

2021 年河南省普通高中毕业班高考适应性测试

理科数学试题参考答案及评分标准

一、选择题(每小题 5 分,共 60 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	C	D	C	B	A	D	A	C	B	A

二、填空题(每小题 5 分,共 20 分)

13. 8 14. $\frac{4}{3}$ 15. $\frac{13}{7}$ 或 $\frac{3}{2}$ 16. $-\frac{3}{2} < \lambda < 1$

三、解答题

(一)必考题:共 60 分。

17. (1)取 AC 的中点 O,连接 BO,DO.

由题意知,BO 为 $\angle ABC$ 的平分线,且 $BO \perp AC$, $DO \perp AC$.

设点 F 是点 E 在平面 ABC 上的射影,

由已知得,点 F 在 BO 上,连接 EF,则 $EF \perp$ 平面 ABC.

$\because$ 平面 ACD $\perp$ 平面 ABC,平面 ACD $\cap$ 平面 ABC = AC, $DO \subset$ 平面 ACD, $DO \perp AC$,

$\therefore DO \perp$ 平面 ABC. 同理可得 $BO \perp$ 平面 ADC. 4 分

又 $\because EF \perp$ 平面 ABC, $\therefore DO \parallel EF$.

$\because BE$ 和平面 ABC 所成的角为 60° ,即 $\angle EBF = 60^\circ$, $\therefore DO = EF = 2\sqrt{3}$.

$\therefore$ 四边形 EFOD 为平行四边形. $\therefore DE \parallel BO$. $\therefore DE \perp$ 平面 ADC. 6 分

(2)以 OA,OB,OD 方向为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 O-xyz,

则 $A(2,0,0)$, $D(0,0,2\sqrt{3})$, $E(0,2\sqrt{3}-2,2\sqrt{3})$, $B(0,2\sqrt{3},0)$.

$\therefore \overrightarrow{AD} = (-2,0,2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{DE} = (0,2\sqrt{3}-2,0)$, $\overrightarrow{BA} = (2,-2\sqrt{3},0)$ 8 分

设平面 ADE 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x,y,z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD} = -2x + 2\sqrt{3}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DE} = (2\sqrt{3}-2)y = 0. \end{cases}$ 取 $z = 1$,得 $\mathbf{n} = (\sqrt{3},0,1)$ 10 分

设 BA 与平面 ADE 所成的线面角为 θ ,则 $\sin \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{BA} \rangle| =$

$$\frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BA}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{BA}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times 4} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$\therefore BA$ 与平面 DAE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 12 分

18. (1)选择条件①:

$\because \frac{\sqrt{3}}{3} \sin B = a - b \cos C$, $\therefore$ 由正弦定理得, $\frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin B = \sin A - \sin B \cos C$ 2 分

又在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \sin(B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$,

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin B = \sin A - \sin B \cos C = \cos B \sin C$ 4 分

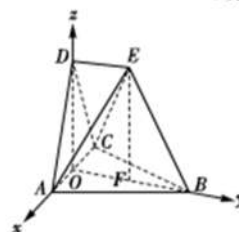
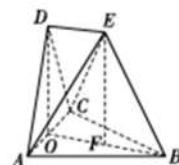
又 $\because C \in (0, \pi)$, $\therefore \sin C > 0$. $\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} \sin B = \cos B$, 即 $\tan B = \sqrt{3}$ 5 分

又 $\because B \in (0, \pi)$, $\therefore B = \frac{\pi}{3}$ 6 分

选择条件②:

$\because b \sin C = c \cos \left(B - \frac{\pi}{6} \right)$, $\therefore$ 由正弦定理得, $\sin B \sin C = \sin C \cos \left(B - \frac{\pi}{6} \right)$ 2 分

又 $\because C \in (0, \pi)$, $\therefore \sin C > 0$.



$$\therefore \sin B = \cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right), \text{即 } \sin B = \cos B \cos \frac{\pi}{6} + \sin B \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B, \text{即 } \tan B = \sqrt{3}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{又} \because B \in (0, \pi), \therefore B = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{由题意知 } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}. \\ \therefore 4|\overrightarrow{BD}|^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})^2, \text{即 } 16 = a^2 + c^2 + ac. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{又} \because a^2 + c^2 \geq 2ac, \therefore ac \leq \frac{16}{3} \text{ (当且仅当 } a = c = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ 时等号成立)}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由三角形面积公式可知 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积的最大值为 } \frac{4\sqrt{3}}{3}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (1) 由图 1 知,“年轻人”占比为 80%，“非年轻人”占比为 20%.
由图 2 知,“经常使用直播销售用户”占比为 60%，“不常使用直播销售用户”占比为 40%.
 $\therefore$ 补全的列联表如下:

