秘密★启用前

2021年山西省高考考前适应性测试

理科数学参考答案详解及评分说明

评分说明：

1. 考生如按其他方法或步骤解答，正确的，同样给分；有错的，根据错误的性质，参照评分说明中相应的规定评分.

2. 计算题只有最后答案而无演算过程的，不给分；只写出一般公式但未能与试题所给的具体条件联系的，不给分.

A卷选择题答案

一、选择题

1. C 【解析】因为$x^2+x-12<0$，即$(x+4)(x-3)<0$，解得$-4<x<3$，所以$A=\{x|-4<x<3\}$. 所以$A\cap B=\{x|-4<x<0\}$.

2. A 【解析】由三角函数的定义得$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

3. D 【解析】由高斯函数的定义可知其值域为$\mathbf{Z}$，故A正确；$\because [0.5]=0,[-0.5]=-1$，$\therefore y=[x]$不是奇函数，故B正确；易知$(x+1)-[x+1]=x-[x]$，所以$y=x-[x]$是一个周期为1的周期函数，故C正确；当$0\leqslant x<1$时，$[x]=0$，所以$y=[x]$在R上不单调，故D错误.

4. C 【解析】根据题意，录取率为$\frac{600}{2000}\times 100\%=30\%$，故应录取成绩最高的30%的报名者.

根据频率直方图可知，80~100分占总体的比例可估计为20%，70~100分占总体的比例可估计为40%，
故录取分数线在70~80之间，

设录取分数线为x，则$\frac{80-x}{80-70}\times 0.2+0.15+0.05=0.3$，

解得$x=75$.

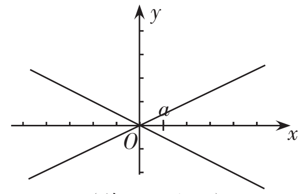
5. B 【解析】指数函数$y=\left(\frac{b}{a}\right)^x$图象位于$x$轴上方，据此可区分两函数图象. 二次函数$y=ax^2-bx=(ax-b)x$，有零点$\frac{b}{a}$，0. A，B选项中，指数函数$y=\left(\frac{b}{a}\right)^x$在R上单调递增，故$\frac{b}{a}>1$，故A错误、B正确. C，D选项中，指数函数$y=\left(\frac{b}{a}\right)^x$在R上单调递减，故$0<\frac{b}{a}<1$，故C，D错误.

6. D 【解析】由题意不妨设双曲线的渐近线在坐标系中的位置如图所示：

由$\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$可得$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$或$\tan\frac{\alpha}{2}=-2$（舍），当双曲线的焦点在$x$轴上时，

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{2};$$

当双曲线的焦点在y轴上时，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\frac{\alpha}{2}}}=\sqrt{5}$；



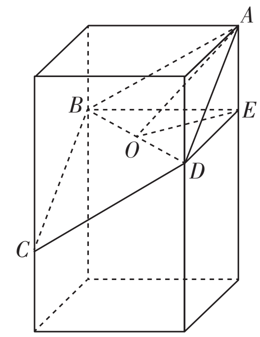
（第6题答图）

故选D.

7. A 【解析】因为$a,b,c\in\mathbf{R}_+$,且$ab+ac=4$,所以$\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{32}{a+b+c}=\dfrac{2(a+b+c)}{a(b+c)}+\dfrac{32}{a+b+c}=\dfrac{a+b+c}{2}+\dfrac{32}{a+b+c}\geqslant 8$.

由$\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{32}{a+b+c}$,得$a+b+c=8$,所以$b+c=8-a$,代入$ab+ac=4$,得$a=4\pm 2\sqrt{3}$. 又因为$a>4$,所以$a=4+2\sqrt{3}$,$b+c=4-2\sqrt{3}$. 此时"="成立,故所求最小值为8.

