专题九　立体几何与空间向量

一、单项选择

1.（聊城一模 2）阿基米德是古希腊伟大的数学家、物理学家、天文学家，是静态力学和流体静力学的奠基人，和高斯、牛顿并列为世界三大数学家，他在不知道球体积公式的情况下得出了圆柱容球定理，即圆柱内切球(与圆柱的两底面及侧面都相切的球)的体积等于圆柱体积的三分之二．那么，圆柱内切球的表面积与该圆柱表面积的比为

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{3}{4}$

2.（潍坊一模 4）在空间中，下列命题是真命题的是

A．经过三个点有且只有一个平面

B．平行于同一平面的两直线相互平行

C．如果两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角相等

D．如果两个相交平面垂直于同一个平面，那么它们的交线也垂直于这个平面

3.（泰安一模 7）设三棱柱的侧棱垂直于底面，所有棱的长都为 1，顶点都在一个球面上，则该球的表面积为（　　）

A．5π　　B．π　　C．$\dfrac{11}{3}$π　　D．$\dfrac{7}{3}$π

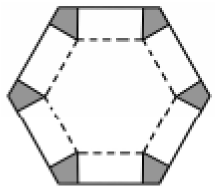
4.（济南一模 7）已知菱形 ABCD,AB=BD=2,将 ΔABD 沿 BD 折起，使二面角 A-BD-C 的大小为 60°,则三棱锥 A-BCD 的体积为

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　D.$2\sqrt{2}$

5.（日照一模 8）已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱长为 2，AB⊥BC，AB=BC=2. 过 AB，BB_1的中点 E，F 作平面 α 与平面 AA_1C_1C 垂直，则所得截面周长为

A. $2\sqrt{2}+\sqrt{6}$　　B. $\sqrt{2}+2\sqrt{6}$　　C. $3\sqrt{2}+\sqrt{6}$　　D. $3\sqrt{2}+2\sqrt{6}$

6.（潍坊一模 8）某中学开展劳动实习，学习加工制作食品包装盒．现有一张边长为 6 的正六边形硬纸片，如图所示，裁掉阴影部分，然后按虚线处折成高为$\sqrt{3}$的正六棱柱无盖包装盒，则此包装盒的体积为



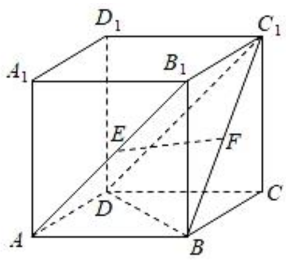
第 8 题

A．144　　B．72

C．36　　D．24

二、多项选择

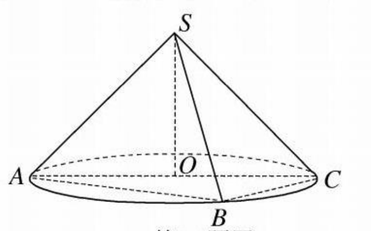
7.（泰安一模 10）如图所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，若 $AB=BC$，E，F 分别是 AB_1，BC_1 的中点，则下列结论中成立的是（　　）



A．EF 与 BB_1 垂直　　B．EF⊥平面 BDD_1B_1

C．EF 与 C_1D 所成的角为 45°　　D．EF∥平面 $A_1B_1C_1D_1$

8.（济宁一模 11）如图，AC 为圆锥 SO 底面圆 O 的直径，点 B 是圆 O 上异于 A， C 的动点，SO=OC=2，则下列结论正确的是



第11题图

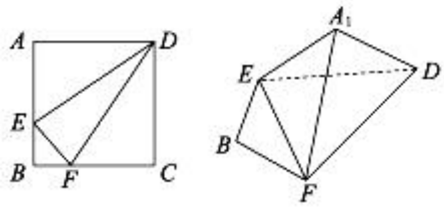
A. 圆锥 SO 的侧面积为$8\sqrt{2}\pi$

B. 三棱锥 S-ABC 体积的最大值为$\frac{8}{3}$

C. ∠SAB 的取值范围是$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$

D. 若 AB=BC，E 为线段 AB 上的动点，则 SE+CE 的最小值为$2(\sqrt{3}+1)$

9.（德州一模 12）如图，在边长为 4 的正方形 *ABCD* 中，点 *E*、*F* 分别在边 *AB*、*BC* 上（不含端点）且 *BE*＝*BF*，将△*AED*，△*DCF* 分别沿 *DE*，*DF* 折起，使 *A*、*C* 两点重合于点 A_1，则下列结论正确的有（　　）



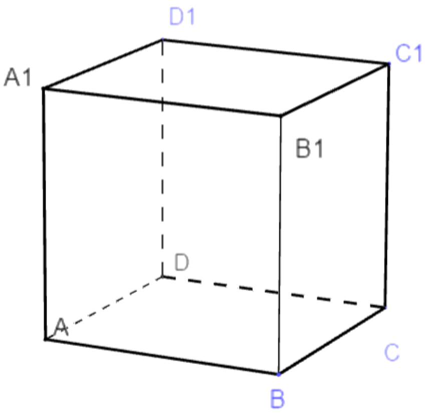
A．$A_1D\perp EF$

B．当 $BE=BF=\frac{1}{2}BC$ 时，三棱锥 A_1-DEF 的外接球体积为$\sqrt{6}\pi$

C．当 $BE=BF=\frac{1}{4}BC$ 时，三棱锥 A_1-DEF 的体积为$\frac{2\sqrt{17}}{3}$

D．当 $BE=BF=\frac{1}{4}BC$ 时，点 A_1 到平面 *DEF* 的距离为$\frac{4\sqrt{17}}{7}$

10.（日照一模 12）已知正方体 $ABC-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，M 为 DD1 的中点，N 为 ABCD 所在平面上一动点，则下列命题正确的是



