

2021 年国家集训队第二轮选拔试题解析

2021 年 4 月 5 日—4 月 13 日, 中国国家队第二轮选拔在有千年校史的姑苏名校苏州中学举行, 集训队员和教练们下榻的三元宾馆更是以清乾隆 46 年钱荣连中三元 得名. 这似乎预示着今年的中国国家队的好运, 果然中国队于今年 7 月中旬在俄罗斯圣彼特堡举办的 IMO 竞赛中荣获个人、金牌数和团体总分三项第一. 本次第二轮选拔试题新颖, 难度分布合理, 具有较好的选拔功能, 其中第 5、6 两天均为“易中难” (无交换顺序) 的难度分布, 且难题难度很大, 非常贴合 IMO; 第 7 天整体难度较大, 体现出选拔功能; 第 8 天则相对容易. 其中, 笔者个人认为 5.2 和 8.6 这 2 个题为最佳试题! 以下解答是由第一作者根据考试时的解法整理 成, 不当之处在所难免, 敬请大家不吝赐教.

I. 试 题

5.1 凸 $n(n \geq 5)$ 边形 $\Omega: P_1P_2 \cdots P_n$ 的所有对角线无三线共点于 Ω 内部. 证明: 可以在每个四边形 $P_iP_jP_kP_l(1 \leq i < j < k < l \leq n)$ 内部选出一个不在任何 Ω 的对角线上的点, 使得所选出的 $\binom{n}{4}$ 个点两两不同, 且任意两点所确定的线段与至少一条 Ω 的对角线相交.

5.2 给定 2021 个互不相同的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2021}$, 归纳定义数列 $\{a_n\}$ 如下: 对每个整数 $n \geq 2022$, a_n 是在 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 中未出现的且不是乘积 $a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_{n-2021}$ 的约数的最小正整数. 证明: 存在正整数 M , 使得所有不小于 M 的正整数都在数列 $\{a_n\}$ 中出现.

5.3 求最大的正实数 C , 使得对任意整数 $n \geq 2$, 存在实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [-1, 1]$ 满足

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \geq C^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

6.4 对每个正整数 N , 记 N 的正约数个数为 $\tau(N)$, N 的两两不同的素因子个数为 $\omega(N)$, N 的素因子个数(计入重数)为 $\Omega(N)$. 证明: 对任意正整数 n , 有

$$\sum_{m=1}^n 5^{\omega(m)} \leq \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \tau(k)^2 \leq \sum_{m=1}^n 5^{\Omega(m)}.$$

这里, $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

6.5 求所有函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足: 对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$,

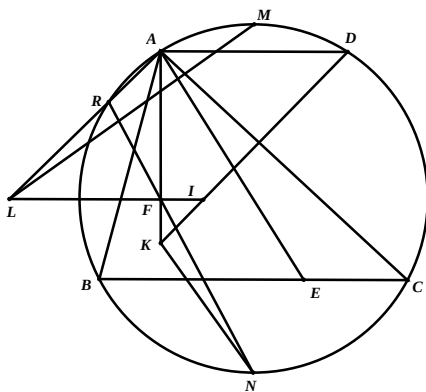
$$f(xf(y) + y^{2021}) = yf(x) + (f(y))^{2021}.$$

6.6 证明存在正实数 λ 满足: 对任意正整数 m , 如果平面直角坐标系中 $\triangle ABC$ 的三个顶点的横纵坐标均为整数, 并且 $\triangle ABC$ 内部(不含边界)有且仅有一个点的横纵坐标均为 m 的整数倍, 则 $\triangle ABC$ 的面积小于 λm^3 .

7.1 给定整数 $n \geq 2$. 求最小的正整数 m , 使得存在 n^2 个两两不同的正实数 $x_{i,j} (1 \leq i, j \leq n)$ 满足以下条件:

- (1) 对任意 i, j , $x_{i,j} = \max\{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,j}\}$ 或 $x_{i,j} = \max\{x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{i,j}\}$;
- (2) 对任意 i , 至多存在 m 个下标 k , 使得 $x_{i,k} = \max\{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,k}\}$;
- (3) 对任意 j , 至多存在 m 个下标 k , 使得 $x_{k,j} = \max\{x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{k,j}\}$.

7.2 如图所示, 锐角 $\triangle ABC$ ($AB < AC$) 的内心是 I , 外接圆是 $\odot O$. M 和 N 分别是弧 $\widehat{BAC}$ 和 $\widehat{BC}$ 的中点. D 是 $\widehat{AC}$ 上一点, 满足 $AD \parallel BC$. $\triangle ABC$ 在 $\angle BAC$ 内的旁切圆与边 BC 相切于点 E . 点 F 在 $\triangle ABC$ 内, 满足 $IF \parallel BC$ 且 $\angle BAF = \angle CAE$. 设直线 NF 与 $\odot O$ 的另一个交点是 R , 直线 AF 与 DI 相交于点 K , 直线 AR 与 IF 相交于点 L . 证明: $NK \perp ML$.



7.3 记 $S(k)$ 为正整数 k 在十进制表示下的所有数码之和. 求所有整数 $n \geq 2$ 和有理数 $\beta \in (0, 1)$, 使得存在 n 个两两不同的正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 满足: 对于 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的任意 $r (r \geq 2)$ 元子集 I , 有 $S\left(\sum_{i \in I} a_i\right) = \beta \cdot \sum_{i \in I} S(a_i)$.

8.4 对所有实数 $x_1, x_2, \dots, x_{60} \in [-1, 1]$, 求

$$\sum_{i=1}^{60} x_i^2 (x_{i+1} - x_{i-1})$$

的最大可能值, 这里 $x_0 = x_{60}, x_{61} = x_1$.

8.5 求最小的正实数 α , 使得对面积为 1 的任意凸多边形 P , 存在平面上一点 M 使得 $P \cup Q$ 的凸包的面积不超过 α . 这里 Q 为 P 关于点 M 的中心对称图形.

8.6. 给定整数 $n \geq 2$. 有 $2n^2$ 位选手参加中国象棋比赛, 每两位选手恰对弈一局, 结果可有平局. 已知

(1) 对任意三位选手甲、乙、丙, 若甲胜乙, 且乙胜丙, 则甲胜丙;

(2) 所有比赛中平局的场数不超过 $\frac{n^3}{16}$.

证明: 可从这 $2n^2$ 位选手中选出 n^2 位选手, 并适当记作 $P_{ij} (1 \leq i, j \leq n)$, 使得对任意 $i, j, i', j' \in \{1, 2, \dots, n\}$, 若 $i > i'$, 则 P_{ij} 胜 $P_{i'j'}$.

II. 解答与评注

5.1 凸 $n (n \geq 5)$ 边形 $\Omega: P_1 P_2 \cdots P_n$ 的所有对角线无三线共点于 Ω 内部. 证明: 可以在每个四边形 $P_i P_j P_k P_l (1 \leq i < j < k < l \leq n)$ 内部选出一个不在任何 Ω 的对角线上的点, 使得所选出的 $\binom{n}{4}$ 个点两两不同, 且任意两点所确定的线段与至少一条 Ω 的对角线相交.

证明 设对角线将 Ω 分成若干个区域 $U_1, U_2, \dots, U_t$, 则只需使选出的 $\binom{n}{4}$ 个点两两在不同区域中.