	年轻人	非年轻人	合计
经常使用直播销售用户	100	20	120
不常使用直播销售用户	60	20	80
合计	160	40	200

于是 $a = 100, b = 20, c = 60, d = 20$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\therefore K^2 = \frac{200 \times (100 \times 20 - 60 \times 20)^2}{120 \times 80 \times 160 \times 40} = \frac{25}{12} \approx 2.083 > 2.072, \text{即有 } 85\% \text{ 的把握认为经常使用网络直播销售与年龄有关}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

- (2) 若按方案一,设获利 X_1 万元,则 X_1 可取的值为 300, -150, 0. X_1 的分布列为:

X_1	300	-150	0
p	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X_1) = 300 \times \frac{7}{10} + (-150) \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{1}{10} = 180,$$

$$D(X_1) = (300 - 180)^2 \times \frac{7}{10} + (-150 - 180)^2 \times \frac{1}{5} + (0 - 180)^2 \times \frac{1}{10} = 120^2 \times \frac{7}{10} + 330^2 \times \frac{1}{5} + 180^2 \times \frac{1}{10} = 35100.$$

$$\therefore X_1 \text{ 的期望 } E(X_1) = 180, \text{方差 } D(X_1) = 35100. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

若按方案二,设获利 X_2 万元,则 X_2 可取的值为 500, -300, 0. X_2 的分布列为:

X_2	500	-300	0
p	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X_2) = 500 \times \frac{3}{5} + (-300) \times \frac{3}{10} + 0 \times \frac{1}{10} = 210,$$

$$D(X_2) = (500 - 210)^2 \times \frac{3}{5} + (-300 - 210)^2 \times \frac{3}{10} + (0 - 210)^2 \times \frac{1}{10} = 290^2 \times \frac{3}{5} + 510^2 \times \frac{3}{10} + 210^2 \times \frac{1}{10} = 132900.$$

$$\therefore X_2 \text{ 的期望 } E(X_2) = 210, \text{方差 } D(X_2) = 132900. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore E(X_1) = 180 < E(X_2) = 210, D(X_1) = 35100 < D(X_2) = 132900,$$

$\therefore$ 从获利的均值方面看方案二线上直播销售获得的利润更多些,但是,方案二的方差要比方案一的方差大得多,从稳定性方面看方案一线下销售更稳妥.

$\therefore$ 从获得角度考虑,应该选择方案二;从规避风险角度考虑,应该选择方案一. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

(考生给出一个选择,并能够说明理由即可)

20. (1) 由题意知直线 $l: y=x+a$ 与 x 轴交于点 $(-a, 0)$. $\therefore$ 点 M 为椭圆 C 的左顶点, 即 $M(-a, 0)$.
 $\therefore$ 设 $N\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, 代入椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 得 $\frac{1}{4} + \frac{a^2}{4b^2} = 1$, 即 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$ 3 分
 $\therefore e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{2}{3}$. $\therefore e = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 即椭圆 C 的离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 5 分
(2) 由题意得 $a=2$. $\therefore$ 椭圆 $C: b^2x^2 + 4y^2 = 4b^2 (b>0)$.
由 $\begin{cases} b^2x^2 + 4y^2 = 4b^2 \\ y = kx + 2 \end{cases}$, 消去 y , 得 $(4k^2 + b^2)x^2 + 16kx + 16 - 4b^2 = 0$.
 $\begin{cases} \Delta = 16b^2(4k^2 + b^2 - 4) > 0, \\ x_M + x_N = -\frac{16k}{4k^2 + b^2}, \\ x_M \cdot x_N = \frac{16 - 4b^2}{4k^2 + b^2}. \end{cases}$ 7 分
 $\therefore$ 直线 $QM: y = \frac{y_M}{x_M - 2}(x - 2)$, $\therefore A\left(0, -\frac{2y_M}{x_M - 2}\right)$, $\overrightarrow{PA} = \left(0, \frac{2y_M + 2x_M - 4}{2 - x_M}\right)$.
 $\therefore y_M = kx_M + 2$,
 $\therefore y_M - 2 = kx_M$, 即 $\overrightarrow{PA} = \left(0, \frac{2(k+1)x_M}{2 - x_M}\right)$.
同理 $\overrightarrow{PB} = \left(0, \frac{2(k+1)x_N}{2 - x_N}\right)$ 10 分
 $\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{4(k+1)^2 x_M x_N}{x_M x_N - 2(x_M + x_N) + 4} = 4 - b^2 = 1$. $\therefore b^2 = 3$.
 $\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 12 分
21. (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 1 分
 $f'(x) = 2ax - (6+a) + \frac{3}{x} = \frac{2ax^2 - (6+a)x + 3}{x} = \frac{(2x-1)(ax-3)}{x}$ 2 分
 $\therefore a \leq 0$, $\therefore ax - 3 < 0$.
当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$.
 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减. 4 分
(2) 设 $g(x) = f(x) + ax - b = ax^2 - 6x + 3\ln x - b$,
则 $g'(x) = 2ax - 6 + \frac{3}{x} = \frac{2ax^2 - 6x + 3}{x}$ 5 分
 $\therefore$ 当 $a < 0$ 时, $2ax^2 - 6x + 3 = 0$ 有两个根 x_1, x_2 , 不妨令 $x_1 < x_2$,
又 $x_1 x_2 = \frac{3}{2a} < 0$, $\therefore x_1 < 0, x_2 > 0$. 由题意舍去 x_1 .
 $\therefore$ 当 $x \in (0, x_2)$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$.
 $\therefore g(x)$ 在 $(0, x_2)$ 上单调递增, 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递减.
 $\therefore$ 存在 x_0 使 $f(x) + ax - b \geq 0$ 成立, $\therefore g(x)_{\max} = g(x_2) = ax_2^2 - 6x_2 + 3\ln x_2 - b \geq 0$, 即 $ax_2^2 - 6x_2 + 3\ln x_2 \geq b$ 8 分
又 $2ax_2^2 - 6x_2 + 3 = 0$, $\therefore a = \frac{6x_2 - 3}{2x_2^2}$.
 $\therefore a \leq \frac{9}{2}$, $\therefore \frac{6x_2 - 3}{2x_2^2} \leq \frac{9}{2}$, $\therefore 0 < x_2 \leq \frac{1}{3}$ 9 分
 $\therefore b \leq ax_2^2 - 6x_2 + 3\ln x_2 = \frac{6x_2 - 3}{2x_2^2} \cdot x_2^2 - 6x_2 + 3\ln x_2 = -3x_2 + 3\ln x_2 - \frac{3}{2}$.

