

2021 年清华大学强基计划笔试数学试题回忆版



本试卷共 35 题，每一道题均为不定项，下为回忆版.

1. 甲乙丙丁四人共同参加 4 项体育比赛，每项比赛第一名到第四名的分数依次为 4、3、2、1 分. 比赛结束甲获得 14 分第一名，乙获得 13 分第二名，则 ().
- A. 第三名不超过 9 分
 - B. 第三名可能获得其中一场比赛的第一名
 - C. 最后一名不超过 6 分
 - D. 第四名可能一项比赛拿到 3 分

答案: ACD

解:

- (1) 所有分数之和为 $4 \times (4 + 3 + 2 + 1) = 40$ ，甲乙总分数之和为 $14 + 13 = 27$ ，所以第三名和第四名总分数为 13 分，第四名的分数不超过 6 分，C 正确，第四名至少得 4 分，A 正确.
- (2) 所有项目的第一名和第二名分数之和为 $4 \times (4 + 3) = 28$ 分，只比甲乙两人总分数高一分，说明只有一种情况，甲乙包揽所有项目第一名，总共拿到 3 个第二名和 1 个第三名.B 错误.
- (3) D 正确的一种情形:

	I	II	III	IIII
甲	4	4	4	2
乙	3	3	3	4
丙	2	2	2	1
丁	1	1	1	3

2. 定义 $x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$ ，则 $(\cdots((2 * 3) * 4) \cdots) * 21 = ()$.

答案: $\frac{116}{115}$

解：令 $x = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$, $y = \frac{\mu-1}{\mu+1}$, 则 $x * y = \frac{\frac{\lambda-1}{\lambda+1} + \frac{\mu-1}{\mu+1}}{1 + \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \cdot \frac{\mu-1}{\mu+1}} = \frac{\lambda\mu-1}{\lambda\mu+1}$.

其中 $\lambda = -\frac{x+1}{x-1}$, $\mu = -\frac{y+1}{y-1}$.

容易得到, 若设 $z = \frac{\nu-1}{\nu+1}$, 即 $\nu = -\frac{z+1}{z-1}$, 则 $(x * y) * z = \frac{\lambda\mu\nu-1}{\lambda\mu\nu+1}$, 即 $*$ 运算满足:

(1) $x * y = y * x$

(2) $(x * y) * z = x * (y * z)$

进而可得 $(\cdots((2 * 3) * 4) \cdots) * 21 = \frac{(-\frac{3}{1})(-\frac{4}{2}) \cdots (-\frac{22}{20}) - 1}{(-\frac{3}{1})(-\frac{4}{2}) \cdots (-\frac{22}{20}) + 1} = \frac{-21 \times 11 - 1}{-21 \times 11 + 1} = \frac{116}{115}$

补充说明: 看到 $\frac{x+y}{1+xy}$, 联想到 $\tanh x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, 于是做一个 $x = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$ 的换元准没错.

3. 已知 $\omega = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$, 则 ().

A. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^3)(x - \omega^7)(x - \omega^9)$

B. $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^3)(x - \omega^7)(x - \omega^9)$

C. $x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^3)(x - \omega^7)(x - \omega^9)$

D. $x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = (x - \omega)(x - \omega^3)(x - \omega^7)(x - \omega^9)$

答案: B.

解: 容易得到 $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^9$ 为 $x^{10} - 1 = 0$ 的根, 则

$$x^{10} - 1 = (x - 1)(x - \omega)(x - \omega^2)(x - \omega^3) \cdots (x - \omega^9).$$

另外 $1, \omega^2, \omega^4, \omega^6, \omega^8$ 为 $x^5 - 1 = 0$ 的根, 则

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x - \omega^2)(x - \omega^4)(x - \omega^6)(x - \omega^8).$$

结合 $\omega^5 = -1$, 两个式子做比可得

$$x^5 + 1 = (x - \omega)(x - \omega^3)(x + 1)(x - \omega^7)(x - \omega^9).$$

即

$$(x - \omega)(x - \omega^3)(x - \omega^7)(x - \omega^9) = \frac{x^5 + 1}{x + 1} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.$$

补充说明: 第一次见此题是 2000 年全国高中数学联赛一试第 6 题.