8. C 【解析】如图,过B作点A所在侧棱的垂线,垂足为E,连接DE,易知平面BDE∥长方体的底面,故二面角$A-BD-E$即为所求二面角.



(第8题答图)

由题意可知$\angle ADE=\angle ABE=30°$,$DE=BE=2$,$AE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,$AD=AB=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$,$BD=2\sqrt{2}$,

取BD中点O,则由$ED=EB$,$AD=AB$可知$EO\perp BD$,$AO\perp BD$,

故$\angle AOE$即为二面角$A-BD-E$的平面角,

于是$\tan\angle AOE=\dfrac{AE}{OE}=\dfrac{AE}{\frac{1}{2}BD}=\dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$即为所求.

9. A 【解析】第一次操作去掉的区间长度为$\dfrac{1}{4}$;

第二次操作去掉3个长度为$\dfrac{1}{4^2}$的区间,长度和为$\dfrac{1}{4^2}\times 3$;

第三次操作去掉3^2个长度为$\dfrac{1}{4^3}$的区间,长度和为$\dfrac{1}{4^3}\times 3^2$;

…,

第n次操作去掉3^{n-1}个长度为$\dfrac{1}{4^n}$的区间,长度和为$\dfrac{1}{4^n}\times 3^{n-1}$.

于是进行了n次操作后,所有去掉的区间长度之和为$S_n=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4^2}\times 3+\dfrac{1}{4^3}\times 3^2+\cdots+\dfrac{1}{4^n}\times 3^{n-1}=\dfrac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{3}{4}}=1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

由题意知:$1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\geqslant\dfrac{19}{20}$,化简得$n\geqslant\dfrac{1+\lg 2}{2\lg 2-\lg 3}\approx 10.4$,

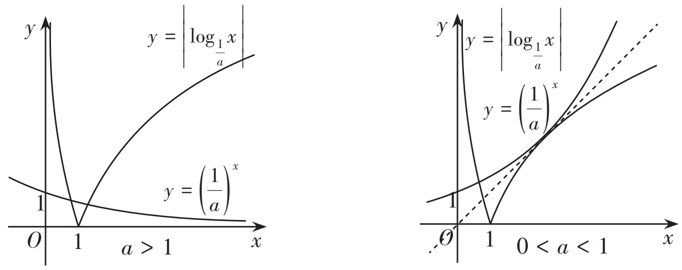
又n为整数,$\therefore n$的最小值为11.

10. D 【解析】设圆锥的底面半径为r,球的半径为R,则由已知得$\dfrac{\pi r^2}{4\pi R^2}=\dfrac{2}{9}$,则$r=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$

球心到底面的距离为$h=\sqrt{R^2-r^2}=\dfrac{1}{3}R$,所以圆锥的高为$\dfrac{4}{3}R$或$\dfrac{2}{3}R$,得体积比为$\dfrac{8}{27}$或$\dfrac{4}{27}$.

11. B 【解析】解法一:$f(x)=0$,得$\left|\log_a x\right|=\dfrac{1}{a^x}$,即$\left|\log_{\frac{1}{a}}x\right|=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$. 由题意知函数$y=\left|\log_{\frac{1}{a}}x\right|$图象与函数$y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$图象有两个交点.

当$a>1$时,$y=\left|\log_{\frac{1}{a}}x\right|$,$y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$草图如下,显然有两交点.



(第11题答图)

当$0<a<1$时，函数$y=\left|\log_{\frac{1}{a}}x\right|$图象与函数$y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$图象有两个交点时，注意到$y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$，$y=\log_{\frac{1}{a}}x$互为反函数，图象关于直线$y=x$对称，可知函数$y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$图象与直线$y=x$相切，设切点横坐标$x_0$，则$\begin{cases}\left(\frac{1}{a}\right)^{x_0}=x_0\\ \left(\frac{1}{a}\right)^{x_0}\ln\frac{1}{a}=1\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x_0=\mathrm{e},\\ a=\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}.\end{cases}$

综上，a的取值范围为$\left\{\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right\}\cup(1,+\infty)$，选B.