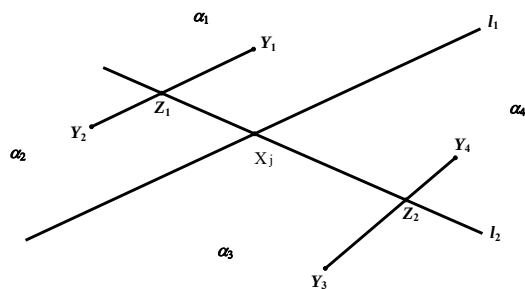
注意到, 每个凸四边形 $P_i P_j P_k P_l (1 \leq i < j < k < l \leq n)$ 可对应到对角线 $P_i P_k, P_j P_l$ 的交点, 称这样的交点为“结点”, 设所有结点是 $X_1, X_2, \dots, X_m (m = \binom{n}{4})$. 我们希望 $P_i P_j P_k P_l$ 内选出的点所在区域与结点 $P_i P_k \cap P_j P_l$ 相邻(称结点 K 与区域 α 相邻当且仅当 K 是 α 的一个顶点).

现在考虑下述操作: 对任意非空子集 $\Gamma \subseteq \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$, 设 Γ 的凸包是 S , S 是点或线段或凸多边形, 取 S 的一个顶点 $X_j (X_j$ 不在 S 某条边界内部).

断言 存在一个与 X_j 相邻的区域 α , α 不与 Γ 中其他结点相邻. ①

证明 设过 X_j 的对角线为 l_1, l_2 , 与 X_j 相邻的区域是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 如下图.

用反证法, 假设存在结点 $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \in \Gamma \setminus \{X_j\}$, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 分别与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 相邻(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 可能相同). 显然线段 $Y_1 Y_2$ 与 l_2 有公共点(记为 Z_1), 线段 $Y_3 Y_4$ 与 l_2 有公共点(记为 Z_2), 且 Z_1, Z_2 在 X_j 两侧.



故可依次推出 Z_1, Z_2, X_j 在 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 的凸包内, 其中“ X_j 在 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 的凸包内”与“ X_j 是 Γ 凸包的一个顶点”矛盾!

故①得证.

现在考虑从 $X_1, X_2, \dots, X_m$ 中, 每次去掉凸包上一个点.

不妨设对 $1 \leq i \leq m$, X_i 是 $X_i, X_{i+1}, \dots, X_m$ 的凸包的一个顶点(否则重排), 由①知: 对 $1 \leq i \leq m$, 可取出一个与 X_i 相邻的区域 V_i , V_i 与 $X_{i+1}, \dots, X_m$ 均不相邻. 显然 $V_1, V_2, \dots, V_m$ 两两不同. 对 $1 \leq i \leq m$, 令 X_i 对应的凸四边形中取出的点在区域 V_i 中即可.

原题得证. □

评注 本题是简单的组合几何问题, 有多种解法, 本解答利用了对角线交点 $P_i P_k \cap P_j P_l$, 用 Hall 定理也可以做出本题.

5.2 给定 2021 个互不相同的正整数 $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$, 归纳定义数列 $\{a_n\}$ 如下: 对每个整数 $n \geq 2022$, a_n 是在 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 中未出现的且不是乘积 $a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_{n-2021}$ 的约数的最小正整数. 证明: 存在正整数 M , 使得所有不小于 M 的正整数都在数列 $\{a_n\}$ 中出现.

证明 (I) 首先用代数方法估计 $\{a_n\}$ 的增长速度.

熟知存在常数 $C > 0$, 使得任意 $n \in \mathbb{Z}^+$, n 的正约数个数 $\tau(n) < C \cdot n^{0.0001}$.

注意到: 对 $n \geq 2022$, a_n 不能取的值为 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 及 $a_{n-1} \cdots a_{n-2021}$ 的正约数, 共 $n - 1 + \tau(a_{n-1} \cdots a_{n-2021})$ 个数, 故

$$\begin{aligned} a_n &\leq n + \tau(a_{n-1} \cdots a_{n-2021}) \\ &\leq n + C \cdot (a_{n-1} \cdots a_{n-2021})^{0.0001} \\ &\leq n + C \cdot \max\{a_{n-1}, \dots, a_{n-2021}\}^{\frac{2021}{10000}}. \end{aligned} \quad \text{①}$$

注意到 $n \geq \max\{a_1, \dots, a_{2021}\} + 1$ 时,

$$\max\{a_1, \dots, a_n\} \geq n > \max\{a_1, \dots, a_{2021}\}.$$

故可设 $\max\{a_1, \dots, a_n\} = a_m$, $2022 \leq m \leq n$, 由①知

$$\begin{aligned}\max\{a_1, \dots, a_n\} &= a_m \\ &\leq m + C \cdot \max\{a_{m-1}, \dots, a_{m-2021}\}^{\frac{2021}{10000}} \\ &\leq n + C \cdot \max\{a_1, \dots, a_n\}^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

解得

$$\max\{a_1, \dots, a_n\} \leq \left(\frac{C}{2} + \sqrt{\frac{C^2}{4} + n} \right)^2 \quad (\forall n \geq \max\{a_1, \dots, a_{2021}\} + 1).$$

特别地 $a_n \leq \left(\frac{C}{2} + \sqrt{\frac{C^2}{4} + n} \right)^2$, 这表明:

$$\text{存在常数 } k > 0, \text{ 使 } a_n \leq n + k \cdot \sqrt{n} (\forall n \in \mathbb{Z}^+). \quad \textcircled{2}$$

(II) 接下来解决原问题, 任取一个不在 $\{a_n\}$ 中的正整数 x , 由于 $\{a_n\}$ 中只有有限项 $\leq x$, 故 n 充分大时 $a_n > x$, 此时 a_n 不取 x 的理由一定是: x 整除 $a_{n-1} \cdots a_{n-2021}$. 故

$$x \mid a_{n-1} \cdots a_{n-2021}. \quad (\text{对任意充分大的 } n) \quad \textcircled{3}$$

断言 1 x 无大于 10^4 的素因子.

证明 用反证法. 若存在素数 $p \mid x$, $p > 10^4$, 则由③知: 对充分大的 n , $p \mid a_{n-1} \cdots a_{n-2021}$, 即 $a_{n-1}, \dots, a_{n-2021}$ 中有 p 的倍数. 于是存在常数 L , 使得对任意 $n \in \mathbb{Z}^+$, $a_1, \dots, a_n$ 中 p 的倍数的个数 $\geq \frac{n}{2021} - L$. 进

$$\max\{a_1, \dots, a_n\} \geq \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ p \mid a_i}} \{a_i\} \geq p \cdot \left(\frac{n}{2021} - L \right).$$

结合②知

$$n + k \cdot \sqrt{n} \geq p \cdot \left(\frac{n}{2021} - L \right),$$

令 n 充分大即得矛盾 (因为 $1 < \frac{p}{2021}$).

断言 2 对任意素数幂 $p^\alpha \mid x$, 有 $\alpha \leq 10^8$.

证明 用反证法. 假设 $a > 10^8$, 由③知: 对充分大的 n , $p^{10^8} \mid a_{n-1} \cdots a_{n-2021}$, 进 $a_{n-1}, \dots, a_{n-2021}$ 中存在 p^{10^4} 的倍数, 于是存在常数 L' , 使得对任意 $n \in \mathbb{Z}^+$, $a_1, \dots, a_n$ 中 p^{10^4} 的倍数个数 $\geq \frac{n}{2021} - L'$, 进

$$\max\{a_1, \dots, a_n\} \geq \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ p^{10^4} \mid a_i}} \{a_i\} \geq p^{10^4} \cdot \left(\frac{n}{2021} - L' \right).$$

结合②知

$$n + k\sqrt{n} \geq p^{10^4} \cdot \left(\frac{n}{2021} - L' \right),$$

令 n 充分大即得矛盾 (因为 $\frac{p^{10^4}}{2021} \geq \frac{2^{10^4}}{2021} > 1$).

