2021年广州市普通高中毕业班综合测试（二）

数学试题参考答案及评分标准

评分说明:

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题不给中间分．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	D	C	B	B	C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

9. BD　　10. ABD　　11. ACD　　12. B

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 3　　14. 3　　15. 3　　16. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．

17.（10 分）

（1）解法 1：　由 $S_{n+1}+2S_{n-1}=3S_n(n\geq 2)$，得 $S_{n+1}-S_n=2\left(S_n-S_{n-1}\right)$，　…………………1 分

得 $a_{n+1}=2a_n\left(n\geq 2\right)$，　…………………………2 分

即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2\left(n\geq 2\right)$，　…………………………3 分

因为 $\left\{a_n\right\}$ 是等比数列，所以 $q=2$．　…………………………4 分

因为 $a_1=1$，

所以 $a_n=2^{n-1}$．　…………………………5 分

解法 2: 由 $S_{n+1}+2S_{n-1}=3S_n(n\geq 2)$，得 $S_3+2S_1=3S_2$，　…………………………1 分

得 $a_1+a_2+a_3+2a_1=3\left(a_1+a_2\right)$，　…………………………2 分

整理得$a_3=2a_2$，即$\dfrac{a_3}{a_2}=2$. ……………………………3 分

因为$\left\{a_n\right\}$是等比数列，所以$q=\dfrac{a_3}{a_2}=2$. ……………………………4 分

因为$a_1=1$，

所以$a_n=2^{n-1}$. ……………………………5 分

解法 3：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，

若$q=1$，由于$a_1=1$，则$a_n=1$，$S_n=n$. ……………………………1 分

因而$S_{n+1}+2S_{n-1}=(n+1)+2(n-1)=3n-1\neq 3S_n(n\geq 2)$，与题设$S_{n+1}+2S_{n-1}=3S_n(n\geq 2)$矛盾，

所以$q\neq 1$. ……………………………2 分

由$S_{n+1}+2S_{n-1}=3S_n(n\geq 2)$，

得$\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}+2\times\dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}=3\times\dfrac{1-q^n}{1-q}$， ……………………………3 分

解得$q=2$. ……………………………4 分

因为$a_1=1$，所以$a_n=2^{n-1}$. ……………………………5 分

（2）解法 1：由（1）得$S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$. ……………………………6 分

则$S_{n+1}=2^{n+1}-1$. ……………………………7 分

所以$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{2^n}{\left(2^n-1\right)\left(2^{n+1}-1\right)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$. ……………………………8 分

所以$T_n=\left(\dfrac{1}{2-1}-\dfrac{1}{2^2-1}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)$ ……………9 分

$=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$. ……………………………10 分

解法 2：由（1）得$S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$. ……………………………6 分

因为$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{S_{n+1}-S_n}{S_nS_{n+1}}$ ……………………………7 分

$=\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}$. ………………………8 分

所以$T_n=\left(\dfrac{1}{S_1}-\dfrac{1}{S_2}\right)+\left(\dfrac{1}{S_2}-\dfrac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}\right)$ ………………………9 分

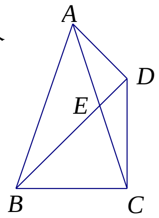
$=\dfrac{1}{S_1}-\dfrac{1}{S_{n+1}}$

$=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$. ………………………10 分

18. (12 分)

（1）解：因为△BCD是等腰直角三角形，$\angle BCD=90^\circ$，$BD=2$，

所以$BC=CD=\sqrt{2}$，$\angle CBD=\angle CDB=45^\circ$. …………1 分



因为$\angle ADB=90^\circ$，$\sin\angle ABD=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以$0^\circ<\angle ABD<90^\circ$，$\cos\angle ABD=\sqrt{1-\sin^2\angle ABD}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$， ………2 分

$AB=\dfrac{BD}{\cos\angle ABD}=\sqrt{5}$，$AD=AB\sin\angle ABD=1$. ………………………4 分

在△ACD中，$\angle ADC=135^\circ$，

由余弦定理得$AC=\sqrt{AD^2+CD^2-2\cdot AD\cdot CD\cdot\cos135^\circ}$

$=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\times1\times\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