解法二：当$a>1$时，符合题意（见解法一）；

当$0<a<1$时，由函数图象可知$g(x)=\left|\log_{\frac{1}{a}}x\right|$与$h(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x$在$x\in(0,1)$内有唯一公共点，

于是它们在$(0,+\infty)$上有两个公共点的充要条件是在$x\in(1,+\infty)$上有唯一公共点，

即$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)=\log_{\frac{1}{a}}x$与$h(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x$在唯一一点$(m,n)$处有共同的切线，

由$\begin{cases}g(m)=n,\\ h(m)=n,\\ g'(m)=h'(m),\end{cases}$，得$\begin{cases}\log_{\frac{1}{a}}m=n,\cdots\cdots①\\ \left(\frac{1}{a}\right)^m=n,\cdots\cdots②\\ \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{\ln\frac{1}{a}}=\left(\frac{1}{a}\right)^m\ln\frac{1}{a},\cdots\cdots③\end{cases}$

①即$\left(\frac{1}{a}\right)^n=m$，……④

由②④知，若$m>n$，则$n=\left(\frac{1}{a}\right)^m>\left(\frac{1}{a}\right)^n=m$矛盾，

若$m<n$，则$n=\left(\frac{1}{a}\right)^m<\left(\frac{1}{a}\right)^n=m$矛盾，故只可能$m=n$，

于是$\left(\frac{1}{a}\right)^m=n=m$，……⑥，

⑥代入③，整理得$\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{\ln\frac{1}{a}}=m\ln\frac{1}{a}$，即$m\ln\frac{1}{a}=1$，$m=\frac{1}{\ln\frac{1}{a}}$，

代入⑥，得$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\ln\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\ln\frac{1}{a}}$，取对数，得$\frac{1}{\ln\frac{1}{a}}\cdot\ln\frac{1}{a}=-\ln\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1$，解得$a=\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}$.

12. D 【解析】对$a_n=\frac{a_{n-2}\cdot a_{n-1}}{2a_{n-2}-a_{n-1}}$的两边取倒数，得$\frac{1}{a_n}=\frac{2a_{n-2}-a_{n-1}}{a_{n-2}\cdot a_{n-1}}=\frac{2}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}$，

即$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}$，故数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$为等差数列，其首项$\frac{1}{a_1}=1$，公差为$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=\frac{4}{3}$，

故$\frac{1}{a_n}=1+\frac{4}{3}(n-1)=\frac{4n-1}{3}$，$a_n=\frac{3}{4n-1}$，于是$a_{2021}=\frac{3}{8083}$，所以$p+q=3+8083=8086$.

B卷选择题答案

1. C　2. A　3. C　4. B　5. B　6. D　7. D　8. C　9. D　10. C　11. B　12. A

A、B卷非选择题答案

二、填空题

13. 8

【解析】$\because\ z=2(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})$，$\therefore\ z^3=2^3(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})^3=8$.

14. $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

【解析】由已知等式观察，等式右边为$\dfrac{2^k-1}{k}$形式，其中k比等式左侧各组合数下标大1，照此规律，当$n\in\mathrm{N}^*$时，

$1+\frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1+\frac{1}{3}\mathrm{C}_n^2+\cdots+\frac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

15. ②④

【解析】对于①，易知当$n=11$时，$f(x)$展开式共有12项，故①错误；

对于②，$n=8$时，$f(x)$展开式第3项与第6项的二项式系数之比为$\dfrac{\mathrm{C}_8^2}{\mathrm{C}_8^5}=\dfrac{\mathrm{C}_8^2}{\mathrm{C}_8^3}=\dfrac{\frac{8\times7}{2\times1}}{\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}}=\dfrac{1}{2}$，故②正确；

对于③，$n=7$时，设$f(x)=\left(3x-\dfrac{2}{x}\right)^7=a_7x^7+a_6x^5+\cdots+a_0x^{-7}$，令$x=1$，得$f(1)=1=a_7+a_6+\cdots+a_0$，故③错误；