结合断言 1, 2 知: $x \mid \prod_{\text{素数 } p \leq 10^4} p^{10^8}$, 进

$$x \leq \prod_{\text{素数 } p \leq 10^4} p^{10^8} \leq (10^4!)^{10^8},$$

取 $M = (10^4!)^{10^8} + 1$, 即符合原题要求. $\square$

评注 本题是中等难度的数论问题, 本题形式和 2018 加试 4 比较像, 可以先考虑类似加试题地考虑每一项的素因子分解, 但发现做不出, 必须寻找新的方法, 经过尝试发现可以用正约数个数估计来估计 $\{a_n\}$ 增长速度 (事实上, 题目中写“不是 $a_{n-1} \cdots a_{n-2021}$ 的正约数” $\square$ 不是“不整除 $a_{n-1} \cdots a_{n-2021}$ ”也提示了这一点) 进 $\square$ 做出本题, 本题形式传统 $\square$ 解法新颖, 个人认为是本届集训队出得最好的题.

5.3 求最大的正实数 C , 使得对任意整数 $n \geq 2$, 存在实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [-1, 1]$ 满足

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \geq C^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

解 不妨设 $1 \geq x_1 \geq \cdots \geq x_n \geq -1$ (否则重排), 于是可设 $x_i = \cos \theta_i$ ($1 \leq i \leq n$), $0 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_n \leq \pi$. 考虑复数 $p_j = e^{i\theta_j}$, $q_j = e^{-i\theta_j}$ ($1 \leq j \leq n$), $p_1, \cdots, p_n, q_n, \cdots, q_1$ 是单位圆上依次排列的 $2n$ 个复数, 设它们对应点 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n}$, 则对 $1 \leq j < k \leq n$,

$$\begin{aligned} x_j - x_k &= \cos \theta_j - \cos \theta_k \\ &= 2 \cdot \sin \frac{\theta_k - \theta_j}{2} \cdot \sin \frac{\theta_k + \theta_j}{2} \\ &= \frac{1}{2} |p_j - p_k| \cdot |q_j - p_k| \quad (\text{正弦定理}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot |A_j A_k| \cdot |A_{2n+1-j} A_k| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|A_j A_k| \cdot |A_{2n+1-j} A_k| \cdot |A_j A_{2n+1-k}| \cdot |A_{2n+1-j} A_{2n+1-k}|}, \end{aligned}$$

进

$$\prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_j - x_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{C_n^2} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{1 \leq j < k \leq 2n \\ j+k \neq 2n+1}} |A_j A_k|}. \quad \textcircled{1}$$

将所有弦 $A_j A_k$ ($1 \leq j < k \leq 2n$, 含 $j+k=2n+1$ 者) 按下标差分 n 组:

$$\Omega_1 : A_1 A_2, A_2 A_3, \cdots, A_{2n} A_1,$$

$$\Omega_2 : A_1 A_3, A_2 A_4, \cdots, A_{2n} A_2,$$

⋮

$$\Omega_{n-1} : A_1 A_n, A_2 A_{n+1}, \dots, A_{2n} A_{n-1},$$

$$\Omega_n : A_1 A_{n+1}, A_2 A_{n+2}, \dots, A_n A_{2n}.$$

对 $1 \leq t \leq n-1$, Ω_t 中所有弦圆周角之和 $\leq t \cdot \pi$.

Ω_t 中有 $\lambda_t \in \{2n-2, 2n\}$ 条弦 $A_j A_k$ 满足 $j+k \neq 2n+1$. 其中,

$$t\pi \leq (n-1)\pi \leq \lambda_t \cdot \frac{\pi}{2}.$$

记 Ω_t 中满足 $j+k \neq 2n+1$ 的弦的长度乘积为 p_t , 由琴生不等式,

$$p_t \leq (2 \cdot \sin \frac{t\pi}{\lambda_t})^{\lambda_t} \leq 2^{2n} \cdot \left(\sin \frac{t\pi}{\lambda_t} \right)^{2n-2} \leq 2^{2n} \cdot \left(\sin \frac{t\pi}{2n-2} \right)^{2n-2}. \quad ②$$

又注意到, 显然 Ω_n 中满足 $j+k \neq 2n+1$ 的弦长乘积 $\leq 2^n$, 故

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq 2n \\ j+k \neq 2n+1}} |A_j A_k| &\leq 2^n \cdot \prod_{t=1}^{n-1} 2^{2n} \cdot \left(\sin \frac{t\pi}{\lambda_t} \right)^{2n-2} \\ &= 2^{3n-2} \cdot \left(\prod_{t=1}^{n-1} 2 \cdot \sin \frac{t\pi}{2n-2} \right)^{2n-2} \\ &= 2^{3n-2} \cdot (2 \cdot \sqrt{n-1})^{2n-2}. \end{aligned}$$

代入①知:

$$\prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_j - x_k) \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{C_n^2} \cdot 2^{\frac{3n-2}{2}} \cdot (2 \cdot \sqrt{n-1})^{n-1},$$

由此即知原题中的 C 必满足 $C \leq \frac{1}{2}$.

另一方面, 对任意 $n \geq 2$, 令 $A_1 A_2 \cdots A_{2n}$ 是凸 $2n$ 边形, 相应地

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\cos \frac{\pi}{2n}, \cos \frac{3\pi}{2n}, \dots, \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} \right).$$

此时

$$\prod_{\substack{1 \leq j < k \leq 2n \\ j+k \neq 2n+1}} |A_j A_k| \geq \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq 2n \\ k-j \neq n}} |A_j A_k| = \prod_{t=1}^{n-1} \left(2 \cdot \sin \frac{t\pi}{2n} \right)^{2n} = (\sqrt{n})^{2n} > 1.$$

代入①知

$$\prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_j - x_k) \geq \left(\frac{1}{2} \right)^{C_n^2}.$$

故原题所求 C 最大值为 $\frac{1}{2}$. □

评注 本题是困难的不等式问题, 首先猜测构造, 注意到 $\{x_i\}$ 的分布是“两端密, 中间疏”, 由此猜测可能是一列 $\cos$ (即半圆在直径上的投影), 进而可作三角换元, 将本题归结于熟悉的问题, 估计单位圆上弦长的乘积.

6.4 对每个正整数 N , 记 N 的正约数个数为 $\tau(N)$, N 的两两不同的素因子个数为 $\omega(N)$, N 的素因子个数(计入重数)为 $\Omega(N)$. 证明: 对任意正整数 n , 有

$$\sum_{m=1}^n 5^{\omega(m)} \leq \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \tau(k)^2 \leq \sum_{m=1}^n 5^{\Omega(m)}.$$

这里, $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

证明 注意到 $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ 表示 $1, 2, \dots, n$ 中 k 的倍数的个数, 故

$$\sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \cdot \tau(k)^2 = \sum_{k=1}^n \left(\tau(k)^2 \cdot \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ k|m}} 1 \right) = \sum_{m=1}^n \left(\sum_{k|m} \tau(k)^2 \right),$$

从 只需证明: 对任意 $m \geq 1$, 有

$$5^{\omega(m)} \leq \sum_{k|m} \tau(k)^2 \leq 5^{\Omega(m)}. \quad \textcircled{1}$$

$m = 1$ 时①显然, 下设 $m \geq 2$ (不是归纳).