4. 恰有一个实数 x 使得 $x^3 - ax - 1 = 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围为 ().

A. $(-\infty, \sqrt[3]{2})$

B. $\left(-\infty, \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$

C. $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

答案：B.

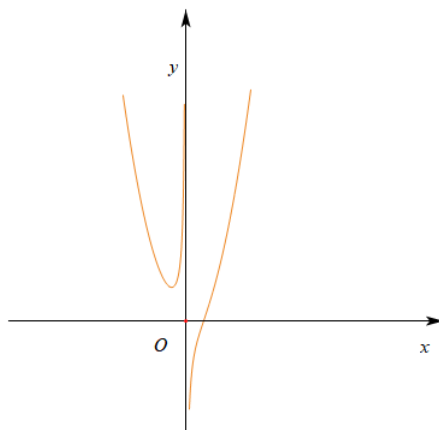
解：易得 $x \neq 0$ ，问题等价于方程 $a = x^2 - \frac{1}{x}$ 只有一个实数解.

令 $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$, $f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$.

令 $2x_0^3 + 1 = 0$ ，即 $x_0 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ，可知

x	$(-\infty, x_0)$	x_0	$(x_0, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	$\nearrow$

其图象如图所示.



故 $a < f(x_0) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

补充说明：高考导数基本要求.

5. 已知 $[x]$ 为高斯函数， $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{5}\right] = x$ 解的组数为 ().
A. 30 B. 40 C. 50 D. 60

答案：A

解：因为 $\left[\frac{x}{2}\right], \left[\frac{x}{3}\right], \left[\frac{x}{5}\right] \in \mathbb{Z}$ ，则 $x \in \mathbb{Z}$.

因此 $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{5}\right] = x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} - \frac{x}{30}$.

即

$$\left\{\frac{x}{2}\right\} + \left\{\frac{x}{3}\right\} + \left\{\frac{x}{5}\right\} = \frac{x}{30}.$$

因此 $\frac{x}{30}$ 的可能取值有 $2 \times 3 \times 5 = 30$ 种可能性.

因为 2, 3, 5 两两互质, 容易得到 $15a + 10b + 6c \equiv a \pmod{2}$, $15a + 10b + 6c \equiv b \pmod{3}$, $15a + 10b + 6c \equiv c \pmod{5}$.

6. 已知 m, n 最大公约数为 $10!$, 最小公倍数为 $50!$, 数对 (m, n) 的组数为 ().

- 答案: B.

ab 的质因数有 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47 共 15 个. 其中 a 能取到的质因数为上述 15 个数构成集合的子集, 共 2^{15} 个, b 取其补集情形即可.

- A. $f(a) = \frac{1}{2}$

- C. $f(x + y)^Z = 2f(x)f(y)$

- 答案：ABC

令 $y = 0$, 可得 $f(x) = f(x)f(a) + f(a)f(a-x)$, 代入 $f(a) = \frac{1}{2}$, 可得 $f(a-x) = f(x)$.
即原等式变形为 $f(x+y) = 2f(x)f(y)$, C 正确.

令 $y = a - x$ 可得 $f(a) = 2[f(x)]^2$, 即 $[f(x)]^2 = \frac{1}{4}$, 解得 $f(x) = \frac{1}{2}$, 选 B.

- A. $\frac{4\sqrt{2}}{27}$

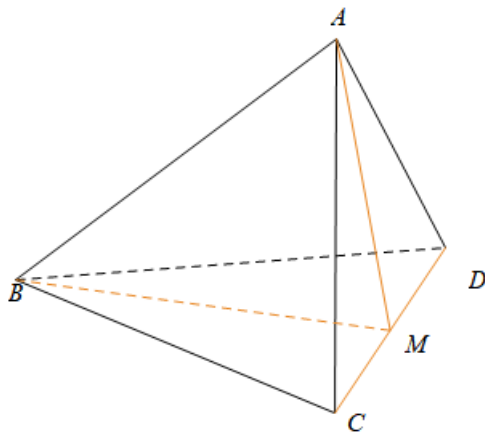
- B. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$

- C. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$

- D. $\frac{\sqrt{3}}{18}$

答案：C.