A. 若 MN 与平面 ABCD 所成的角为$\frac{\pi}{4}$，则点 N 的轨迹为圆

B. 若 MN=4，则 MN 的中点 P 的轨迹所围成图形的面积为 2π

C. 若点 N 到直线 BB_1 与直线 DC 的距离相等，则点 N 的轨迹为抛物线

D. 若 D_1N 与 AB 所成的角为$\frac{\pi}{3}$，则点 N 的轨迹为双曲线

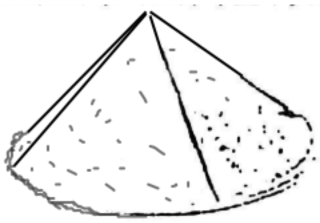
11.（青岛一模 12）在南方不少地区，经常看到人们头收一种用木片、竹篾或苇蒿等材料制作的斗笠，用来遮阳或避雨，随着旅游和文化交流活动的开展，斗笠也逐渐成为一种时尚旅游产品，有一种外形为圆锥形的斗笠，称为“灯罩斗笠”，根据人的体型、高矮等制作成大小不一的现号供人选择使用，不同型号的斗笠大小经常用帽坡长(母线长)和帽底宽(底面圆直径长)两个指标进行衡.现有一个“灯罩斗笠”，帽坡长 20 厘米，帽底宽 $20\sqrt{3}$ 厘米，关于此斗笠，下而说法正确的是（　　）

A.斗笠轴截而(过顶点和底而中心的截面图形)的顶角为 120°

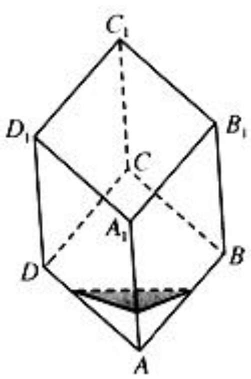
B,过斗笠顶点和斗笠侧面上任意两母线的截面三角形的最大面积为 $100\sqrt{3}$ 平方厘米

C.若此斗笠顶点和底面圆上所有点都在同一个球上，则该球的表而积为 1600π 平方厘米

D.此斗笠放在平面上，可以盖住的球(保持斗笠不变形)的最大半径为 $20\sqrt{3}$-30 厘米



12.（菏泽一模 12）透明塑料制成的正方体密闭容器 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 8，注入体积为 x（$0<x<8$）的液体．如图，将容器下底面的顶点 A 置于地面上，再将容器倾斜．随着倾斜度的不同，则下列说法正确的是（　　）



A．液面始终与地面平行

B．$x=4$ 时，液面始终呈平行四边形

C．当 $x\in$（0，1）时，有液体的部分可呈正三棱锥

D．当液面与正方体的对角线 AC_1 垂直时，液面面积最大值为 $3\sqrt{3}$

13.（滨州一模 12）若四面体各棱的长是 1 或 2，且该四面体的棱长不全相等，则其体积的值可能为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{11}}{6}$　　B. $\dfrac{\sqrt{14}}{12}$　　C. $\dfrac{\sqrt{11}}{12}$　　D. $\sqrt{2}$

14.（淄博一模 12）四棱锥 S-ABCD 中，侧面 SBC 为等边三角形，底面 ABCD 为矩形，BC=2,AB=a，点 F 是校 AD 的中点，顶点 S 在底而 ABCD 的射影为 H，则下列结论正确的是（　）

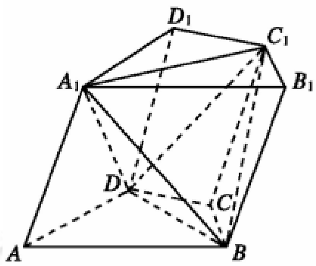
棱 SC 上存在点 P 使得 PD//面 BSF

B. 当 H 落在 AD 上时，a 的取值范围是(0, $\sqrt{3}$]

C. 当 H 落在 AD 上时，四棱锥 s-ABCD 的体积最大值是 2

D. 存在 a 的值使得点 B 到而 SFC 的距离为$\sqrt{3}$

15.（聊城一模 12）如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$A_1C_1=\sqrt{3},BD=1$，直线 A_1C_1 与 BD 所成的角为60°，$AA_1=2\sqrt{2}$，三棱锥 A_1-BC_1D 的体积为$\frac{1}{2}$，则



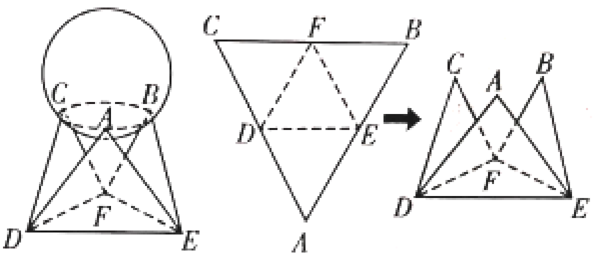
A．四棱柱 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$的底面积为$\frac{3}{4}$

B．四棱柱 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$的体积为$\frac{3}{2}$

C．四棱柱 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$的侧棱与底面所成的角为45°

D．三棱锥 A_1-ABD 的体积为$\frac{1}{2}$

16.（2021•临沂一模 12）为弘扬中华民族优秀传统文化，某学校组织了《诵经典，获新知》的演讲比赛，本次比赛的冠军奖杯由一个铜球和一个托盘组成，如图①，已知球的体积为$\frac{4\pi}{3}$，托盘由边长为 4 的正三角形铜片沿各边中点的连线垂直向上折叠而成，如图②．则下列结论正确的是（　　）



图①　　图②

A．经过三个顶点 A，B，C 的球的截面圆的面积为$\frac{\pi}{4}$

B．异面直线 AD 与 CF 所成的角的余弦值为$\frac{5}{8}$

C．直线 AD 与平面 DEF 所成的角为$\frac{\pi}{3}$

D．球离球托底面 DEF 的最小距离为$\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}-1$

三、填空

17.（2021•淄博一模 13）已知某圆锥底面圆的半径 $r=1$，侧面展开图是一个半圆，则此圆锥的体积为_____.

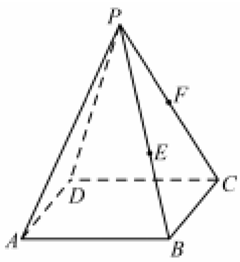
18.（德州一模 15）已知三棱锥 P - ABC 中，AP、AB、AC 三条棱两两垂直，且长度均为 $2\sqrt{3}$，以顶点 P 为

球心，4 为半径作一个球，则该球面被三棱锥四个表面截得的所有弧长之和为_______.