$=\sqrt{5}$. ………………………5 分

由正弦定理得$\dfrac{AC}{\sin135^\circ}=\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}$，

得$\sin\angle ACD=\dfrac{1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ………………………6 分

（2）解法 1：在△ACD中，由正弦定理得$\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}$，

得$\sin\angle CAD=\dfrac{CD\cdot\sin\angle ACD}{AD}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ………………………7 分

由于$0^\circ<\angle CAD<90^\circ$，得$\cos\angle CAD=\sqrt{1-\sin^2\angle CAD}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. …………8 分

所以$\tan\angle CAD=\frac{\sin\angle CAD}{\cos\angle CAD}=\frac{1}{2}$. …………………………9 分

在 Rt△ADE 中，$DE=AD\cdot\tan\angle CAD=\frac{1}{2}$，

$S_{\Delta ADE}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DE=\frac{1}{4}$. …………………………10 分

在 Rt△ABD 中，$S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot BD=1$. …………………………11 分

所以△ABE 的面积为$S=S_{\Delta ABD}-S_{\Delta ADE}=\frac{3}{4}$. …………………………12 分

解法 2：由（1）知$AC=AB=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{2}$，

则$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot\sqrt{AB^2-\left(\frac{1}{2}BC\right)^2}=\frac{3}{2}$. …………………………7 分

由于$S_{\Delta ABE}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BE\cdot\sin\angle ABD=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\cdot BE\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{2}BE$， …………8 分

$S_{\Delta CBE}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot BE\cdot\sin\angle CBD=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\cdot BE\cdot\sin 45^\circ=\frac{1}{2}BE$， ……………9 分

所以$S_{\Delta ABE}=S_{\Delta CBE}$. …………………………10 分

因为$S_{\Delta ABE}+S_{\Delta CBE}=S_{\Delta ABC}$， …………………………11 分

所以△ABE 的面积为$S_{\Delta ABE}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}=\frac{3}{4}$. …………………………12 分

解法 3：由$\sin\angle ACD=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且$0^\circ<\angle ACD<90^\circ$，

得$\cos\angle ACD=\sqrt{1-\sin^2\angle ACD}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. …………………………7 分

在△CDE 中，$\angle CED=180^\circ-\angle ACD-\angle CDB=135^\circ-\angle ACD$，

则$\sin\angle CED=\sin\left(135^\circ-\angle ACD\right)$

$=\sin135^\circ\cos\angle ACD-\cos135^\circ\sin\angle ACD$ ………………8 分

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{10}}{10}$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$ ……………………………9 分

由正弦定理得 $\frac{DE}{\sin\angle ACD}=\frac{CD}{\sin\angle CED}$，

得 $DE=\frac{CD\cdot\sin\angle ACD}{\sin\angle CED}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{1}{2}$. ……………………………10 分

所以 $BE=BD-DE=\frac{3}{2}$. ……………………………11 分

所以△ ABE 的面积为 $S=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot AB\cdot\sin\angle ABD=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{3}{4}$.…12 分

解法 4：由 $\sin\angle ACD=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 $0^\circ<\angle ACD<90^\circ$，

得 $\cos\angle ACD=\sqrt{1-\sin^2\angle ACD}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. ……………………………7 分

因为 $\angle ACB=\angle BCD-\angle ACD=90^\circ-\angle ACD$，

所以 $\cos\angle ACB=\cos\left(90^\circ-\angle ACD\right)=\sin\angle ACD=\frac{\sqrt{10}}{10}$， …………………8 分

$\sin\angle ACB=\sin\left(90^\circ-\angle ACD\right)=\cos\angle ACD=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. …………………9 分