解：如图所示，取 CD 中点 M 连结 AM ， BM ，设 $A-BCD$ 的高为 h ，则 $h \leq AM$ 。



显然 $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ ，设 $\angle ACD = \angle BCD = \alpha$ 。

则 $AM = BM = BC \sin \alpha = \sin \alpha$ ， $CD = 2CM = 2BC \cos \alpha = 2 \cos \alpha$ 。

于是

$$\begin{aligned} V_{D-ABC} &= \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot h \leq \frac{1}{6} CD \cdot BM \cdot AM = \frac{1}{3} \cos \alpha \sin^2 \alpha \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \sqrt{2 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} \\ &\leq \frac{1}{3\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{3} \right)^3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{27} \end{aligned}$$

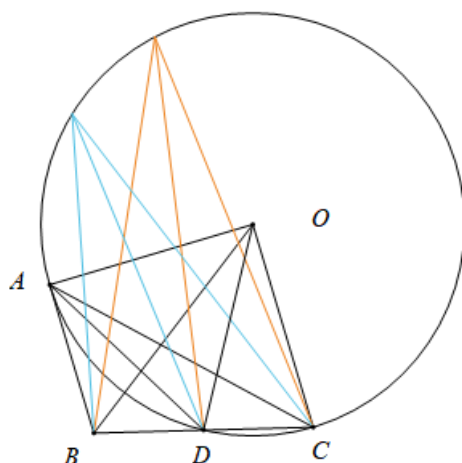
等号成立条件，当且仅当平面 ACD 与平面 BCD 垂直，且 $\alpha = \arctan \sqrt{2}$ 。

9. 在 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 的中点， $\angle CAD = 15^\circ$ ，则 $\angle ABC$ 的最大值为 ().
A. 120° B. 105° C. 90° D. 60°

答案：B.

解：由 $\angle CAD = 15^\circ$ ，在 D 、 C 确定的情形下，点 A 的轨迹是一段圆弧。

如图所示做出 $\triangle ACD$ 的外接圆 $\odot O$ ，显然当 $\angle ABC$ 时， BA 是 $\odot O$ 的一条切线。



在四边形 $OABC$ 中, $\angle BAO = 90^\circ$, $\angle OCB = 75^\circ$, 求 $\angle ABC$ 的问题, 转化为求 $\angle AOC$ 的问题, 进而转化成求 $\angle AOD$ 或者 $\angle ACD$ 的问题.

由切割线定理可得, $\triangle BAD \sim \triangle BCA$, $BA^2 = BD \cdot BC = 2BD^2$,

进而 $\frac{AC}{DA} = \frac{BA}{BD} = \sqrt{2}$.

在 $\triangle ADC$ 中, $\angle CAD = 15^\circ$, 设 $\angle ACD = \alpha$, 则 $\angle ADC = 165^\circ - \alpha$, 根据正弦定理可得

$$\frac{\sin \angle ADC}{\sin \angle ACD} = \frac{AC}{AD} = \sqrt{2}$$

即

$$\begin{aligned} \frac{\sin(165^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} &= \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \sin \alpha + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cos \alpha &= \sqrt{2} \sin \alpha \\ \tan \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

即 $\alpha = 30^\circ$, 进而可得 $\angle AOD = 2\alpha = 60^\circ$, $\angle AOC = \angle AOD + \angle DOC = 90^\circ$.

进而可得 $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAO - \angle AOC - \angle BCO = 105^\circ$.

10. 已知非负实数 a, b, c 满足 $a+b+c=1$, 则 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 的最大值为 ().

答案:

解: 对原式因式分解可得

$$\begin{aligned} a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) &= (a^2b - ab^2) - c(a^2 - b^2) + c^2(a-b) \\ &= (a-b)(ab - ca - cb + c^2) \\ &= (a-b)(b-c)(a-c) \end{aligned}$$

该式子关于 a, b, c 轮换对称, 只需考虑 $a \leq b \leq c$ 和 $a \geq b \geq c$ 两种情况. 令 $f(a, b, c) = (a-b)(b-c)(a-c)$

(1) 若 $a \leq b \leq c$, 此时 $f(a, b, c) \leq 0$

(2) 若 $a \geq b \geq c$, 此时 $f(a, b, c) \geq 0$.