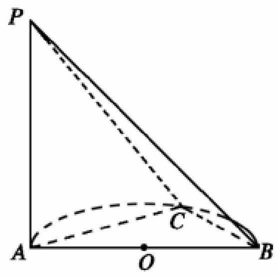
19.（烟台一模 16）已知正三棱锥 P-ABC 的底面边长为 2，侧棱长为$\sqrt{13}$，其内切球与两侧面 PAB，PBC 分别切于点 M，N，则 MN 的长度为_______.

20.（济宁一模 16）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AB=3，$AD=AA_1=4$，E，F，G 分别是棱 AB，BC，CC_1 的中点，P 是底面 ABCD 内一动点，若直线 D_1P 与平面 EFG 平行，当三角形 BB_1P 的面积最小时，三棱锥 $A-BB_1P$ 的外接球的体积是___________.

21.（济南一模 16）在通用技术课上，老师给同学们提供了一个如图所示的木质正四棱锥模型 P-ABCD,并要求同学们将该四棱锥切割成三个小四棱锥。某小组经讨论后给出如下方案：第一步，过点 A 作一个平面分别交 PB,PC,PD 于点 E,F,G,得到四棱锥 P-AEFG;第二步，将剩下的几何体沿平面 ACF 切开，得到另外两个小四棱锥。在实施第一步的过程中，为方便切割，需先在模型表面画出截面四边形 AEFG,若 $\frac{PE}{PB}=\frac{3}{5},\frac{PF}{PC}=\frac{1}{2}$，则 $\frac{PG}{PD}$ 的值为_________.



22.（聊城一模 16）如图，AB 是半圆 O 的直径，点 C 在半圆上运动(不与 A，B 重合)，$PA\perp$平面 ABC，若 AB=2，二面角 A—BC—P 等于 60°，则三棱锥 P—ABC 体积的最大值为________.



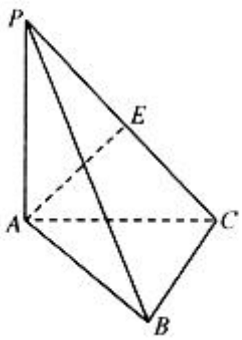
23.（滨州一模 16）现有一半径为 R 的圆形纸片，从该圆形纸片上裁下一个以圆心为中心，以 R 为半径的扇形纸片，并将扇形纸片围成一个圆锥的侧面，则该圆锥的体积的最大值是____；此时，扇形的圆心角为____.

四、解答

24.（菏泽一模 19）如图，三棱锥 $P-ABC$ 中，侧棱 $PA\perp$底面 ABC，C 点在以 AB 为直径的圆上.

（1）若 $PA=AC$，且 E 为 PC 的中点，证明：$AE\perp PB$；

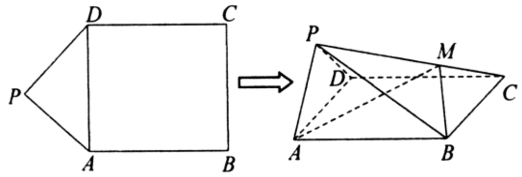
（2）若 $PA=AC=BC$，求二面角 $C-BP-A$ 的大小.



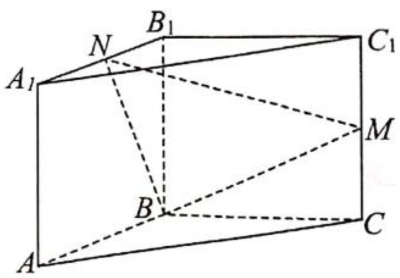
25.（烟台一模 19） 如图，四边形 ABCD 是边长为 2 的正方形，AP=PD，将三角形 PAD 沿 AD 折起使平面 PAD⊥平面 ABCD.

（1）若 M 为 PC 上一点，且满足 BM⊥PD，求证：PD⊥AM；

（2）若二面角 B-PC-D 的余弦值为$-\frac{\sqrt{10}}{5}$，求 AP 的长.



26.（2021•淄博一模 19） 已知在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=BB_1=4$，$\angle ABC=120^0$，侧棱与底面垂直，点 M,N 分别是棱 CC_1, A_1B_1 的中点.



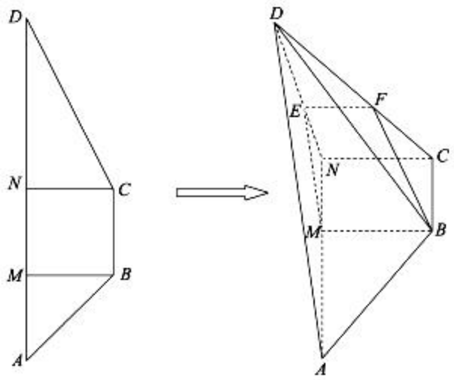
(1)求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的表面积:

(2)设平面 ABC 截三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球面所得小圆的圆心为 O，求直线 OB_1 与平面 BMN 所成角的正弦值，

27.（德州一模 20）如图，四边形 $ABCD$ 为梯形，$AD/\!/BC$，$BM\perp AD$ 于 M，$CN\perp AD$ 于 N，$\angle A=45°$，$AD=4BC=4$，$AB=\sqrt{2}$，现沿 CN 将△CDN 折起使△ADN 为正三角形，且平面 $ADN\perp$ 平面 $ABCN$，过 BM 的平面与线段 DN、DC 分别交于 E、F.

（1）求证：$EF\perp DA$；

（2）在棱 DN 上（不含端点）是否存在点 E，使得直线 DB 与平面 $BMEF$ 所成角的正弦值为$\frac{3}{4}$，若存在，请确定 E 点的位置；若不存在，说明理由.



28.（滨州一模 19）如图 1 所示，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形．过点 A 的平面与棱 BB_1，CC_1，DD_1 分别相交于 E，F，G 三点，且 $CF=3$，$DG=2$.

（1）求 BE 的长；

（2）若平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是侧棱长为 6 的直四棱柱（如图 2），求平面 $ABCD$ 与平面 AED_1 所成锐二面角的余弦值.