设 m 的素因子分解为 $p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$, 则 m 的所有正约数为 $p_1^{\beta_1} \cdots p_t^{\beta_t}$, 其中 $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, \dots, 0 \leq \beta_t \leq \alpha_t$, 且

$$\tau(p_1^{\beta_1} \cdots p_t^{\beta_t})^2 = (\beta_1 + 1)^2 \cdots (\beta_t + 1)^2,$$

故

$$\sum_{k|m} \tau(k)^2 = \sum_{\substack{0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1 \\ \vdots \\ 0 \leq \beta_t \leq \alpha_t}} (\beta_1 + 1)^2 \cdots (\beta_t + 1)^2 = \prod_{i=1}^t (1^2 + 2^2 + \cdots + (\alpha_i + 1)^2),$$

于是

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 5^t \leq \prod_{i=1}^t (1^2 + 2^2 + \cdots + (\alpha_i + 1)^2) \leq 5^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_t}.$$

只需证: 对任意 $\alpha \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$5 \leq 1^2 + 2^2 + \cdots + (\alpha + 1)^2 \leq 5^\alpha. \quad \textcircled{2}$$

记

$$S(\alpha) = 1^2 + 2^2 + \cdots + (\alpha + 1)^2 = \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(2\alpha + 3)}{6},$$

则 $S(1) = 5$, 且 $\alpha \geq 1$ 时

$$\frac{S(\alpha + 1)}{S(\alpha)} = \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} \cdot \frac{\alpha + 3}{\alpha + 2} \cdot \frac{2\alpha + 5}{2\alpha + 3} \in \left[1, \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \right] = [1, 5],$$

归纳易知 $S(\alpha) \in [5, 5^\alpha]$ 对任意 $\alpha \geq 1$ 成立, ②得证.

进 原题得证. □

评注 本题是简单的数论不等式, 类似的问题还有 2014 集训队第三天第 1 题 (2014 年那个题更难).

6.5 求所有函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足: 对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(xf(y) + y^{2021}) = yf(x) + (f(y))^{2021}.$$

解 记原题条件为 $P(x, y)$.

显然, 若 f 常值, 则只能 $f \equiv 0$. 下设 f 非常值.

断言 1 对 $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 有 $f(d) \neq 0$.

证明 用反证法, 若 $f(d) = 0$, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 由 $P(x, d)$ 知

$$f(d^{2021}) = df(x) + f(d)^{2021}.$$

于是

$$f(x) = \frac{1}{d} \cdot (f(d^{2021}) - f(d)^{2021}),$$

推出 f 常值函数, 矛盾.

断言 2 $f(1) = 1$.

证明 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 由 $P(x, 1)$ 知

$$f(xf(1) + 1) = f(x) + f(1)^{2021}.$$

由断言 1 知 $f(1) \neq 0$, 进 对任意 $x \in \mathbb{R}$,

$$f(xf(1) + 1) \neq f(x),$$

只能 $f(1) = 1$.

断言 3 $f(x+1) = f(x) + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

证明 由 $P(x, 1)$ 知

$$f(xf(1) + 1) = f(x) + f(1)^{2021},$$

结合 $f(1) = 1$ 即知 $f(x+1) = f(x) + 1$.

由断言 2, 3 知 $f(n) = n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

断言 4 $f(x+f(y)) = f(x) + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

证明 $y = 0$ 时, 由 $f(0) = 0$ 知断言 4 成立. 下设 $y \neq 0$.

固定 y , 任取 $z \in \mathbb{R}$, 由 $P(z, y), P(z+1, y)$ 知:

$$f(zf(y) + y^{2021}) = yf(z) + f(y)^{2021},$$

$$f(zf(y) + f(y) + y^{2021}) = yf(z+1) + f(y)^{2021},$$

两式相减得

$$f(zf(y) + f(y) + y^{2021}) - f(zf(y) + y^{2021}) = y(f(z+1) - f(z)) = y.$$

由断言 1 知 $f(y) \neq 0$, 故 $zf(y) + y^{2021}$ 取遍 $\mathbb{R}$, 从

$$f(x + f(y)) - f(x) = y, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

断言 5 $f(f(y)) = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$

证明 在断言 4 中取 $x = 0$ 即可.

断言 6 $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

证明 在断言 4 中用 $f(y)$ 替换 y 即可.

断言 7 $f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

证明 由断言 5 知: 原题条件可写为

$$f(xf(y)) + f(y^{2021}) = yf(x) + f(y)^{2021}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

在上式中令 $x = 0$, 可知

$$f(y^{2021}) = f(y)^{2021}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

进

$$f(xf(y)) = yf(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

在上式中用 $f(y)$ 替换 y 得

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

结合断言 6, 7 易知 f 在 $[0, +\infty)$ 上不减, 这是由于对任意 $u \geq v \geq 0$, 存在 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, u = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, v = 2\alpha_1\alpha_2$, 从

$$f(u) - f(v) = f(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - f(2\alpha_1\alpha_2) = f(\alpha_1)^2 + f(\alpha_2)^2 - 2f(\alpha_1)f(\alpha_2) \geq 0.$$

于是 f 在 $[0, +\infty)$ 上满足柯西方程, 结合 $f(1) = 1$ 知

$$f(x) = x, \quad \forall x \in [0, +\infty),$$

再由断言 6 知

$$f(-x) = f(0) - f(x) = -x, \quad x \geq 0,$$

故

$$f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

显然 $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ 满足要求.

故所求函数为

$$1^\circ \quad f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$2^\circ \quad f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

解答完毕!

□

评注 本题是中等难度的函数方程, 关键的一步是取出 $P(x+1, y)$, $P(x, y)$ 差分.

6.6 证明存在正实数 λ 满足: 对任意正整数 m , 如果平面直角坐标系中 $\triangle ABC$ 的三个顶点的横纵坐标均为整数, 并且 $\triangle ABC$ 内部 (不含边界) 有且仅有一个点的横纵坐标均为 m 的整数倍, 则 $\triangle ABC$ 的面积小于 λm^3 .

证明 称横纵坐标均为 m 倍的点为“ m 倍点”.

首先考虑仿射变换

$$(x, y) \rightarrow (ax + by, cx + dy),$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 1$. 该变换的好处是: 我们可不妨设某条直线是水平线.

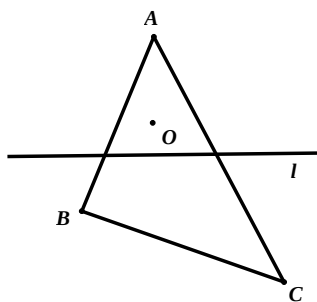
回到原题. 由 Pick's 定理, 只需证 $\triangle ABC$ 内 (含边界) 整点数 $\leq \Theta(m^3)$. 将所有整点按横, 纵坐标 $\bmod m$ 分成 m^2 类, 只需证 $\triangle ABC$ 内每一类整点数 $\leq \Theta(m)$.