由 $(a-b)(b-c)(a-c) \leq (a+c-b) \cdot b(a+c)$

即 $f(a, b, c) \leq f(a+c, b, 0) = f(1-b, b, 0) = b(1-2b)(1-b)$.

令 $g(x) = x(1-2x)(1-x)$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 则 $g'(x) = 6x^2 - 6x + 1$,

解得当 $x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 计算 $g\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18}$.

因此原式最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{18}$, 此时 $a = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$, $b = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$, $c = 0$ 的各种轮换形式.

11. 已知 $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ 十等分圆周, 则在其中取四点构成凸四边形为梯形个数为 ().

A. 60

B. 45

C. 40

D. 50

答案: A

解: 首先考虑梯形的形状, 将圆周十等分, 只看四条边所对圆心角的份数, 设上底为 x , 腰为 y , 下底为 z , 则

$$\begin{cases} x+2y+z=10 \\ x < z \end{cases}$$

其中 $x, y, z \in \mathbb{N}^*$.

枚举可得 $(x, y, z) \in \{(1, 1, 7), (2, 1, 6), (3, 1, 5), (1, 2, 5), (2, 2, 4), (1, 3, 3)\}$.

将上述每个梯形旋转均有 10 个位置, 因此答案为 $6 \times 10 = 60$.

12. 已知 $f(x) = \sin x \cos x + \sin x + \frac{2}{5} \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 设 $f(x)$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 则 ().

A. $M = \frac{23}{8}$

B. $m = \frac{2}{5}$

C. $M = \frac{38}{25}$

D. $m = \frac{1}{5}$

答案: BC

解: 由 $f(x) = \sin x \cos x + \sin x + \frac{2}{5} \cos x$,

则 $f'(x) = \cos 2x + \cos x - \frac{2}{5} \sin x$, 该导函数在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 递减, 且 $f'(0) = 2 > 0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{7}{5} < 0$.

因此我们需要解出 $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 经测试 $\sin x_0 = \frac{4}{5}$, $\cos x_0 = \frac{3}{5}$ 时符

合.

$f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递增, 在 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 单调递减. $f(0) = \frac{2}{5}$, $f(x_0) = \frac{38}{25}$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$,
因此 $M = \frac{38}{25}$, $m = \frac{2}{5}$.

13. 已知集合 $U = \{0, 1, 2, \dots, 2021\}$, $S \subseteq U$, 且 S 中任意两项相加不是 5 的倍数, 求 S 的元素个数最大值.

答案:

解: 集合 U 模 5 余 0 最多选 1 个数,

集合 U 模 5 余 1 和 4 最多选取一类数, 其中模 5 余 1 有 405 个, 模 5 余 4 有 404 个.

集合 U 模 5 余 2 和 3 最多选取一类数, 两类数均有 404 个.

所以 S 的最大值 $= 1 + 405 + 404 = 810$.

14. 将函数 $y = \sqrt{4 + 6x - x^2} - 2 (x \in [0, 6])$ 的图象逆时针方向旋转 $\theta (0 \leq \theta \leq \alpha)$, 得到曲线 C . 若对于每一个旋转角 θ , 曲线 C 都是一个函数的图像, 则 α 的最大值为 ().