在△ BCE 中，$\angle BEC=180^\circ-45^\circ-\angle ACB=135^\circ-\angle ACB$，

则 $\sin\angle BEC=\sin\left(135^\circ-\angle ACB\right)$

$$=\sin135^\circ\cos\angle ACB-\cos135^\circ\sin\angle ACB$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{10}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$ ……………………………10 分

由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin\angle BEC}=\frac{BE}{\sin\angle ACB}$，

得 $BE=\dfrac{BC\cdot\sin\angle ACB}{\sin\angle BEC}=\dfrac{\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}}{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{3}{2}$. ……………………………11 分

所以△ ABE 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\cdot BE\cdot AB\cdot\sin\angle ABD=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{3}{4}$.…12 分

19.（12 分）

（1）解：由散点图中数据和附注中参考数据得 $\bar{t}=5$，$\sum\limits_{i=1}^{9}\left(t_i-\bar{t}\right)^2=60$，

$\bar{y}=\dfrac{54.2}{9}\approx 6.02$， ……………………………3 分

得 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{9}t_iy_i-9\bar{t}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{9}\left(t_i-\bar{t}\right)^2}=\dfrac{183.6-5\times 54.2}{60}=\dfrac{-87.4}{60}\approx -1.46$， ……………………………5 分

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=6.02-(-1.46)\times 5=13.32$. ……………………………6 分

所以 y 关于 t 的回归直线方程为 $\hat{y}=-1.46t+13.32$. ……………………………7 分

（2）解：由题意 $X\sim N(1.6,0.36)$，$P\left(X>\mu-2\sigma\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{0.9544}{2}=0.9772$，……9 分

所以 $\mu-2\sigma=1.6-2\times 0.6=0.4$ 时，满足题意. ……………………………11 分

所以该地区最低人均年纯收入标准大约为 0.4 万元. ……………………………12 分

20. (12 分)

（1）证明：记 $BC_1\cap B_1C=O$，连结 AO，

因为侧面 BB_1C_1C 是菱形， 所以 $B_1C\perp BC_1$，$BB_1=BC$. ……………………………1 分

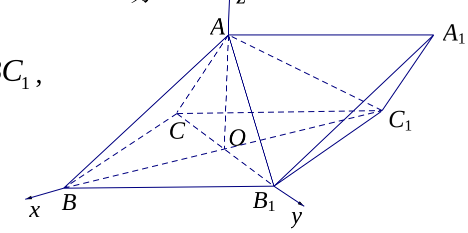
因为 $\angle ABB_1=\angle ABC$，$AB=AB$， 所以△ $ABB_1\cong$△ ABC. ……………………………2 分

所以 $AB_1=AC$. ……………………………3 分

因为 O 是 B_1C 的中点， 所以 $AO\perp B_1C$.……………………………4 分

因为 $AO\cap BC_1=O$，$AO\subset$ 平面 ABC_1，$BC_1\subset$ 平面 ABC_1，

所以 $B_1C\perp$ 平面 ABC_1. ……………………………5 分



（2）解法 1：

因为 $AB=AC_1$，O 为 BC_1 的中点，所以 $AO\perp BC_1$. ……………………………6 分

由（1）可知 $B_1C\perp AO$，因为 $BC_1\cap B_1C=O$，

所以 $AO\perp$ 面 BB_1C_1C.　　　　　　　　　　　　…………………………7 分

以 O 为原点建立如图的空间直角坐标系 $O-xyz$，设 $AO=t$，　…………………………8 分

因为 $BB_1=B_1C=2$，所以 $B_1O=1$，$BO=\sqrt{3}$.