具体地, 任取 $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$, 称满足 $x \equiv x_0, y \equiv y_0 \pmod{m}$ 的 (x, y) 是“好点”. 我们证明 $\triangle ABC$ 内“好点”个数 $\leq \Theta(m)$. ①

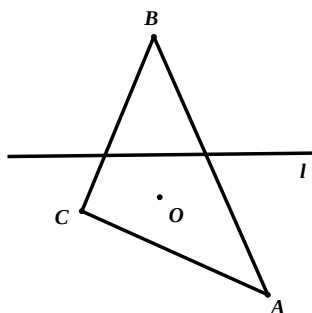
断言 对每条直线 l , l 上至多 $2m + 100$ 个好点在 $\triangle ABC$ 内. ②

证明 用反证法. 假设 $l \cap \triangle ABC$ 含 $\geq 2m + 101$ 个好点 (作仿射, 平移, 不妨设 l 水平).

设 $\triangle ABC$ 内唯一“ m 倍点”是 O , 考虑 O, l 的位置关系, 有 2 种:



情形 1 (可能 O 在 l 上)



情形 2

【情形 1】

过 O 作 $l_0 \parallel l$, 设 $P = AO \cap l$.

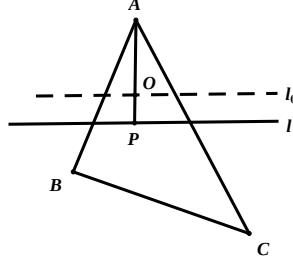
若 $|OP| > m \cdot |AO|$, 则将 AO 延长 m 倍可得 $\triangle ABC$ 内另一点“ m 倍点”, 矛

盾.

若 $|OP| \leq m \cdot |AO|$, 则线段长度:

$$l_0 \cap \triangle ABC \text{ 长度} \geq \frac{1}{m+1} \cdot (l \cap \triangle ABC \text{ 长度}) > \frac{2m+10}{m+1} \cdot m > 2m,$$

于是 $l_0 \cap \triangle ABC$ 上有另一“ m 倍点”, 矛盾.



【情形 2】

过 O 作 $l_0 \parallel l$, 过 C 作 $l_c \parallel l$, 设 $P = AO \cap l_c$.

若 $|AP| > (m+1) \cdot |AO|$, 则将 AO 延长 m 倍可得另一点“ m 倍点”, 矛盾.

若 $(m+1) \cdot |AO| \geq |AP| \geq |AO|$, 则

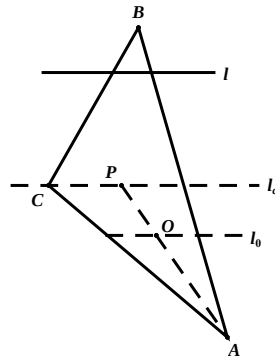
$$\begin{aligned} l_0 \cap \triangle ABC \text{ 长度} &\geq \frac{1}{m+1} \cdot (l_c \cap \triangle ABC \text{ 长度}) \\ &\geq \frac{1}{m+1} \cdot (l \cap \triangle ABC \text{ 长度}) \\ &> \frac{2m+10}{m+1} \cdot m \\ &> 2m, \end{aligned}$$

于是 $l_0 \cap \triangle ABC$ 上有另一“ m 倍点”, 矛盾.

若 $|AO| \geq |AP| \geq 0$, 则

$$l_0 \cap \triangle ABC \text{ 长度} \geq l \cap \triangle ABC \text{ 长度} > 2m,$$

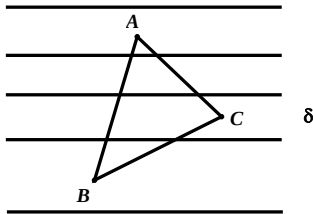
也矛盾.



故断言得证.

现在证明①: 若 $\triangle ABC$ 内好点数 $\leq 10^8$, 则①成立.

下设 $\triangle ABC$ 内好点数 $> 10^8$, 则由抽屉, $\triangle ABC$ 内存在两好点 R, S 横, 纵坐标 $\bmod 100m$ 得到的二元组相同, 于是线段 RS 上有 101 个好点, 记 δ 为直线 RS , 不妨设 δ 即为直线 $y = y_0$ (作仿射, 平移).



易知 $\triangle ABC \cap (\text{直线 } y = y_0 + m)$ 至多含 2 个“好点”. 否则, 可设 $y = y_0$ 上含好点 $(z, y_0), (z + 2m, y_0)$, $y = y_0 + m$ 上有好点 $(w, y_0 + m), (w + 2m, y_0 + m)$, 作仿射平移, 不妨设 $z = w$, 则上述四点围成的长方形内有 2 个 m 倍点, 矛盾.

同理 $\triangle ABC \cap (\text{直线 } y = y_0 - m)$ 上也至多 2 个“好点”.

进 对整数 $i \geq 2$, $\triangle ABC \cap (\text{直线 } y = y_0 + im) = \emptyset$. 否则

$$\triangle ABC \cap (y = y_0 + m) \text{ 长度} \geq \frac{1}{2} \cdot (\triangle ABC \cap (y = y_0) \text{ 长度}) \geq 50m,$$

推出 $\triangle ABC \cap (y = y_0 + m)$ 上有 ≥ 10 个“好点”.

同理对于 $i \leq -2$, 故

$$\triangle ABC \text{ 内好点数} \leq 2 + (2m + 100)(\text{由断言}) + 2 \leq \Theta(m),$$

①也成立.

故①得证. 进 原题得证. □

评注 本题是困难的组合几何问题, 有多种解法, 在各种解法中基本都要用到“将 AO 延长 m 倍”, 同时还要观察到其他方面的很多性质, 才能做出本题.

7.1 给定整数 $n \geq 2$. 求最小的正整数 m , 使得存在 n^2 个两两不同的正实数 $x_{i,j} (1 \leq i, j \leq n)$ 满足以下条件:

- (1) 对任意 i, j , $x_{i,j} = \max\{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,j}\}$ 或 $x_{i,j} = \max\{x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{i,j}\}$;
- (2) 对任意 i , 至多存在 m 个下标 k , 使得 $x_{i,k} = \max\{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,k}\}$;
- (3) 对任意 j , 至多存在 m 个下标 k , 使得 $x_{k,j} = \max\{x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{k,j}\}$.

解 结论是: m 最小为
$$\begin{cases} \frac{n+2}{2}, & (2 \mid n) \\ \frac{n+3}{2}, & (2 \nmid n) \end{cases}.$$

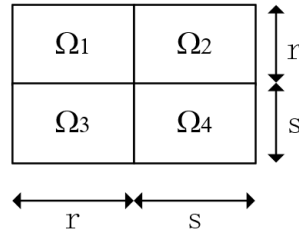
将 $x_{i,j}$ 排成 $n \times n$ 表格:

$$\begin{array}{cccc} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{array}$$

称满足 $x_{i,j} = \max\{x_{i,1}, \cdots, x_{i,j}\}$ 的 $x_{i,j}$ 是“行好的”, 满足 $x_{i,j} = \max\{x_{1,j}, \cdots, x_{i,j}\}$ 的 $x_{i,j}$ 是“列好的”.

(I) 先给出构造:

将 $n \times n$ 表格分成 4 部分 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$, ($r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, s = \lceil \frac{n}{2} \rceil$).



令 $\Omega_i (1 \leq i \leq 4)$ 中的数均在 $(i, i+1)$ 中, 且 Ω_1, Ω_4 中的数从左下到右上递增, Ω_2, Ω_3 中的数从右上到左下递增.