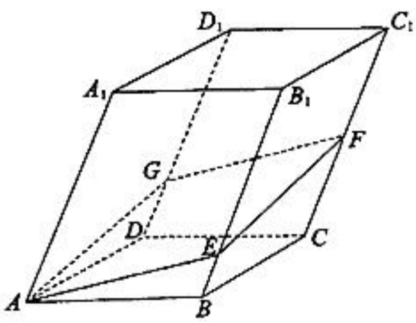


图1

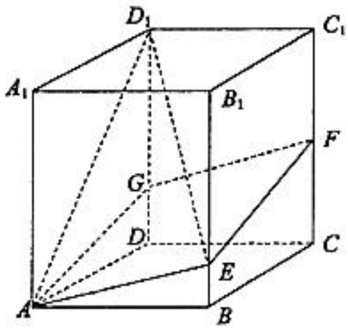
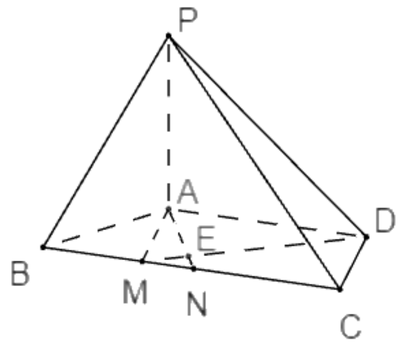


图2

29.（青岛一模 19）在四棱锥 P-ABCD 中，PA⊥平面 ABCD,AD∥BC, $BC \perp CD, PA = AD = 2$,CD=1, BC=3,点 M,N 在线段 BC 上,BM=2MN=1, $AN \cap MD = E$,Q 为线段 PB 上的一点。



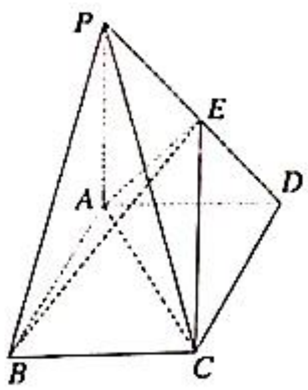
（1）求证：$MD \perp 平面PAN$；

（2）若平面 MQA 与平面 PAN 所成锐角的余弦值为$\frac{4}{5}$，求直线 MQ 与平面 ABCD 所成角的正弦值。

30.（泰安一模 19）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$AB=2AD=2$，PA⊥平面 $ABCD$，E 为 PD 中点.

（1）若 $PA=1$，求证：AE⊥平面 PCD；

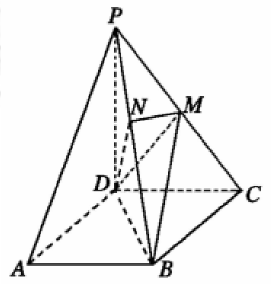
（2）当直线 PC 与平面 ACE 所成角最大时，求三棱锥 $E-ABC$ 的体积.



31.（聊城一模 19）如图，在四棱锥 P—ABCD 中，底面 ABCD 是矩形，PD⊥平面 ABCD，M 是棱 PC 的中点，点 N 在棱 PB 上，且 MN⊥PB．

(1)求证：PA∥平面 BMD；

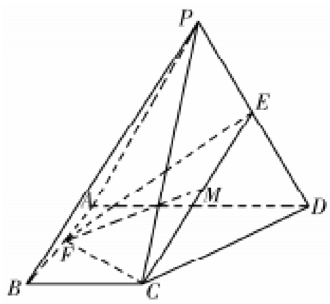
(2)若 AD=2CD，直线 PC 与平面 ABCD 所成的角为 60°，求平面 DMN 与平面 PAD 所成的锐二面角的余弦值．



32.（潍坊一模 19）如图，在四棱锥 P—ABCD 中，侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 ABCD，AD∥BC，AB⊥AD，AB＝2BC＝4，E 是棱 PD 上的动点（除端点外），F，M 分别为 AB，CE 的中点．

（1）求证：FM∥平面 PAD；

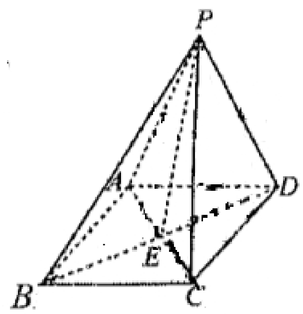
（2）若直线 EF 与平面 PAD 所成的最大角为 30°，求平面 CEF 与平面 PAD 所成锐二面角的余弦值．



33.（**日照一模 19**）菱形 ABCD 的对角线 AC 与 BD 交于点 E，BD=8，AC=6，将△ACD 沿 AC 折到△PAC 的位置，使得 PD=4,如图所示。

(1)证明：PB⊥AC

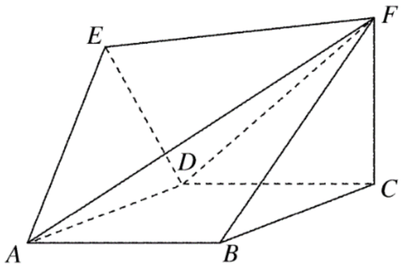
(2)求平面 PAB 与平面 PCD 所成锐二面角的余弦值



34.（济宁一模 20）如图所示多面体 $ABCDEF$ 中，平面 $ADE\perp$平面 $ABCD$，$CF\perp$平面 $ABCD$，$\triangle ADE$ 是正三角形，四边形 $ABCD$ 是菱形，$AB=2$，$CF=\sqrt{3}$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$.

（1）求证：$EF\parallel$平面 $ABCD$；

（2）求二面角 $E-AF-C$ 的正弦值.

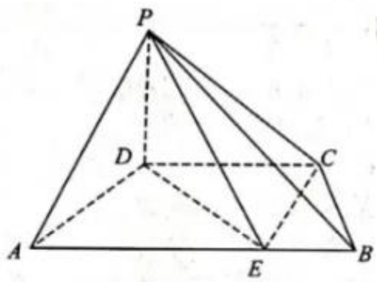


第20题图

35.（2021•临沂一模 20）如图，四棱锥 P-ABCD 中，四边形 ABCD 是等腰梯形，AB//CD,PD⊥AD，2PD=2AD=2CD=AB=PB.