则 $B\left(\sqrt{3},0,0\right)$，$B_1\left(0,1,0\right)$，$C\left(0,-1,0\right)$，$A\left(0,0,t\right)$，

$\overrightarrow{B_1A}=\left(0,-1,t\right)$，$\overrightarrow{B_1B}=\left(\sqrt{3},-1,0\right)$，$\overrightarrow{BA}=\left(-\sqrt{3},0,t\right)$，$\overrightarrow{CA}=\left(0,1,t\right)$

设平面 AB_1B 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，则有

$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{B_1A}=-y_1+tz_1=0$，$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{B_1B}=\sqrt{3}x_1-y_1=0$，

令 $y_1=\sqrt{3}$，得平面 AB_1B 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\left(1,\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{t}\right)$.　…………………………9 分

设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，则有

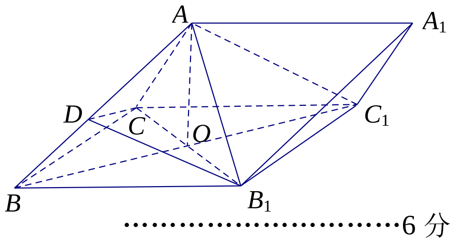
$\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BA}=-\sqrt{3}x_2+tz_2=0$，$\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CA}=y_2+tz_2=0$，

令 $x_2=\sqrt{3}$，则 $y_2=-3$，$z_2=\dfrac{3}{t}$.

则平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=\left(\sqrt{3},-3,\dfrac{3}{t}\right)$.　　　　…………………………10 分

由题意知 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\dfrac{3\sqrt{3}}{t^2}=0$，解得 $t=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.　　…………………………11 分

所以 $V_{C_1-ABB_1}=V_{A-BB_1C_1}=\dfrac{1}{3}\times AO\times S_{\Delta BB_1C_1}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　…………………………12 分



解法 2：作 $CD\perp AB$ 于 D，连接 B_1D，

由（1）知 $\triangle ABB_1\cong\triangle ABC$，

所以 $B_1D\perp AB$，$CD=B_1D$.　　　　　　　　　　…………………………6 分

所以 $\angle B_1DC$ 是二面角 B_1-AB-C 的平面角，依题意得 $\angle B_1DC=90^\circ$.　…………7 分

因为 $BB_1=B_1C=2$，所以 $CD=B_1D=\sqrt{2}$.

因为 $AB=AC_1$，O 为 BC_1 的中点，所以 $AO\perp BC_1$．　…………………………8 分

由（1）可知 $B_1C\perp AO$，因为 $BC_1\cap B_1C=O$，所以 $AO\perp$ 面 BB_1C_1C．…………9 分

设 $AO=x$，在 Rt△ AOB_1 中，$AB_1^{\ 2}=B_1O^2+AO^2=1+x^2$，　……………………10 分

在 Rt△ ADB_1 中，$AD=\sqrt{AB_1^{\ 2}-B_1D^2}=\sqrt{x^2-1}$，

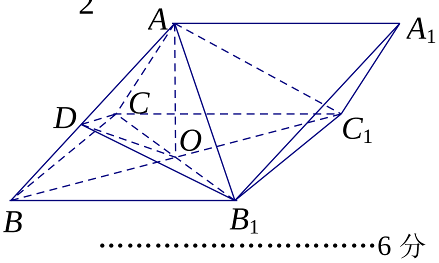
在 Rt△ AOB 中，$AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=\sqrt{x^2+3}$，

在 Rt△ BDB_1 中，$BD=\sqrt{BB_1^{\ 2}-B_1D^2}=\sqrt{2}$，

因为 $AB=BD+AD$，

则 $\sqrt{x^2+3}=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2}$，解得 $x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$．　…………………………11 分

所以 $V_{C_1-ABB_1}=V_{A-BB_1C_1}=\dfrac{1}{3}\times AO\times S_{\Delta BB_1C_1}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．　……………………12 分



解法 3：作 $CD\perp AB$ 于 D，连接 B_1D，DO，

由（1）知 △ $ABB_1\cong$△ ABC，

所以 $B_1D\perp AB$，$CD=B_1D$．　…………………………6 分

所以 $\angle B_1DC$ 是二面角 B_1-AB-C 的平面角，依题意得 $\angle B_1DC=90^\circ$．　…………7 分

又 $CD\cap B_1D=D$，则 $AB\perp$ 平面 CDB_1．

因为 $DO\subset$ 平面 CDB_1，所以 $DO\perp AB$．　…………………………8 分

因为 $BB_1=B_1C=2$，所以 $CD=B_1D=\sqrt{2}$，$DO=1$，$BO=\sqrt{3}$．

在 Rt△ BDB_1 中，$BD=\sqrt{BB_1^2-B_1D^2}=\sqrt{2}$．

因为 Rt△ AOB～Rt△ BOD，

所以 $\dfrac{AO}{BO}=\dfrac{DO}{BD}$，得 $AO=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$．　…………………………9 分