A. $\arctan \frac{3}{2}$

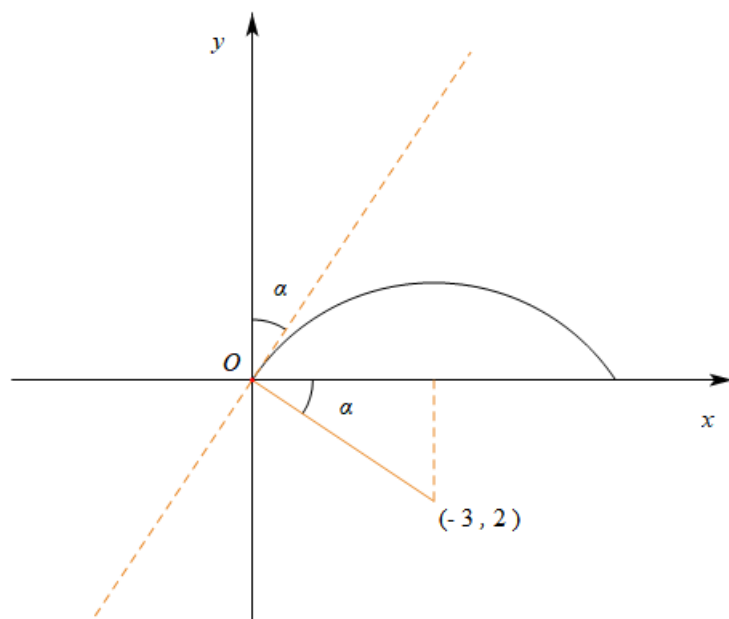
B. $\arctan \frac{2}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{3}$

答案:

解: 原函数的图像为一段圆弧, α 的极值如图所示.



计算可得 $\alpha = \arctan \frac{2}{3}$.

补充说明：2009 年上海高考第 14 题.

15. 在平面直角坐标系中, O 是坐标原点, 两定点 A, B 满足 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2$, 则点集 $\{P | \vec{OP} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB}, |\lambda| + |\mu| \leq 1, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ 所表示的区域的面积是 ().

A. $2\sqrt{2}$

B. $4\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{3}$

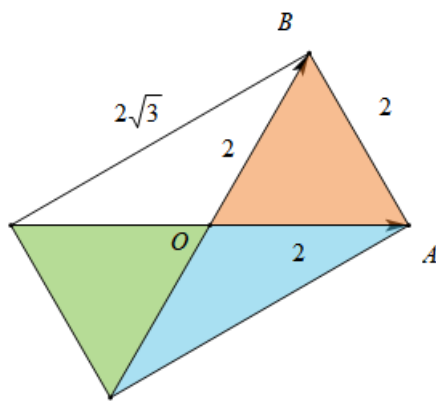
D. $4\sqrt{3}$

答案: D

解: 由 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos \theta$, 解得 $\cos \theta = \frac{1}{2}$.

即 $\vec{OA}$ 和 $\vec{OB}$ 的夹角为 60° .

根据非常基本的向量知识, P 所表示的区域为下图所示矩形. 其面积为 $2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$



补充说明：2013 年高考安徽第 9 题

16. 已知 $y^2 = 4x$, 过 $A(-2, 3)$ 做抛物线两条切线, 交 y 轴于 B, C 两点, 则 $\triangle ABC$ 外接圆方程为 ().

A. $(x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$

B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = \frac{13}{4}$

C. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$

D. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{17}{4}$

答案: C

解: 设 $AB \& AC: x = t(y-3) - 2$, 其中 $B(0, y_1), C(0, y_2)$.

令 $x = 0$ 可得, $y_1 = \frac{2}{t_1} + 3, y_2 = \frac{2}{t_2} + 3$.

联立 $AB \& AC$ 与抛物线 $y^2 = 4x$, 可得

$$y^2 - 4ty + 12t + 8 = 0$$

其判别式 $\Delta = 16t^2 - 4(12t + 8) = 0$, 即 $t^2 - 3t - 2 = 0$,

因此 $t_1 + t_2 = 3, t_1 t_2 = -2$.

进一步 $y_1 + y_2 = \frac{2(t_1 + t_2)}{t_1 t_2} + 6 = 3$, 即 BC 中点坐标为 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

与此同时 $|y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{17}$.

因此以 BC 为直径的圆的方程为 $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$.

设过 BC 两点的圆系方程为 $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \lambda x - \frac{17}{4} = 0$,

将 $A(-2, 3)$ 代入可得 $\lambda = 1$, 整理可得过 A, B, C 的圆的方程为 $x^2 + y^2 + x - 3y - 2 = 0$, 选 C.

