

绝密★启用前

2021 年河南省普通高中毕业班高考适应性测试

理科数学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | y = \lg(x+3) + \lg(5-x)\}$, $B = \{x | x^2 + x - 6 < 0\}$, 则 $\complement_A B =$

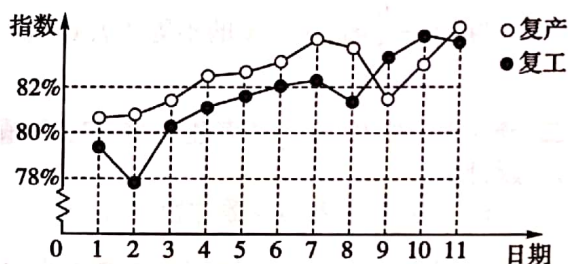
- A. $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$ B. $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
C. $(2, 5)$ D. $[2, 5)$

2. 已知复数 z 满足 $z(1+i) = |2+2i|$ (其中 i 为虚数单位), 则复数 z 的虚部为

- A. $\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}i$ D. $-\sqrt{2}i$

3. 我国新冠肺炎疫情防控进入常态化, 各地有序推进复工复产。如图是某地连续 11 天复工复产指数折线图, 下列说法正确的是

- A. 这 11 天复工指数和复产指数均逐日增加
B. 这 11 天复产指数的增量大于复工指数的增量
C. 第 3 天至第 11 天复工复产指数均超过 80%
D. 第 9 天至第 11 天复产指数的增量小于复工指数的增量



4. 若函数 $f(x) = \sin(x+\varphi) + 2\cos x$ 的最大值为 $\sqrt{7}$, 则常数 φ 的一个可能取值为

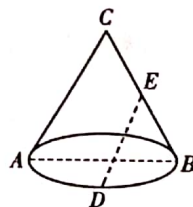
- A. $-\frac{\pi}{6}$ B. $-\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{6}$

5. 若实数 x, y, z 满足 $\log_2 x = \log_3 y = 4^z$, 则

- A. $x < y < z$ B. $y < z < x$ C. $z < x < y$ D. $y < x < z$

6. 如图, 圆锥的轴截面 ABC 为正三角形, 其面积为 $4\sqrt{3}$, D 为弧 AB 的中点, E 为母线 BC 的中点, 则异面直线 AC, DE 所成角的余弦值为

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$



7. 已知点 P 为抛物线 $x^2=4y$ 上任意一点, 点 A 是圆 $x^2+(y-6)^2=5$ 上任意一点, 则 $|PA|$ 的最小值为

- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $6-\sqrt{5}$

8. “中国剩余定理”又称“孙子定理”, 讲的是关于整除的问题. 现有这样一个整除问题: 将 1 到 2021 这 2021 个正整数中能被 3 除余 1 且被 5 除余 1 的数按从小到大的顺序排成一列, 构成数列 $\{a_n\}$, 则数列 $\{a_n\}$ 各项的和为

- A. 137835 B. 137836 C. 135809 D. 135810

9. 从正方体的 12 条棱中任选 3 条棱, 则这 3 条棱两两异面的概率为

- A. $\frac{2}{55}$ B. $\frac{3}{55}$ C. $\frac{4}{55}$ D. $\frac{6}{55}$

10. 若 $\triangle ABC$ 的外心为 O , 且 $\angle A=60^\circ$, $AB=2$, $AC=3$, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AC}$ 等于

- A. 5 B. 8 C. 10 D. 13

11. 若函数 $f(x)=x-1+ae^{1-x}$ (a 为常数) 存在两条均过原点的切线, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(0, \frac{1}{e})$ B. $(\frac{1}{e}, +\infty)$ C. $(0, e)$ D. $(e, +\infty)$

12. 棱长为 4 的正方体密闭容器内有一个半径为 1 的小球, 小球可在正方体容器内任意运动, 则其不能到达的空间的体积为

- A. $32-\frac{22}{3}\pi$ B. $48-12\pi$ C. $28-\frac{4}{3}\pi$ D. $20-\frac{13}{3}\pi$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $\begin{cases} x+y-2 \leq 0, \\ x-y-2 \leq 0, \\ 2x-y+2 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最大值为 _____.

14. 函数 $f(x)=\frac{\sin \pi x}{x^2-x+1}$ 的最大值为 _____.

15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>0, b>0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在双曲线上. 若

$\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形, 且 $\tan \angle PF_1F_2 = \frac{5}{12}$, 则双曲线的离心率为 _____.

16. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1, a_{n+1}=3a_n-2^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 记 $c_n=3^n-2 \times (-1)^n \lambda a_n$, 若对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, $c_{n+1} > c_n$ 恒成立, 则实数 λ 的取值范围为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答, 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

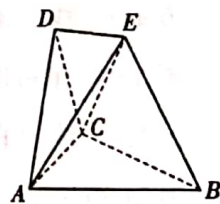
(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

在如图所示的空间几何体中, 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC , $\triangle ACD$ 与 $\triangle ACB$ 均是等边三角形, $AC=BE=4$, BE 和平面 ABC 所成的角为 60° , 且点 E 在平面 ABC 上的射影落在 $\angle ABC$ 的平分线上.