因为 $AB=AC_1$，O 为 BC_1 的中点，所以 $AO\perp BC_1$．　…………………………10 分

由（1）可知 $B_1C\perp AO$，因为 $BC_1\cap B_1C=O$，所以 $AO\perp$ 面 BB_1C_1C．　………11 分

所以$V_{C_1-ABB_1}=V_{A-BB_1C_1}=\frac{1}{3}\times AO\times S_{\Delta BB_1C_1}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ························12 分

21.（12 分）

（1）解：设$B\left(x_0,y_0\right)$是抛物线C上的任一点，则$x_0^2=2py_0$. ······························1 分

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{\left(x_0-0\right)^2+\left(y_0-p\right)^2}\\&=\sqrt{2py_0+y_0^2-2py_0+p^2}\\&=\sqrt{y_0^2+p^2}.\end{aligned}$$
······························2 分

因为$y_0\geq 0$，

所以当$y_0=0$时，$|AB|_{\min}=\sqrt{p^2}=p$. ······························3 分

依题意，得$p=2$.

所以C的方程为$x^2=4y$. ······························4 分

（2）解法 1：因为点F是C的焦点，所以$F\left(0,1\right)$. ······························5 分

根据题意，直线l_1的斜率k存在且$k\neq 0$，设$l_1:y=kx+1$，

由于$l_1\perp l_2$，则$l_2:y=-\frac{1}{k}x+1$.

设$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，$S\left(x',y'\right)$，

由$\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$消去$y$，得$x^2-4kx-4=0$，

$\Delta=\left(4k\right)^2-4\times\left(-4\right)=16\left(k^2+1\right)>0$，

则$x_1+x_2=4k$. ······························6 分

因为S是线段MN的中点，

所以$x'=\frac{x_1+x_2}{2}=2k$，$y'=kx'+1=2k^2+1$.

所以$S\left(2k,2k^2+1\right)$. ······························7 分

同理得$T\left(-\frac{2}{k},\frac{2}{k^2}+1\right)$. ······························8 分

则直线 ST 的斜率为 $k'=\dfrac{\left(2k^2+1\right)-\left(\dfrac{2}{k^2}+1\right)}{2k-\left(-\dfrac{2}{k}\right)}=\dfrac{k^2-1}{k}$. ……………………………9 分

则直线 ST 的方程为 $y-\left(2k^2+1\right)=\dfrac{k^2-1}{k}\left(x-2k\right)$，

得 $y=\dfrac{k^2-1}{k}x+3$. ……………………………10 分

所以直线 ST 恒过定点 $\left(0,3\right)$. ……………………………11 分

所以存在定圆 $H:x^2+\left(y-3\right)^2=r^2$($r$ 为常数，且 $r\neq 0$)，使得直线 ST 截圆 H 所得的线段长恒为定值 $2\left|r\right|$. ……………………………12 分

解法 2：因为点 F 是 C 的焦点，所以 $F\left(0,1\right)$. ……………………………5 分

根据题意，直线 l_1 的斜率 k 存在且 $k\neq 0$，设 $l_1:y=kx+1$，

由于 $l_1\perp l_2$，则 $l_2:y=-\dfrac{1}{k}x+1$.

设 $M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，$S\left(x',y'\right)$，

由 $\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-4kx-4=0$，

$\Delta=\left(4k\right)^2-4\times\left(-4\right)=16\left(k^2+1\right)>0$，

则 $x_1+x_2=4k$. ……………………………6 分

因为 S 是线段 MN 的中点，

所以 $x'=\dfrac{x_1+x_2}{2}=2k$，$y'=kx'+1=2k^2+1$.