对于④，$n=5$时，$f(x)$展开式的通项$T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r(3x)^{5-r}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^r=\mathrm{C}_5^r(-1)^r3^{5-r}2^rx^{5-2r}$，其中$r\in\{0,1,2,3,4,5\}$，

显然当$r\in\{0,2,4\}$时，T_{r+1}系数为正数，$r\in\{1,3,5\}$时，T_{r+1}的系数为负数；

当$r=1$时，$T_2=-810x^3$，$r=3$时，$T_4=-720x^{-1}$，$r=5$时，$T_6=-32x^{-5}$，

故系数最小的项是$T_2=-810x^3$，④正确.

16. 6

【解析】设AB的方程为$x=my+\dfrac{p}{2}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则由$\begin{cases}y^2=2px\\x=my+\dfrac{p}{2}\end{cases}$得$y^2-2pmy-p^2=0$，$\therefore\ y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-p^2$，

$$\therefore\ k_{MA}+k_{MB}=\frac{y_1}{x_1+\frac{p}{2}}+\frac{y_2}{x_2+\frac{p}{2}}=\frac{y_1}{my_1+p}+\frac{y_2}{my_2+p}=\frac{y_1(my_2+p)+y_2(my_1+p)}{(my_1+p)(my_2+p)}$$

$$=\frac{2my_1y_2+p(y_1+y_2)}{(my_1+p)(my_2+p)}=\frac{2m(-p^2)+2mp^2}{(my_1+p)(my_2+p)}=0,$$

$\therefore\ \angle AMF=\angle BMF$，$\because\ \tan\angle AMB=\dfrac{2\tan\angle AMF}{1-\tan^2\angle AMF}=2\sqrt{2}$，又$\angle AMF$为锐角，$\therefore\ \tan\angle AMF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

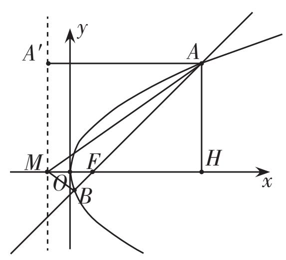
不妨设$AF>BF$，如图，作$AH\perp x$轴，垂足为H，过M作直线$l\perp x$轴，

$AA'\perp l$，垂足为A'，则

$\because\ \tan\angle AMF=\dfrac{AH}{MH}=\dfrac{AH}{AA'}=\dfrac{AH}{AF}=\sin\angle AFH$，

$\therefore\ \sin\angle AFH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\ \angle AFH=45^\circ$，$\therefore\ m=1$，

$\therefore\ |AB|=\sqrt{1+m^2}\left|y_1-y_2\right|=\sqrt{(1+m^2)\left[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right]}=4p=24$，故$p=6$.



（第16题答图）

三、解答题

17. 选用条件①的解析.

(1)因为$a\cos B+b\cos A=\dfrac{\sqrt{7}}{14}ac$,由正弦定理得$\sin A\cos B+\sin B\cos A=\dfrac{\sqrt{7}}{14}a\sin C$, …………………… 2分

即$\sin C=\dfrac{\sqrt{7}}{14}a\sin C$,又$\sin C\neq 0$,得$a=2\sqrt{7}$. …………………… 4分

$\because \cos C=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$,由余弦定理得$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$, …………………… 6分

将$b-c=2$代入解得$b=6,c=4$. …………………… 8分

(2)由余弦定理得$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$,又$0<A<\pi$,所以$A=\dfrac{\pi}{3}$. …………………… 10分

$\triangle ABC$的面积为$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 6\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$. …………………… 12分

选用条件②的解析.