例如: 若 $r = 2, s = 3$, 则 Ω_2 中可以填:

2.4	2.2	2.1
2.6	2.5	2.3

此时, 对 $1 \leq i \leq r$, 第 i 行中 $x_{i,1}, \cdots, x_{i,r+1}$ 是行好的, 对 $r+1 \leq i \leq n$, 第 i 行中 $x_{i,1}, x_{i,r+1}, x_{i,r+2}, \cdots, x_{i,n}$ 是行好的. 类似对于列.

故每一行(列)中行(列)好的数的个数 $\leq \max\{s+1, r+1\} = \begin{cases} \frac{n+2}{2}, & 2 \mid n \\ \frac{n+3}{2}, & 2 \nmid n \end{cases}$.

(II) 再证明 $m \geq \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$.

显然, 第一行(列)中的数列均是列(行)好的.

对 $2 \leq i \leq n$, 设第 i 行有 λ_i 个数是行好的, 第 i 列有 μ_i 个数是列好的.

由于对 $2 \leq i, j \leq n$, $x_{i,j}$ 或者行好, 或者列好, 故

$$\sum_{i=2}^n (\lambda_i - 1) + \sum_{i=2}^n (\mu_i - 1) \geq (n-1)^2. \quad \textcircled{1}$$

进

$$m \geq \max\{\lambda_2, \cdots, \lambda_n, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2(n-1)} \cdot \left(\sum_{i=2}^n \lambda_i + \sum_{i=2}^n \mu_i \right) \\
&\geq \frac{1}{2(n-1)} \cdot (2(n-1) + (n-1)^2) \\
&= \frac{n+1}{2}.
\end{aligned} \tag{2}$$

现在用反证法, 假设“ $m < \frac{n+2}{2}, 2 \mid n$ ”或“ $m < \frac{n+3}{2}, 2 \nmid n$ ”, 由②知只能 $m = \frac{n+1}{2}, 2 \nmid n$, 且①, ②中各 $\geq$ 号均取等. 这表明:

$$\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \mu_2 = \cdots = \mu_n = \frac{n+1}{2}, \quad (\text{由②})$$

且每个 $x_{i,j} (2 \leq i, j \leq n)$ 不能同时行好, 列好(由②). 考虑 $x_{i,j} ((i, j) \neq (1, 1))$ 中最大项 x_{i_0, j_0} .

若 $i_0, j_0 \geq 2$, 则 x_{i_0, j_0} 同时行好, 列好, 矛盾.

若 $1 \in \{i_0, j_0\}$, 不妨设 $i_0 = 1, j_0 \geq 2$, 则第 j_0 列中只有 x_{1, j_0} 是列好的,

$$\mu_{j_0} = \frac{n+1}{2} \geq \frac{3+1}{2} = 2,$$

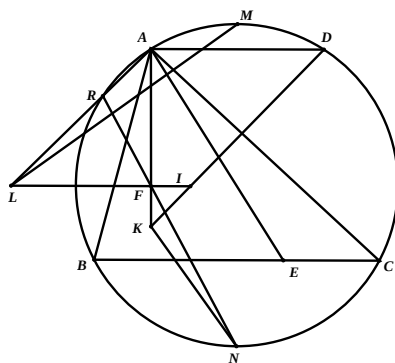
矛盾.

故反证法不成立.

$$\text{综上, 所求 } m \text{ 最小值为 } \begin{cases} \frac{n+2}{2}, & (2 \mid n) \\ \frac{n+3}{2}, & (2 \nmid n) \end{cases}. \quad \square$$

评注 本题是中等难度的组合题, 本题的解答看似简单, 实际上有很多地方可能会卡住(例如猜测答案、构造).

7.2 如图所示, 锐角 $\triangle ABC$ ($AB < AC$) 的内心是 I , 外接圆是 $\odot O$. M 和 N 分别是弧 $\widehat{BAC}$ 和 $\widehat{BC}$ 的中点. D 是 $\widehat{AC}$ 上一点, 满足 $AD \parallel BC$. $\triangle ABC$ 在 $\angle BAC$ 内的旁切圆与边 BC 相切于点 E . 点 F 在 $\triangle ABC$ 内, 满足 $IF \parallel BC$ 且 $\angle BAF = \angle CAE$. 设直线 NF 与 $\odot O$ 的另一个交点是 R , 直线 AF 与 DI 相交于点 K , 直线 AR 与 IF 相交于点 L . 证明: $NK \perp ML$.



证明 取 BC 中点 Z . 熟知 $IZ \parallel AE$ 且 $\triangle NIZ \sim \triangle NMI$, 且

$$\angle BAF = \angle CAE \Rightarrow \angle FAI = \angle EAI,$$

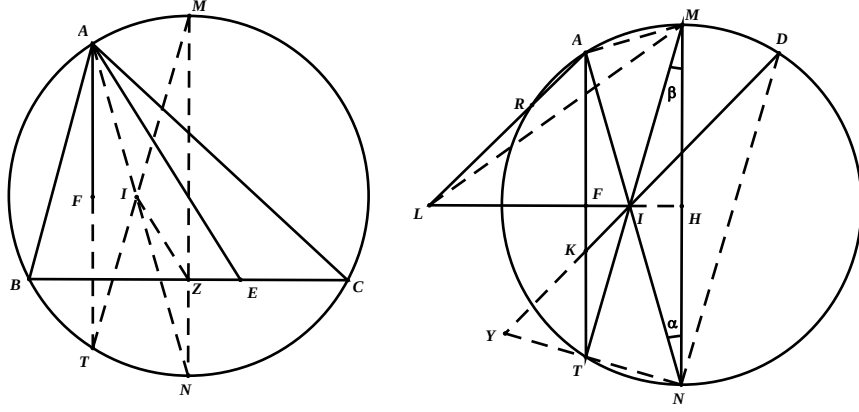
故

$$\angle FAI = \angle EAI = \angle ZIN = \angle IMN.$$

这表明: AF, MI 的交点在 $\odot O$ 上, 记为 T .

设 $NT \cap DI = Y$, 设 $\angle INM = \alpha$, $\angle IMN = \beta$, 设 $FI \cap MN = H$. 注意到 TM, TN 是 $\angle ATD$ 内、外角平分线, 故 TA, TM, TD, TN 调和线束. 从 Y, K, I, D 调和点列, 进 NY, NK, NI, ND 调和线束, 因此

$$\frac{\sin \angle INK}{\sin \angle TNK} = \frac{\sin \angle IND}{\sin \angle TND} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos(\alpha - \beta)}. \quad ①$$



另一方面, 在 $\triangle MAI$ 中, 由角元塞瓦,

$$\begin{aligned} \frac{\sin \angle AML}{\sin \angle IML} &= \frac{\sin \angle MAL}{\sin \angle IAL} \cdot \frac{\sin \angle AIL}{\sin \angle MIL} \\ &= -\tan \angle MAL \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \\ &= \tan \angle MNF \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}. \end{aligned} \quad ②$$

由 $\angle IHN = \angle ITN = 90^\circ$ 知 I, T, N, H 共圆, 进 $\angle ITH = \alpha$, 在 $\triangle FNT$ 中, 由角元塞瓦,

$$\begin{aligned} \tan \angle MNF &= \frac{\sin \angle FNH}{\sin \angle HFN} \\ &= \frac{\sin \angle HNT}{\sin \angle HTN} \cdot \frac{\sin \angle HTF}{\sin \angle HFT} \\ &= \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\cos(\alpha - \beta)}. \end{aligned} \quad ③$$

将③带入②得

$$\frac{\sin \angle AML}{\sin \angle IML} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos(\alpha - \beta)},$$

结合①知:

$$\frac{\sin \angle INK}{\sin \angle TNK} = \frac{\sin \angle AML}{\sin \angle IML}. \quad ④$$

又注意到: $AM \perp IN, IM \perp TN$, 故

$$\angle INK = \angle AML, \angle TNK = \angle IML,$$

进 $ML \perp NK$, 原题得证! □

评注 本题是简单几何题, 注意到 $AM \perp IN, IM \perp TN$, 从□为证明 $ML \perp NK$, 只需证: $\frac{\sin \angle AML}{\sin \angle IML} = \frac{\sin \angle INK}{\sin \angle TNK}$, 导角元塞瓦就可以了.