(1)证明：平面 PAD⊥平面 ABCD;

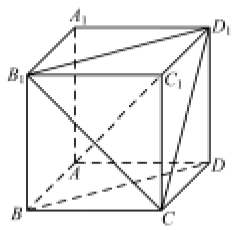
(2)过 PD 的平面交 AB 于点 E,若平面 PDE 把四棱锥 P-ABCD 分成体积相等的两部分，求平面 PAD 与平面 PCE 所成锐二面角的余弦



36.（济南一模 19）已知正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 和平面 α,直线 AC_1//平面 a,直线 BD//平面 α.

(1)证明：平面 α⊥平面 B_1CD_1;

(2)点 P 为线段 AC_1 上的动点，求直线 BP 与平面 α 所成角的最大值.



专题九　立体几何与空间向量

一、单项选择

1.【答案】C

2.【答案】D

【解析】A 没有说清楚三点是否共线，B 明显错误，C 中这两个角也有可能互补，故选 D.

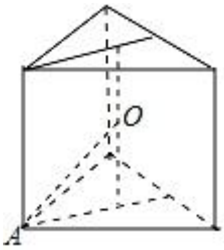
3.【答案】D

【解析】根据题意条件可知三棱柱是棱长都为 1 的正三棱柱，上下底面中心连线的中点就是球心，

则其外接球的半径为 $R=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2\sin 60°})^2}=\sqrt{\frac{7}{12}}$，

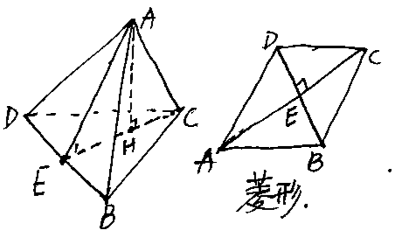
则球的表面积为 $S=4\pi\times(\sqrt{\frac{7}{12}})^2=\frac{7\pi}{3}$，

故选：D.



4.答案 A

【解析】由 AB=BD=2，得ΔABD、ΔBCD 为等边三角形，所以 AE=CE=$\sqrt{3}$，如图，由∠AEC=60°，AE=CE，得ΔAEC 为等边三角形，作 AH⊥EC 于 H，则 AH⊥平面 BCD 且 AH=$\frac{\sqrt{3}}{2}$AE=$\frac{3}{2}$，所以 $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}AH=\frac{\sqrt{3}}{2}$



5. 【答案】C

【解析】由题可知，记截面 α 与 B_1C_1, A_1C_1, AC 分别交于点 H,I,J,则 H 为 B_1C_1 的中点，I，J，为 A_1C_1，AC 分别靠近 C_1，A 的四等分点。则 $EF=FH=\sqrt{2}, EJ=HI=\frac{\sqrt{2}}{2}, EH=JI=\sqrt{6}$, 且 $EJ\perp EH$,所以周长 $l_{五边形EFHIJ}=HI+IJ+JE+EF+FH=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$,故选 C。

6.【答案】B

【解析】$V=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2\times 6\times\sqrt{3}=72$，故选 B.

二、多项选择

7.答案:ABD

【解析】连 A_1B，A_1C_1，则 A_1B 交 AB_1 于 E，又 F 为 BC_1 中点，

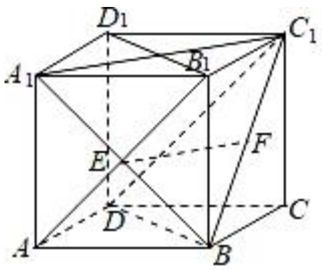
可得 $EF/\!/A_1C_1$，由 $B_1B\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$，可得 $B_1B\perp A_1C_1$，可得 $B_1B\perp EF$，故 A 正确；

连接 D_1B_1，$EF/\!/A_1C_1$，$A_1C_1\perp$平面 BDD_1B_1，可得 $EF\perp$平面 BDD_1B_1，故 B 正确；

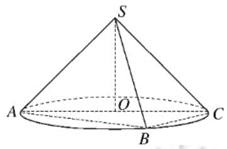
EF 与 C_1D 所成角就是$\angle A_1C_1D$，$\because AA_1$ 的长度不确定，$\therefore\angle A_1C_1D$ 的大小不确定，故 C 错误；

由 E，F 分别是 AB_1，BC_1 的中点，得 $EF/\!/A_1C_1$，可得 $EF/\!/$平面 $A_1B_1C_1D_1$，故 D 正确.

故选：ABD.



8.【答案】BD



解析:$\because$SO=OC=2，$\therefore$由勾股定理得 SA=SC=$2\sqrt{2}$，

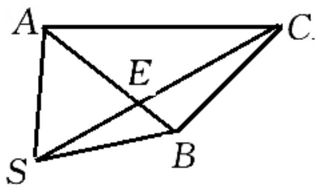
则 $S_{锥侧}=\pi rl=\pi\times 2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi$　A 错误

$V_{S-ABC}=\frac{1}{3}\times S_{\Delta ABC}\times OC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AB\times BC\times 2\le\frac{1}{3}\times\frac{AB^2+BC^2}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{AC^2}{2}=\frac{8}{3}$，B 正确

由图知，当 $AB=2\sqrt{2}$ 时，△SAB 为等边三角形，∠SAB=$\frac{\pi}{3}$，故 C 错误

将△SAB 沿 AB 展开至平面 ABC，如图

当 S、E、C 三点共线时，SE+CE 的值最小



△SAB 中，由余弦定理，$\cos\theta=\frac{\frac{AB}{2}}{BS}=\frac{1}{2},\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$