(1)因为$2b\cos C=2a-\dfrac{\sqrt{7}}{7}c$,由正弦定理得

$2\sin B\cos C=2\sin A-\dfrac{\sqrt{7}}{7}\sin C$

$=2\sin(B+C)-\dfrac{\sqrt{7}}{7}\sin C$ …………………… 2分

$=2(\sin B\cos C+\cos B\sin C)-\dfrac{\sqrt{7}}{7}\sin C$

$\therefore\ 2\cos B\sin C-\dfrac{\sqrt{7}}{7}\sin C=0$,又$\because\ \sin C\neq 0$,$\therefore\ \cos B=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$,

$\therefore\ \sin B=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$, …………………… 4分

又$\because\ \cos C=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$,$\therefore\ \sin C=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. …………………… 6分

由正弦定理$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$,得$\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{3}{2}$,又$\because\ b-c=2$,$\therefore\ b=6,c=4$. …………………… 8分

(2)$\cos A=-\cos(B+C)=-(\cos B\cos C-\sin B\sin C)=\dfrac{1}{2}$,又$0<A<\pi$,所以$A=\dfrac{\pi}{3}$. …………………… 10分

$\triangle ABC$的面积为$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 6\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$. …………………… 12分

18. **解:**(1)设AB的中点为E,连接PE与DE,

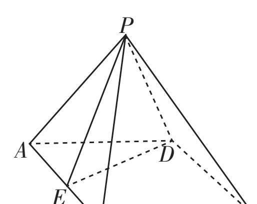
因为$\triangle PAB$是等腰三角形,$PA=PB$,所以$PE\perp AB$,又因为$AB\perp PD$,$PD\cap PE=P$,

所以$AB\perp$平面PED, …………………… 2分

所以$AB\perp DE$,

$\therefore\ BD=AD=\sqrt{2}$,$\because\ AB=2$,

所以$\triangle ABD$是等腰直角三角形,且$AD\perp BD$. …………………… 5分



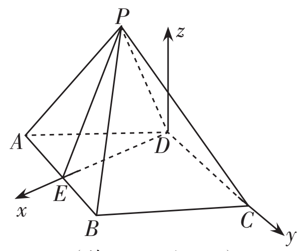
(第18题答图1)

(2)由(1)可知$AB\perp$平面PED,故$AB\perp PD$,平面$PED\perp$平面ABD,

又因为$PC=\sqrt{5}$,$CD\parallel AB$, $\therefore$ $CD\perp PD$, $\therefore$ $PD=\sqrt{PC^2-CD^2}=1$,易知$PE=DE=1$,

所以$\angle PDE=60^\circ$. ………………………………………………………… 7分

如图,以D为原点,DE,DC所在直线为x,y轴, 以$\overrightarrow{DE}$,$\overrightarrow{DC}$的方向分别为x轴,y轴的正方向,过D在$\triangle PDE$所在平面内作DE的垂线为z轴建立空间直角坐标系.



(第18题答图2)

则$D(0,0,0)$,$P(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$,$A(1,-1,0)$,$B(1,1,0)$. ………………………… 9分

得$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{DP}=(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$,$\overrightarrow{DA}=(1,-1,0)$,

设平面PAD的法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ x-y=0.\end{cases}$取$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$, ………………………… 11分

所以$\cos<\overrightarrow{DB},\boldsymbol{n}>=\frac{\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{DB}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{42}}{7}$,

因此直线BD与平面PAD所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{42}}{7}$. ………………………………………… 12分

19. **解:**记A_i="第i次验血结果呈阳性", $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$,$\overline{A_i}$表示A_i的对立事件.

(1)解法一:考虑6只小白鼠的排列顺序,若A_1发生,则需从2只患病小白鼠中选择1只排在第一位,其他位置可随意排,故符合条件的排列顺序共有$C_2^1A_5^5$种。 ………………………………………… 2分

若A_1与$X=3$同时发生,则2只患病小白鼠一定排在第一、第三两个位置,其他位置可随意排不患病的小白鼠,对应的排列顺序共有$A_2^2A_4^4$种。 ………………………………………… 4分

根据条件概率的定义及古典概型可知,$P(X=3|A_1)=\frac{P(A_1A_3)}{P(A_1)}=\frac{A_2^2A_4^4}{C_2^1A_5^5}=\frac{1}{5}$. ………………………… 6分