所以 $S\left(2k,2k^2+1\right)$. ……………………………7 分

同理得 $T\left(-\dfrac{2}{k},\dfrac{2}{k^2}+1\right)$. ……………………………8 分

设点 $H\left(0,3\right)$，

由于 $k_{SH}=\dfrac{2k^2+1-3}{2k}=\dfrac{k^2-1}{k}$， $k_{TH}=\dfrac{\dfrac{2}{k^2}+1-3}{-\dfrac{2}{k}}=\dfrac{k^2-1}{k}$， ……………9 分

所以 $k_{SH}=k_{TH}$. ……………………………10 分

所以 S， T， H 三点共线.

所以直线 ST 恒过点 H. ……………………………11 分

所以存在定圆 $H: x^2+(y-3)^2=r^2(r$ 为常数，且 $r\neq 0)$，使得直线 ST 截圆 H 所得的线段长恒为定值 $2|r|$. ……………………………12 分

22. (12 分)

（1）解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$， $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+2a(x-1)=\dfrac{2ax^2+1-2a}{x+1}$.

……………………………1 分

① 若 $1-2a\geq 0$，即 $0<a\leq\dfrac{1}{2}$，则 $f'(x)\geq 0$ 对 $x\in(-1,+\infty)$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增； ……………………………2 分

② 若 $1-2a<0$，即 $a>\dfrac{1}{2}$，则方程 $2ax^2+1-2a=0$ 的两根为 $x=\pm\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}$；

当 $-1<x<-\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}$ 时， $f'(x)>0$；

当 $-\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}<x<\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}$ 时， $f'(x)<0$；

当 $x>\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}$ 时， $f'(x)>0$；

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(-1,-\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}},\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}\right)$ 上单调递减，

在 $\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}},+\infty\right)$ 上单调递增. ……………………………3 分

综上所述, 当 $0<a\leq\dfrac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>\frac{1}{2}$ 时， $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,-\sqrt{1-\frac{1}{2a}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\sqrt{1-\frac{1}{2a}},\sqrt{1-\frac{1}{2a}}\right)$ 上单调递减，

在 $\left(\sqrt{1-\frac{1}{2a}},+\infty\right)$ 上单调递增. …………………………4 分

（2）证明：当 $a=\frac{1}{2}$ 时， $f(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{2}\left(x-1\right)^2$，

由（1）知 $f(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，即对任意 $x\in\left(0,+\infty\right)$，有 $f(x)>f(0)=\frac{1}{2}$，

即 $2\ln(x+1)+(x-1)^2>1$，整理得 $2x-x^2<2\ln(x+1)$. …………………………5 分

令 $x=\frac{1}{k}(k=1,2,\cdots,n)$，则 $\frac{2k-1}{k^2}<2\ln\frac{1+k}{k}$. …………………………6 分

累加得 $1+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{3^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}<2\left(\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}\right)=2\ln(n+1).$

…………………………7 分

下面证明：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$， $\ln(n+1)<\frac{n}{\sqrt{n+1}}$.

记函数 $h(t)=2t\ln t-t^2+1(t>1)$，则 $h'(t)=2(\ln t-t+1)$，$\left[h'(t)\right]'=2\left(\frac{1}{t}-1\right)$，

当 $t>1$ 时，$\left[h'(t)\right]'<0$，故函数 $h'(t)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

所以 $h'(t)<h'(1)=0$. …………………………8 分

故函数 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(t)<h(1)=0$.

即对 $t>1$，有 $2t\ln t<t^2-1$， …………………………9 分

令 $t=\sqrt{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $2\sqrt{n+1}\cdot\ln\sqrt{n+1}<\left(\sqrt{n+1}\right)^2-1=n$. ………………………10 分

所以 $\ln(n+1)<\frac{n}{\sqrt{n+1}}$. ………………………11 分

所以 $1+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{3^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}<\frac{2n}{\sqrt{n+1}}$. …………………………12 分