$\therefore$∠SBC=$\frac{\pi}{2}+\theta=\frac{5\pi}{6}$

△SBC 中，由余弦定理 $SC^2=SB^2+BC^2-2SB\times BC\times\cos\frac{5\pi}{6}$

$$=8+8-2\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})=16+8\sqrt{3}=(2\sqrt{3}+2)^2$$

$$\therefore (SE+CE)_{\min} = SC = 2(\sqrt{3}+1)$$

9.答案:ACD

【解析】取 EF 的中点 O，连接 OA_1，OD，

由题意可得 $DE=DF$，$A_1E=A_1F$，

所以 $OD\perp EF$，$A_1O\perp EF$，$DO\cap A_1O=O$，

所以 $EF\perp$ 平面 A_1OD，

所以 $EF\perp A_1D$，

故 A 正确；

当 $BE=BE=\frac{1}{2}BC=2$ 时，$A_1E=A_1F=2$，$EF=2\sqrt{2}$，

可得 $A_1E\perp A_1F$，又 $A_1E\perp A_1D$，$A_1F\perp A_1D$，

可把三棱锥 A_1-EDF 放到以 A_1D，A_1E，A_1F 为相邻棱的长方体中，

可得长方体的对角线长为 $\sqrt{2^2+2^2+4^2}=2\sqrt{6}$，

故外接球的半径为 $\sqrt{6}$，体积为 $\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{6})^3=8\sqrt{6}\pi$，

故 B　　错误；

当 $BE=BF=\frac{1}{4}BC=1$ 时，$EF=\sqrt{2}$，$\cos\angle EA_1F=\frac{3^2+3^2-(\sqrt{2})^2}{2\times3\times3}=\frac{8}{9}$，

所以 $\sin\angle EA_1F=\sqrt{1-\frac{64}{81}}=\frac{\sqrt{17}}{9}$，

$S_{\triangle EA_1F}=\frac{1}{2}A_1E\bullet A_1F\bullet\sin\angle EA_1F=\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{\sqrt{17}}{9}=\frac{\sqrt{17}}{2}$，

$V_{A_1-DEF}=V_{D-A_1EF}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1EF}\bullet A_1D=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{17}}{2}\times4=\frac{2\sqrt{17}}{3}$，

故 C 正确；

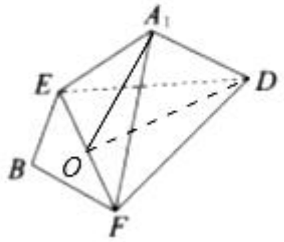
当 $BE=BF=1$ 时，设 A_1 到面 DEF 的距离为 h，

则 $V_{A_1-FED}=\frac{1}{3}S_{\triangle DEF}h=\frac{1}{3}\times(4\times4-2\times\frac{1}{2}\times4\times3-\frac{1}{2}\times1\times1)h=\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}h=\frac{2\sqrt{17}}{3}$，

解得 $h=\frac{4\sqrt{17}}{7}$，

故 D 正确.

故选：ACD.



10. 【答案】ABCD

【解析】若 $MN=4, \because MD\perp DN, MD=2$，

所以 $ND=\sqrt{MN^2-MD^2}=2\sqrt{3}$，所以点 P 到 DM 的中点 Q 的距离为 $\frac{1}{2}ND=\sqrt{3}$，又因为点 P 到平面 $ABCD$ 的距离等于 $DQ=1$ 为定值，所以点 P 的轨迹是以 Q 为圆心，3 为半径的圆，其面积为 3π，故 **B** 不正确

因为 $BB_1\perp$ 平面ABCD，所以点 N 到直线 BB_1 的距离为 NB，即点 N 到点 B 的距离与到直线 DC 的距离相等，又 B 不在直线 DC 上，所以点 N 的轨迹为以 B 为焦点，直线 DC 为准线的抛物线，故 C 正确；

以 D 为原点，DA, DC, DD_1 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，

则 A(4,0,0),B(4,4,0),D,(0,0,4),设 N(x,y,0),

则 AB=(0,4,0), $D_1N=(x,y,4)$,

因为 D_1N 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，所以

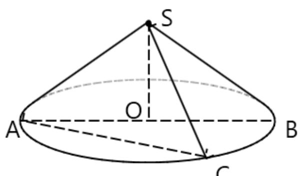
$|\cos\langle AB, D_1N\rangle|=\cos\frac{\pi}{3}=\left|\frac{0+4y-0}{\sqrt{0+16+0}\times\sqrt{x^2+y^2+16}}\right|$，化简得 $3y^2-x^2=16$

所以点 N 的轨迹为双曲线，故 D 正确；

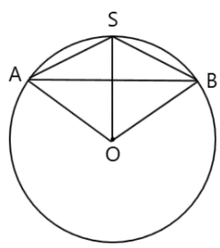
因为 MN 与平面 ABCD 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$，即 $\angle MND=\frac{\pi}{4}$，所以 DM=DN=2,所以点 N 的轨迹为以 D 为圆心，2 为半径的圆，故 A 正确.综上，故选 ACD.

11. 【答案】ACD

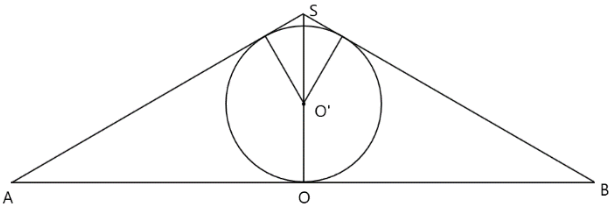
【解析】如图 1，设圆锥的轴截面为 SAB，底面圆心为 O，则 SA=20，AO=$10\sqrt{3}$，所以∠ASO=60°，∠ASB=120°，因此 A 正确；在底面圆上任取一点 C，连接 SC，设∠ASC=θ，则 $S_{\Delta SAC}=\frac{1}{2}SA\cdot SC\cdot\sin\theta=200\sin\theta$，当 θ=90° 时，ΔSAC 面积取最大值 200，因此 B 错误；如图 2，设三棱锥外接球半径为 R，则 OA=OB=OS=R，$OA^2=(OS-10)^2+(10\sqrt{3})^2$，即 $R^2=(R-10)^2+(10\sqrt{3})^2$，解得 R=20，因此球得表面积为 1600π，C 正确；如图 3，设内切球半径为 R`，球心为 O`，则 $S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}\times20\times20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}(40+20\sqrt{3})R'$，解得 $R'=20\sqrt{3}-30$，因此 D 正确；故选 ACD。



12题图1



12题图2



12题图3

12.答案:ACD

【解析】液面始终是水平面，与场地是平行的，故选项 A 正确；

当 $x=4$ 时，体积是正方体的一半，如液面正好过棱 A_1B_1，B_1B，BC，CD，DD_1，D_1A_1 的中点，此时液面是正六边形，不是平行四边形，故选项 B 错误；

液面过 AA_1，AB，AD 的中点时，此时 $x=\frac{1}{6}\in(0,\ 1)$，有液体的部分是正三棱锥，故选项 C 正确；

当液面与正方体的对角线 AC 垂直时，液面面积的最大时就是选项 B 中所列举的正六边形（此时液体条件是正方体体积的一半），面积为 $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=3\sqrt{3}$，故选项 D 正确.