解法二:根据题意可知,在A_1发生的条件下,$X=3$发生的充要条件是:第二次验血的小白鼠不患病,且第三次验血的小白鼠患病,

故$P(X=3|A_1)=P(\overline{A_2}|A_1)P(A_3|A_1\overline{A_2})=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$. ………………………………………… 6分

(2)X的可能取值为2,3,4,5. 由题意可知:$P(X=2)=P(A_1A_2)=\frac{A_2^2A_4^4}{A_6^6}=\frac{1}{15}$, ………………………… 7分

$P(X=3)=P(\overline{A_1}A_2A_3)+P(A_1\overline{A_2}A_3)=2\times\frac{A_2^2A_4^4}{A_6^6}=\frac{2}{15}$, ………………………………………… 8分

$P(X=4)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4)+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4)+P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})=4\times\frac{A_2^2A_4^4}{A_6^6}=\frac{4}{15}$, ………… 9分

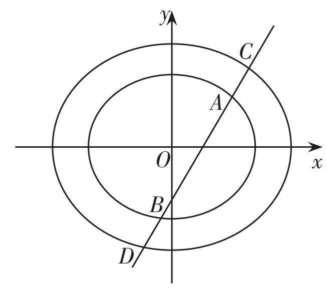
故$P(X=5)=1-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)=\frac{8}{15}$, ………………………………………… 10分

故X的分布列是

X	2	3	4	5
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$

$E(X)=2\times\frac{1}{15}+3\times\frac{2}{15}+4\times\frac{4}{15}+5\times\frac{8}{15}=\frac{64}{15}$. ………………………………………… 12分

20. **解:**(1)设椭圆C_2的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,焦距为$2c$,则由题意得



(第20题答图)

$$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{2b^2}{a}=3\sqrt{2},\\ c^2=a^2+b^2.\end{cases}$$ ………………………………………………… 2分

解得$a=2\sqrt{2}$,$b=\sqrt{6}$,因此C_2的方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{6}=1$. ……………………… 5分

(2)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,$D(x_4,y_4)$,

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=\lambda,\\ y=\sqrt{3}x+m,\end{cases}$ 得$15x^2+8\sqrt{3}mx+4m^2-12\lambda=0(\lambda=1或2)$,

$\because$ l与C_1,C_2相交,只需当$\lambda=1$时$\Delta>0$,$\therefore -\sqrt{15}<m<\sqrt{15}$. ………………………………… 7分

又 $\because$ $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{x_3+x_4}{2}=-\dfrac{4\sqrt{3}m}{15}$,$\therefore$ AB与CD的中点相同,则$|AC|=\dfrac{|CD|-|AB|}{2}$, ………………… 9分

$$\begin{aligned}\therefore |AC|&=\frac{1}{2}\times 2\times\left(\left|x_3-x_4\right|-\left|x_1-x_2\right|\right)\\ &=\frac{\sqrt{4\times 8\times 6(30-m^2)}}{30}-\frac{\sqrt{4\times 4\times 3(15-m^2)}}{15}\\ &=\frac{4\sqrt{3}\left(\sqrt{30-m^2}-\sqrt{15-m^2}\right)}{15}=\frac{4}{5}\end{aligned}$$ ………………………………………… 11分

解得$m=\pm\sqrt{3}$,此时$\Delta>0$,故$m=\pm\sqrt{3}$. ……………………………………………………………… 12分

21. **解:**$g(x)$定义域为$(0,+\infty)$,$g'(x)=\dfrac{1}{x}-k=\dfrac{1-kx}{x}$. ……………………………………………… 1分

当$k>0$时,令$g'(x)>0$,得$0<x<\dfrac{1}{k}$,令$g'(x)<0$,得$x>\dfrac{1}{k}$,

故$g(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{k}\right)$上单调递增,在$\left(\dfrac{1}{k},+\infty\right)$上单调递减. ………………………………………………… 2分

(1)当$k=1$时,$g(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,所以$g(x)_{\max}=g(1)=-1$. ……………… 3分

(2)(i)$\because$ $g(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{k}\right)$上单调递增,在$\left(\dfrac{1}{k},+\infty\right)$上单调递减,$\therefore$ $g(x)$至多有两个零点.