(1) 求证: $DE \perp$ 平面 ADC ;

(2) 求直线 BA 与平面 DAE 所成角的正弦值.



18. (12 分)

在① $\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B = a - b\cos C$, ② $b\sin C = c\cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$ 这两个条件中任选一个作为已知条件, 补充到下面的横线上并作答.

问题: $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 _____.

(1) 求 B ;

(2) 若 D 为 AC 的中点, $BD=2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

19. (12 分)

直播带货是扶贫助农的一种新模式, 这种模式是利用主流媒体的公信力, 聚合销售主播的力量助力打通农产品产销链条, 切实助力贫困地区农民脱贫增收. 某贫困地区有统计数据显示, 2020 年该地利用网络直播形式销售农产品的销售主播年龄等级分布如图 1 所示, 一周内使用直播销售的频率分布扇形图如图 2 所示. 若将销售主播按照年龄分为“年轻人”(20 岁~39 岁)和“非年轻人”(19 岁及以下或者 40 岁及以上)两类, 将一周内使用的次数为 6 次或 6 次以上的称为“经常使用直播销售用户”, 使用次数为 5 次或不足 5 次的称为“不常使用直播销售用户”, 则“经常使用直播销售用户”中有 $\frac{5}{6}$ 是“年轻人”.

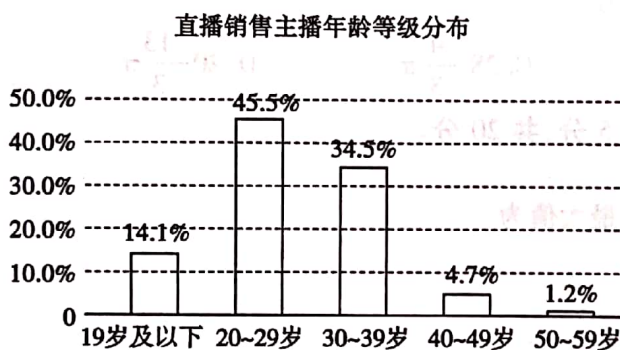


图 1

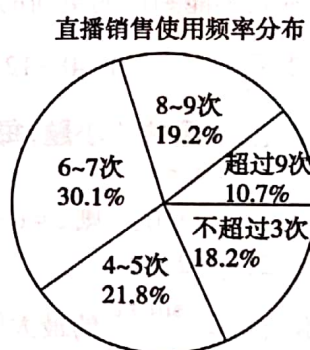


图 2

(1) 现对该地相关居民进行“经常使用网络直播销售与年龄关系”的调查, 采用随机抽样的方法, 抽取一个容量为 200 的样本, 请你根据图表中的数据, 完成 2×2 列联表, 并根据列联表判断是否有 85% 的把握认为经常使用网络直播销售与年龄有关?

使用直播销售情况与年龄列联表

	年轻人	非年轻人	合计
经常使用直播销售用户			
不常使用直播销售用户			
合计			

(2) 某投资公司在 2021 年年初准备将 1000 万元投资到“销售该地区农产品”的项目上, 现有两种销售方案供选择:

方案一: 线下销售. 根据市场调研, 利用传统的线下销售, 到年底可能获利 30%, 可能亏损 15%, 也可能不赔不赚, 且这三种情况发生的概率分别为 $\frac{7}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$;

方案二: 线上直播销售. 根据市场调研, 利用线上直播销售, 到年底可能获利 50%, 可能亏损 30%, 也可能不赔不赚, 且这三种情况发生的概率分别为 $\frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}$.



针对以上两种销售方案,请你从期望和方差的角度为投资公司选择一个合理的方案,并说明理由.

参考数据:独立性检验临界值表

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.050	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

其中, $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n=a+b+c+d$.

20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 直线 $l: y = kx + a$, 直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 与 y 轴交于点 P , O 为坐标原点.

- (1) 若 $k=1$, 且 N 为线段 MP 的中点, 求椭圆 C 的离心率;
- (2) 若椭圆长轴的一个端点为 $Q(2, 0)$, 直线 QM, QN 与 y 轴分别交于 A, B 两点, 当 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 1$ 时, 求椭圆 C 的方程.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = ax^2 - (6+a)x + 3\ln x$.

- (1) 当 $a \leq 0$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 当 $a \leq -\frac{9}{2}$ 时, 关于 x 的不等式 $f(x) + ax - b \geq 0$ 有解, 求 b 的最大值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = -2 + t \sin \alpha \end{cases} (t \in \mathbf{R}, t \text{ 为参数}, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}))$.

以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 半圆 C 的极坐标方程为 $\rho = 2 \sin \theta, \theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

- (1) 求半圆 C 的参数方程和直线 l 的直角坐标方程;
- (2) 直线 l 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 点 D 在半圆 C 上, 且直线 CD 的倾斜角是直线 l 的倾斜角的 2 倍, $\triangle ABD$ 的面积为 $1 + \sqrt{3}$, 求 α 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知 a, b, c 是正实数, 且满足 $a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 1$.

- (1) 是否存在满足已知条件的 a, b , 使得 $ab = \frac{1}{2}$, 试说明理由;
- (2) 求 $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ 的最大值.