故选：ACD.

13.答案:ABC

【解析】（1）若底边长为 2，2，2，侧棱长为 2，2，1，

设 $AB=1$，AB 的中点为 E，则 $AB\perp CE$，$AB\perp DE$，

$\therefore AB\perp$ 平面 CDE，

$\because CE=DE=\sqrt{2^2-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，$CD=2$，

$\therefore \cos\angle CED=\frac{CE^2+DE^2-CD^2}{2CE\cdot DE}=\frac{7}{15}$，

$\therefore \sin\angle CED=\frac{4\sqrt{11}}{15}$，

$\therefore V=\frac{1}{3}S_{\triangle CDE}\cdot AB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{2}\times\frac{4\sqrt{11}}{15}\times1=\frac{\sqrt{11}}{6}$；

（2）若底边长为 1，1，1，侧棱长为 2，2，2，

设底面中心为 O，则 $OB=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$ 棱锥的高 $h=\sqrt{2^2-(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=\sqrt{\frac{11}{3}}$，

$\therefore V=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{\frac{11}{3}}=\frac{\sqrt{11}}{12}$；

（3）若底面边长为 2，2，1，侧棱长为 2，2，1，

设 $AB=CD=1$，其余各棱长均为 2，

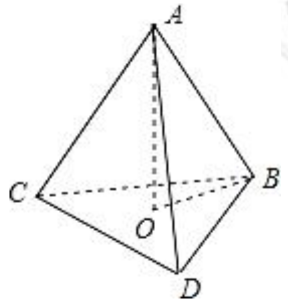
由（1）可知 $\cos\angle CED=\frac{CE^2+DE^2-CD^2}{2CE\cdot DE}=\frac{13}{15}$，

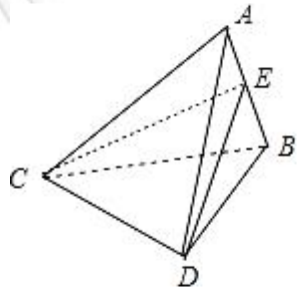
$\therefore\sin\angle CED=\frac{2\sqrt{14}}{15}$，

$\therefore V=\frac{1}{3}S_{\triangle CDE}\cdot AB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{2}\times\frac{2\sqrt{14}}{15}\times1=\frac{\sqrt{14}}{12}$.

结合选项可得，ABC 正确，

故选：ABC.





14. 【答案】AD

15.【答案】ABC

16.【答案】BCD

【分析】A 求出截面面积判断；B 平移直线求成角余弦值判断；C 求直线与平面成角判断；D 求出最小距离判断.

【解答】设球的半径为 R，因为球的体积为$\frac{4\pi}{3}$，

所以$\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{4\pi}{3}$，解得 $R=1$，

对于 A，经过三个顶点 A，B，C 的球的截面圆，

即是与$\triangle A'B'C'$ 全等的三角形的外接圆，

其半径为 $r=\frac{2}{3}\cdot1\cdot sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则其面积为$\pi r^2=\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{4}$，所以 A 错；

对于 B，作辅助线如图②，$PD//CF$，$PD=CF$，所以$\angle PDA$ 为 AD 与 CF 成角，

$\triangle EQD\cong\triangle CDF$，$M$、$N$ 分别为 QD、DE 边中点，

所以 $AP=MN=2\cdot1\cdot\sin60^\circ=\sqrt{3}$，

所以 $\cos\angle PDA=\frac{2^2+2^2-(\sqrt{3})^2}{2\cdot2\cdot2}=\frac{5}{8}$，所以 B 对；

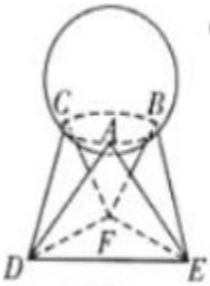
对于 C，如图②，$AN\perp$平面 EDF，所以 DE 为 AD 在平面 DEF 内射影，

于是$\angle ADE$ 即为直线 AD 与平面 DEF 所成的角，大小为$\frac{\pi}{3}$，所以 C 对；

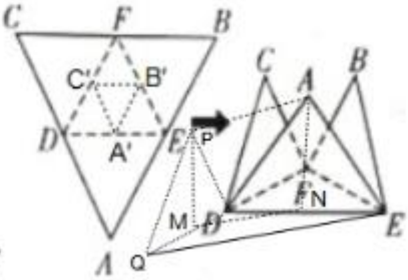
对于 D，如图③，$O_1O=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$，$O_1G=\mathbf{R}-O_1O=1-\sqrt{\frac{2}{3}}$，$AN=2\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，

所以球离球托底面 DEF 的最小距离为$=AN-O_1G=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}-1$，所以 D 对．

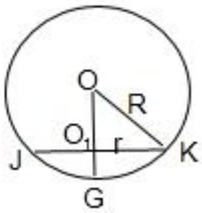
故选：BCD．



图①



图②



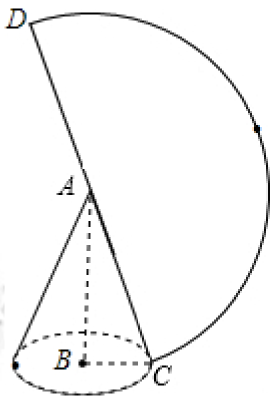
图③

三、填空

17．【答案】$\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

【分析】利用圆锥的底面周长等于侧面展开图的扇形弧长，求出圆锥的母线长，进而可得高，即可求出圆锥的体积．

【解析】∵圆锥的侧面展开图是一个半圆，圆锥的底面周长为：2π，即侧面展开图半圆的弧长是 2π，半圆的半径就是圆锥的母线：2，



圆锥的高为：$\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

∴圆锥的体积$=\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$．

18.答案: 3π

【解析】如图，$AP=2\sqrt{3}$，$PN=4$，则 $AN=2$，$\angle APN=\frac{\pi}{6}$，

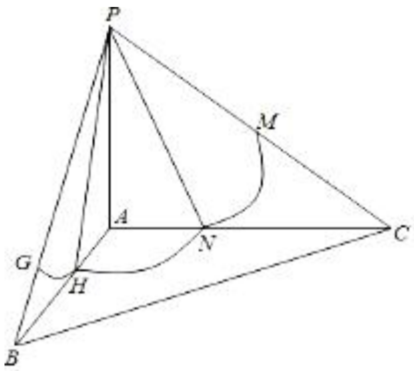
$\therefore\angle NPM=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$，