7.3 记 $S(k)$ 为正整数 k 在十进制表示下的所有数码之和. 求所有整数 $n \geq 2$ 和有理数 $\beta \in (0, 1)$, 使得存在 n 个两两不同的正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 满足: 对于 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的任意 $r (r \geq 2)$ 元子集 I , 有 $S\left(\sum_{i \in I} a_i\right) = \beta \cdot \sum_{i \in I} S(a_i)$.

解 结论是: 所求 (n, β) 为使 $2 \leq n \leq 10, \beta \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ 的 (n, β) .

(I) 先给出 $2 \leq n \leq 10$ 的构造: 将 $a_1, \dots, a_n$ 按数码分若干段, 每一段为(空白表示 0):

(I 类段)

$a_1: 099 \cdots 991 \quad (s \text{ 个 } 9)$

$a_2: \quad \quad \quad 1$

⋮

$a_n: \quad \quad \quad 1$

(II 类段)

$a_1: 1$

$a_2: 1$

⋮

$a_n: \quad \quad \quad 1$

取 n 个 I 类段(轮换, 所有 s 相同), t 个 II 类段, 则

$$S(a_1) = \cdots = S(a_n) = 9s + n + t,$$

对 $I \subseteq \{1, \dots, n\}, |I| \geq 2$,

$$S\left(\sum_{i \in I} a_i\right) = |I| \cdot n + |I| \cdot t,$$

只需选出 $s, t \in \mathbb{Z}^+$ 使 $n + t = \beta \cdot (9s + n + t)$, 这显然可以做到.

(II) 再说明 $n \geq 11$ 不可行.

反证法: 假设 $n \geq 11$, 不妨设 $n = 11$.

显然 a_1 加 a_2 时进位, 故可取 T 为最小非负整数, 使得存在一对 $a_i, a_j (i \neq j)$ 相加时在 10^T 位进位.

设 $a_1, \dots, a_{11}$ 的 10^T 位为 $x_1, \dots, x_{11}$, 不妨设 $9 \geq x_1 \geq \dots \geq x_{11} = 0$, 由于某对 a_i, a_j 相加在 10^T 位进位, 故 $x_1 + x_2 \geq 10$. 注意到, 对 $I_1, I_2 \subseteq \{1, \dots, 11\}, I_1 \cap I_2 = \emptyset, |I_1|, |I_2| \geq 2$, 由于

$$S\left(\sum_{i \in I_1} a_i\right) + S\left(\sum_{i \in I_2} a_i\right) = S\left(\sum_{i \in I_1 \cup I_2} a_i\right),$$

故 $\sum_{i \in I_1} a_i, \sum_{i \in I_2} a_i$ 相加不进位.

特别地, $\sum_{i \in I_1} x_i, \sum_{i \in I_2} x_i$ 相加在个位不进位. ①

易知 $x_{10} \neq 0$ (否则 $(x_1 + x_{10}), (x_2 + x_{11})$ 相加进位, 矛盾), 故 $x_{10} \geq 1$. 现在将 $x_1, \dots, x_{11}$ 分若干组(允许有数不在任何组中), 每组 ≥ 2 个数, 各组数之和的个位数之和 ≥ 10 . ②

若②如成立, 则将各组之和依次相加, 即与①矛盾. 下面说明②成立.

先取出尽可能多的二元组, 每个二元组的和的个位数 ≥ 2 . 若取出了 5 个二元组, 则②成立. 下至多取出 4 个二元组, 则剩下 ≥ 3 个数, 且剩下的数中, 无两数 $\in [1, 4]$, 无两数 $\in [6, 9]$, 故必剩下 0 或 5 至少一个.

若剩下的数有 0, 则可推出剩下的数为 0, 1, $\dots$, 1 (≥ 2 个 1), 矛盾.

故至少剩下一个 5, 进 1. 剩下的数只能是“若干个 5”或“若干个 5, 一个 6”, 将剩下的数三个三个一组, 设有 $m (0 \leq m \leq 4)$ 个二元组, $\left[\frac{11-2m}{3}\right]$ 个三元组, 则各组数之和的个位数之和 $\geq 2 \cdot m + 5 \cdot \left[\frac{11-2m}{3}\right]$, 易验证 $m = 0, 1, \dots, 4$ 时均有

$$2 \cdot m + 5 \cdot \left[\frac{11-2m}{3}\right] \geq 10.$$

②成立. 故可推出矛盾!

结合 (I), (II) 即得原题所需结论. □

评注 本题是困难的组合题, 第一个难点在猜答案, 有多种可能的方向, 构造也有一定难度, 不一定一下就能想到, 需要作一定尝试, 事实上, 若答案是“对某些 n, β 不是空也不是全部”, 则在证明部分可能需要作大量讨论; 若答案是“对每个 n, β 或者空, 或者全部”, 则在构造部分要达到 β 很小, 需要构造很多的进位, 本题最终的答案是后一种, 在证明的部分, 需首先猜到只需考虑第 1 个进位的那一位, 进 1 归结于一个关于 $x_1, \dots, x_{11}$ 的小问题, 最后的这个小问题还需要选取合适的分类讨论的方法(在考场时间内能讨论完). 本题是第二轮选拔最难的一题.

8.4 对所有实数 $x_1, x_2, \dots, x_{60} \in [-1, 1]$, 求

$$\sum_{i=1}^{60} x_i^2 (x_{i+1} - x_{i-1})$$

的最大可能值, 这里 $x_0 = x_{60}, x_{61} = x_1$.

解 注意到

$$\sum_{i=1}^{60} x_i^2 (x_{i+1} - x_{i-1}) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{60} (x_{i+1} - x_i)^3.$$

对 $1 \leq i \leq 60$, 记 $y_i = x_{i+1} - x_i$, 由 $x_i, x_{i+1} \in [-1, 1]$ 知 $y_i \in [-2, 2]$, 进

$$(y_i - 2)(y_i + 1)^2 \leq 0,$$

即

$$y_i^3 \leq 3y_i + 2.$$

从

$$\sum_{i=1}^{60} x_i^2 (x_{i+1} - x_{i-1}) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{60} y_i^3 \leq \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{60} (3y_i + 2) = 40.$$

另一方面, 令 $(x_1, \dots, x_{60}) = (1, 0, -1, 1, 0, -1, \dots, 1, 0, -1)$. 此时

$$\sum_{i=1}^{60} x_i^2 (x_{i+1} - x_{i-1}) = 40.$$

故

$$\sum_{i=1}^{60} x_i^2 (x_{i+1} - x_{i-1})$$

的最大值为 40. □

评注 本题是简单的不等式, 注意到 $\sum x_i^2 (x_{i+1} - x_{i-1})$ 就是 $\frac{1}{3} \cdot \sum (x_{i+1} - x_i)^3$ 就可以了.