$\because$ $g\left(\dfrac{1}{k}\right)=\ln\dfrac{1}{k}-1>0$,$g(1)=-k<0$,$\therefore$ $g(x)$在$\left(1,\dfrac{1}{k}\right)$上有一个零点.

由(1)可证$\ln x-x\leqslant-1<0$,$\ln x<x$,从而$g\left(\dfrac{4}{k^2}\right)=\ln\dfrac{4}{k^2}-\dfrac{4}{k}=2\ln\dfrac{2}{k}-\dfrac{4}{k}<2\times\dfrac{2}{k}-\dfrac{4}{k}=0$,又 $\because$ $g\left(\dfrac{1}{k}\right)>0$,

$\therefore$ $g(x)$在$\left(\dfrac{1}{k},\dfrac{4}{k^2}\right)$上有一个零点.

综上,函数$g(x)$有两个零点.……………………………………………………………………………… 5分

(ii)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\ln x+1-kx-1=\ln x-kx=g(x)$.

由(i)知$g(x)$有两个零点,设为x_1,x_2,且$0<x_1<\frac{1}{k}<x_2$,且$\ln x_1=kx_1,\ln x_2=kx_2$.

又$\because g(x)$在$\left(0,\frac{1}{k}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$上单调递减.

$\therefore$当$0<x<x_1$,或$x>x_2$时,$g(x)<0$;当$x_1<x<x_2$时,$g(x)>0$.

$\therefore f(x)$在$\left(0,x_1\right)$上单调递减,在$\left(x_1,x_2\right)$上单调递增,在$\left(x_2,+\infty\right)$上单调递减,

故x_1,x_2为$f(x)$的两个极值点. ………………………………………………………………………… 7分

$\frac{f\left(x_1\right)}{x_1}=\ln x_1-\frac{1}{2}kx_1-1=\ln x_1-\frac{1}{2}\ln x_1-1=\frac{1}{2}\ln x_1-1$,同理$\frac{f\left(x_2\right)}{x_2}=\frac{1}{2}\ln x_2-1$.

欲证$\frac{f\left(x_1\right)}{x_1}+\frac{f\left(x_2\right)}{x_2}=\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}-2>-1$,即证$\ln x_1+\ln x_2>2$. ………………………………………… 8分

$\because \ln x_1=kx_1,\ln x_2=kx_2$, $\therefore \begin{cases}\ln x_2+\ln x_1=k\left(x_2+x_1\right),\\ \ln x_2-\ln x_1=k\left(x_2-x_1\right),\end{cases}$

$\therefore \frac{\ln x_2+\ln x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=\frac{x_2+x_1}{x_2-x_1}$,$\ln x_2+\ln x_1=\frac{x_2+x_1}{x_2-x_1}\left(\ln x_2-\ln x_1\right)=\frac{\frac{x_2}{x_1}+1}{\frac{x_2}{x_1}-1}\ln\frac{x_2}{x_1}$,

令$t=\frac{x_2}{x_1}>1$,即证$\frac{t+1}{t-1}\ln t>2$,即证$\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}>0$. ……………………………………… 10分

记$h(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$,$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$,$\therefore h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增,故$h(t)>h(1)=0$,

命题得证.…… 12分

选考题

22. **解:**(1)由$\rho^2=x^2+y^2$, $\rho\sin\theta=y$,

又$\rho^2=\frac{4}{3-\cos 2\theta}=\frac{4}{2+2\sin^2\theta}$,即$2\rho^2+2\rho^2\sin^2\theta=4$,

得$2x^2+4y^2=4$,即C的直角坐标方程为:$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………………… 4分