令 $h(x) = -3x + 3\ln x - \frac{3}{2} \left(0 < x \leq \frac{1}{3} \right)$, 则 $h'(x) = \frac{3-3x}{x} > 0$.

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{3} \right]$ 上单调递增.

$\therefore h(x)_{\max} = h\left(\frac{1}{3}\right) = -3\ln 3 - \frac{5}{2}$, 即 b 的最大值为 $-3\ln 3 - \frac{5}{2}$ 12 分

(二) 选考题: 共 10 分.

22. (1) 半圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = 1 + \sin \varphi \end{cases}$ (其中 φ 为参数, $\varphi \in (0, \pi)$), 3 分

直线 l 的直角坐标方程为 $y = x \tan \alpha - 2, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ 5 分

(2) 由题意可知, $A\left(\frac{2}{\tan \alpha}, 0\right), B(0, -2), D(\cos 2\alpha, 1 + \sin 2\alpha)$,

点 D 到直线 AB 的距离为:

$d = \frac{| \tan \alpha \cdot \cos 2\alpha - (1 + \sin 2\alpha) - 2 |}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = | \sin \alpha \cos 2\alpha - \cos \alpha \sin 2\alpha - 3 \cos \alpha | = \sin \alpha + 3 \cos \alpha$, 7 分

$|AB| = \sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{2}{\tan \alpha}\right)^2} = \frac{2}{\sin \alpha}$ 8 分

$\therefore$ 三角形 ABD 的面积 $S = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d = 1 + \frac{3}{\tan \alpha} = 1 + \sqrt{3}$ 9 分

$\therefore \tan \alpha = \sqrt{3}$. 又 $\because \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, $\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$ 10 分

23. (1) 由题意知, $0 < a + \frac{b}{2} < 1$. $\therefore ab = 2a \cdot \frac{b}{2} \leq 2 \left(a + \frac{b}{2} \right)^2 < 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ 不存在满足已知条件的 a, b , 使得 $ab = \frac{1}{2}$ 5 分

(2) 由柯西不等式, 得

$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = \left(1 \cdot \sqrt{a} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{b}{2}} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{c}{3}} \right)^2 \leq [1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2] \cdot \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} \right) = 6$ 8 分

$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{6}$. 等号成立的条件为 $\frac{\sqrt{a}}{1} = \frac{\sqrt{\frac{b}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{c}{3}}}{\sqrt{3}}$, 结合 $a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 1$, 可知 $a = \frac{1}{6}, b = \frac{2}{3}, c = \frac{3}{2}$.

$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ 的最大值为 $\sqrt{6}$ 10 分