > \frac{-\ln 1}{x^2} = 0$7 分

所以 $F(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 上单调递增.

所以 $F(x) < F(1) = 0$8 分

所以 $g(x) - g(2-x) < 0$.

所以 $g(x_1) < g(2-x_1)$.

所以 $g(x_2) < g(2-x_1)$9 分

因为 $\frac{1}{e} < x_1 < 1 < x_2$, 则 $2-x_1 > 1$.

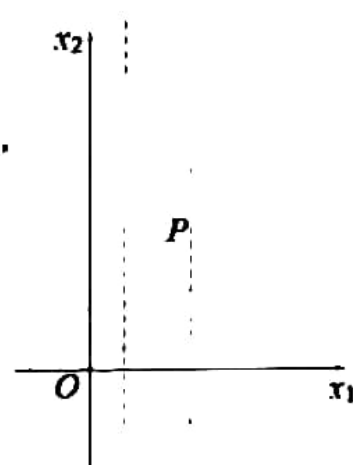
因为 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $x_2 > 2-x_1$, 即 $x_1 + x_2 > 2$10 分

结合条件 $x_2 > 2x_1$ 可知:

满足条件的点 (x_1, x_2) 必在不等式组 $\begin{cases} x_1 + x_2 > 2, \\ x_2 > 2x_1, \\ \frac{1}{e} < x_1 < 1 \end{cases}$ 表示的平面区域内.

由 $x_1 + x_2 = 2$ 和 $x_2 = 2x_1$ 得交点 $P\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.



满足条件的点 (x_1, x_2) 到原点的距离 $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} > \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$11分

因为 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{e}\right)^2 = \frac{20e^2 - 144}{9e^2} > 0$, 得 $\frac{2\sqrt{5}}{3} > \frac{4}{e}$.

所以 $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} > \frac{4}{e}$12分