(2)将$\begin{cases}x=-\frac{4}{3}+t\cos\alpha\\ y=-\frac{7}{3}+t\sin\alpha\end{cases}$代入$C$:$\frac{x^2}{2}+y^2=1$有$\left(-\frac{4}{3}+t\cos\alpha\right)^2+2\left(-\frac{7}{3}+t\sin\alpha\right)^2=2$,

化简得$\left(3\cos^2\alpha+6\sin^2\alpha\right)t^2-4(2\cos\alpha+7\sin\alpha)t+32=0$,

设A,B两点对应的参数分别为t_1,t_2,则

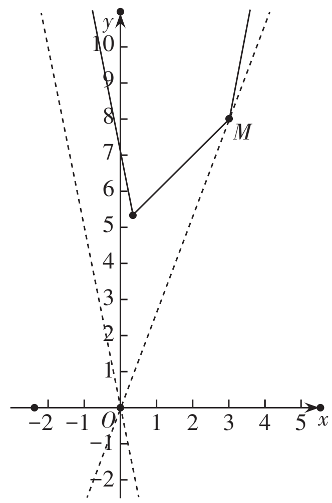
$t_1+t_2=\frac{4(2\cos\alpha+7\sin\alpha)}{3\cos^2\alpha+6\sin^2\alpha}$, $t_1t_2=\frac{32}{3\cos^2\alpha+6\sin^2\alpha}$. ………………………………………………… 6分

由$\overline{PA}=2\overline{PB}$,得$t_1=2t_2$, $\frac{(t_1+t_2)^2}{t_1t_2}=\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}+2$, ………………………………………………………… 8分

因此$\frac{(2\cos\alpha+7\sin\alpha)^2}{6\cos^2\alpha+12\sin^2\alpha}=\frac{9}{2}$即$5\tan^2\alpha-28\tan\alpha+23=0$,

解得$\tan\alpha=\frac{23}{5}$或1,经检验此时$\Delta>0$,故直线l的方程为$x-y-1=0$或$69x-15y+57=0$. ………… 10分

23. **解**:(1) $f(x)=|3x-1|+2|x-3|=\begin{cases}5x-7, x\geqslant 3,\\ x+5, \frac{1}{3}\leqslant x<3,\\ -5x+7, x<\frac{1}{3}.\end{cases}$ ………………… 2分



(第23题答图)

当 $x\geqslant 3$ 时,函数 $f(x)$ 单调递增,并且 $f(x)\geqslant 8$;

当 $\frac{1}{3}\leqslant x<3$ 时,函数 $f(x)$ 单调递增,并且 $f(x)\geqslant\frac{16}{3}$;

当 $x<\frac{1}{3}$ 时,函数 $f(x)$ 单调递减,并且 $f(x)>\frac{16}{3}$.

综上当 $x>\frac{1}{3}$ 时,函数 $f(x)$ 单调递增,

当 $x<\frac{1}{3}$ 时,函数 $f(x)$ 单调递减.且 $f(x)\geqslant\frac{16}{3}$. ………………………… 4分

要使关于 x 的方程 $|3x-1|+2|x-3|=a$ 有两个不同的根,则 a 的取值范围 $\{a|a>\frac{16}{3}\}$. ………………………………………………………………… 5分

(2)因为 $f(3)=8$,记点 $M(3,8)$,坐标原点为 $O(0,0)$,

则直线 OM 的斜率为 $k=\frac{8}{3}$. ………………………………………………………………………… 7分

当直线 $y=bx$ 的斜率 $b<-5$,或 $b\geqslant\frac{8}{3}$ 时,该直线与函数 $f(x)=|3x-1|+2|x-3|$ 的图象相交. …………… 9分

因为不等式 $f(x)\leqslant bx$ 的解集非空,所以 b 的取值范围是 $\{b|b<-5$,或 $b\geqslant\frac{8}{3}\}$. ………………………… 10分