8.5 求最小的正实数 α , 使得对面积为 1 的任意凸多边形 P , 存在平面上一点 M 使得 $P \cup Q$ 的凸包的面积不超过 α . 这里 Q 为 P 关于点 M 的中心对称图形.

解 结论是: α 最小为 2.

(I) 一方面, 令 P 是正 $\triangle ABC$.

若 M 在 P 外, 则 $P \cup Q = \emptyset$, 进

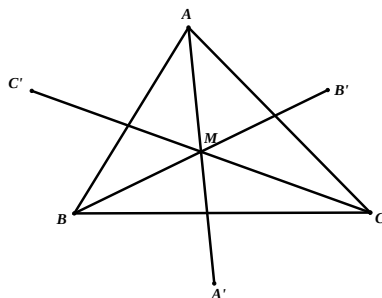
$$P \cup Q \text{ 凸包面积} \geq P \cup Q \text{ 面积} = 2.$$

若 M 在 P 内, 设 A, B, C 关于 M 对称点为 A', B', C' , 则

$$P \cup Q \text{ 凸包面积} \geq S_{\triangle AMB'} + S_{\triangle B'MC} + S_{\triangle CMA'} + S_{\triangle A'MB} + S_{\triangle BMC'} + S_{\triangle C'MA}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(S_{\triangle AMB} + S_{\triangle BMC} + S_{\triangle CMA}) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

故 $\alpha \geq 2$.



(II) 另一方面, 我们说明 $\alpha = 2$ 符合要求.

取 P 的距离最远(之一)的一对顶点 A, B , 建系, 设 $A(0, 0), B(L, 0), L > 0$, 则

$$P \subseteq \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq L, y \in \mathbb{R}\} \quad (\text{由 } AB \text{ 最长}).$$

取 M 为 $(\frac{L}{2}, 0)$. 设 $P \cup Q$ 的凸包是 R , 由对称性, 为说明 $S_R \leq 2$, 只需说明 $S_{R_1} \leq S_{P_1} + S_{Q_1}$, 这里 P_1, Q_1, R_1 分别是 P, Q, R 与第一象限的交.

注意到 P_1, Q_1, R_1 可看作凸函数的图像, 设 P_1, Q_1, R_1 分别对应 $f_1(x), f_2(x), g(x)$ ($x \in [0, L]$), 则

$$S_{P_1} = \int_0^L f_1(x) dx, S_{Q_1} = \int_0^L f_2(x) dx, S_{R_1} = \int_0^L g(x) dx.$$

为说明 $S_{P_1} + S_{Q_1} \geq S_{R_1}$, 只需说明对 $x \in [0, L]$, 有

$$f_1(x) + f_2(x) \geq g(x).$$

取定 x , 由 R 的定义知 $g(x)$ 可表示为

$$\frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \cdot f_i(\beta) + \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} \cdot f_j(\alpha),$$

这里 $0 \leq \alpha \leq x \leq \beta \leq L, \alpha \neq \beta, i, j \in \{1, 2\}$. 由于 f_1, f_2 值域 $\subseteq [0, +\infty)$, 故

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \cdot f_i(\beta) + \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} \cdot f_j(\alpha) \\
&\leq \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \cdot f_1(\beta) + \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} \cdot f_1(\alpha) + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \cdot f_2(\beta) + \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} \cdot f_2(\alpha) \\
&\leq f_1(x) + f_2(x), \quad (\text{凸性})
\end{aligned}$$

进 $S_R \leq 2$.

综上, α 最小值为 2. □

评注 本题是简单的组合几何, 得到 $\alpha \geq 2$ 的构造后, 证明部分也不难.

8.6. 给定整数 $n \geq 2$. 有 $2n^2$ 位选手参加中国象棋比赛, 每两位选手恰对弈一局, 结果可有平局. 已知

(1) 对任意三位选手甲、乙、丙, 若甲胜乙, 且乙胜丙, 则甲胜丙;

(2) 所有比赛中平局的场数不超过 $\frac{n^3}{16}$.

证明: 可从这 $2n^2$ 位选手中选出 n^2 位选手, 并适当记作 $P_{ij} (1 \leq i, j \leq n)$, 使得对任意 $i, j, i', j' \in \{1, 2, \dots, n\}$, 若 $i > i'$, 则 P_{ij} 胜 $P_{i'j'}$.

证明 记 $t = \lceil \frac{n}{4} \rceil \in \mathbb{Z}^+$.

先去掉平局次数 $\geq t$ 的选手, 则去掉的选手数 $\leq \frac{\frac{n^3}{16}}{t} \leq \frac{n^2}{2}$, 故至少剩下 $\frac{3n^2}{2}$ 名选手, 记为 $V_1, \dots, V_N (N \geq \frac{3n^2}{2})$, 约定自己胜自己, 则“胜”是 $V_1, \dots, V_N$ 上的偏序关系. 作拓扑排序, 不妨设: 对 $1 \leq i, j \leq N$, 若 V_i 胜 V_j , 则 $i \leq j$. 现在将 $V_1, \dots, V_N$ 取出前 $n^2 + (n-1)(2t-2)$ 项, 分成 $2n-1$ 段 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2n-1}$, 每段依次含 $n, 2t-2, n, 2t-2, \dots, n, 2t-2, n$ 名选手, 由于

$$n \cdot n + (n-1)(2t-2) \leq n \cdot n + (n-1) \left(2 \cdot \left(\frac{n}{4} + 1 \right) - 2 \right) < \frac{3n^2}{2},$$

故这可以做到.

现在选取 $P_{i,j}$, 记

$$A_i = \{P_{i,1}, \dots, P_{i,n}\} \quad (1 \leq i \leq n),$$

令

$$(A_1, \dots, A_n) = (\Gamma_{2n-1}, \dots, \Gamma_5, \Gamma_3, \Gamma_1),$$

我们验证这样就符合要求.

任取 $\alpha = P_{i,j}, \beta = P_{i',j'}, i > i'$. 设 $\alpha \in \Gamma_p, \beta \in \Gamma_q$, 由 $i > i'$ 知 $p \equiv q \equiv 1 \pmod{2}$, 且 $p < q$, 设 $\alpha = V_r, \beta = V_s$, 由于 Γ_p, Γ_q 之间有一个长为 $2t-2$ 的段, 故 $s-r \geq 2t-1$, 进 存在 $r \leq k \leq s$, 使 V_r 与 V_k, V_k 与 V_s 均不是平局 (因为 V_r, V_s 平局数均 $\leq t-1$). 从 V_r 胜 V_k, V_k 胜 V_s , 推出 V_r 胜 V_s .

故这样的 $P_{i,j}$ 符合要求.

原题得证! □

评注 本题是中等难度的组合题, 首先注意到 $\frac{1}{16}$ 很小, 可以先考虑 $\Theta(n^3)$, 由此想到可以先去掉平局数很多的人(量级估计的常用手法)(事实上, 后面再具体计算 n^3 前的系数发现 $\frac{1}{16}$ 刚好够). 后面选取 $P_{i,j}$ 有多种可能的方向, 需大胆尝试, 这与 IMO 2017 第 5 题比较像, 本题是一个很好的具有选拔功能的组合题.