$\therefore\overset{\frown}{MN}=\frac{\pi}{12}\times 4=\frac{\pi}{3}$，同理$\overset{\frown}{GH}=\frac{\pi}{3}$，

$\overset{\frown}{HN}=\frac{\pi}{2}\times 2=\pi$，$\overset{\frown}{GM}=\frac{\pi}{3}\times 4=\frac{4\pi}{3}$，

故球面与三棱锥的表面相交所得到的四段弧长之和等于$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\pi+\frac{4\pi}{3}=3\pi$，

故答案为：3π．

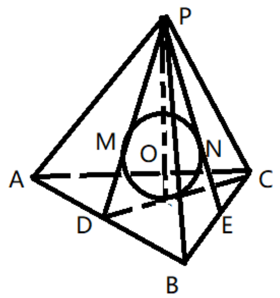


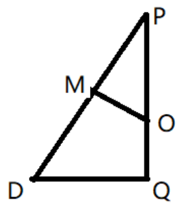
19.【答案】$\frac{5}{6}$

【解析】设内切球球心 O，与面 PAB、PBC 相切于 M、N，M、N 位于斜高上，与面 ABC 相切于点 Q

Q 为△ABC 的中心，$PQ=\sqrt{PD^2-DQ^2}=\sqrt{12-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{35}{3}}$，且$\frac{MO}{PO}=\frac{DQ}{PD}=\frac{1}{6}$，∴$PO=6OM=6r$

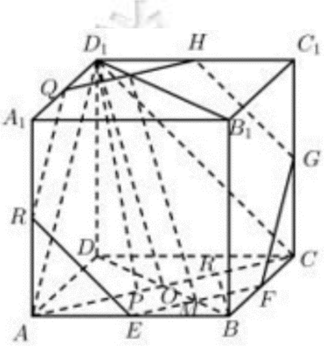
由题$r=\frac{3V}{S_{表}}=\frac{\sqrt{35}}{7\sqrt{3}}$ ∴$PM=\sqrt{35}r=\frac{5}{\sqrt{3}}$，∴$\frac{PM}{PD}=\frac{\frac{5}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}=\frac{5}{6}$，∴$MN=\frac{5}{6}DE=\frac{5}{6}$





20.【答案】$\dfrac{125\pi}{6}$

解析:补全截面 EFG 为截面 EFGHQR,如图所示,



设 BR⊥AC,因为直线 D_1P//平面 EFG,

所以 D_1P//平面 EFGHQR,

因为 E,F,G 分别是棱 AB,BC,CC1 的中点,

所以 EF//AC,FG//AD_1,EF∩FG=F,AC∩AD_1=A,

所以平面 ACD1//平面 EFGHQR,所以 P∈AC,

故当 P 与 R 重合时，BP=BR 最短，此时△PBB_1 的面积最小,

由等面积法可得 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BR\cdot AC=\frac{1}{2}AB\cdot BC$，∴

$$BR=\frac{AB\times BC}{AC}=\frac{12}{5}$$

得 BR=BP=$\frac{12}{5}$,因为 B_1B⊥AP,BP⊥AP,B_1B∩BP=B,B_1B,BP⊂平面 B_1BP,

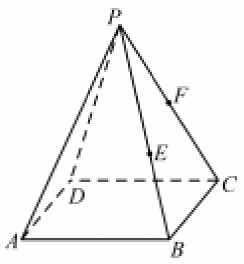
所以 AP⊥平面 B_1BP,又 B_1P⊂平面 B_1BP，则 AP⊥B_1P,又 AB⊥B_1B,

所以 AB_1 为三棱锥 A-BB_1P 的外接球的直径,

故 $AB_1=\sqrt{3^2+4^2}$=5，所以三棱锥 A-BB1P 的外接球的半径为 $\frac{5}{2}$

故三棱锥 A-BB_1P 的外接球的体积是$\dfrac{125\pi}{6}$

21.【答案】$\frac{3}{4}$



【解析】建立如图所示空间直角坐标系，设 P(0,0,b),A(a,0,0),B(a0,a,0),D(0,-a,0),C(-a,0,0)，$\overrightarrow{PA}=x\overrightarrow{PE}+y\overrightarrow{PF}+z\overrightarrow{PG}$，其中 x+y+z=1，则

$\overrightarrow{PB}=(0,a,-b)$，$\overrightarrow{PC}=(-a,0,b)$，$\overrightarrow{PD}=(0,-a,-b)$，$\overrightarrow{PA}=(a,0,-b)$，

$\overrightarrow{PE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{PB}=\left(0,\frac{3}{5}a,-\frac{3}{5}b\right)$，$\overrightarrow{PF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\left(-\frac{a}{2},0,-\frac{b}{2}\right)$，

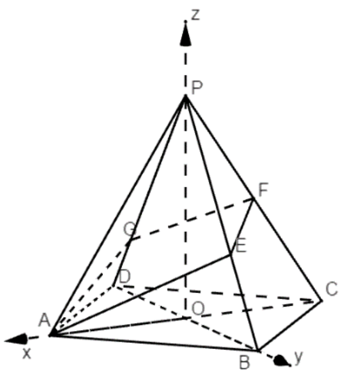
设$\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PC}=(0,-a\lambda,-b\lambda)$，则

$$(a,0,-b)=x\left(0,\frac{3}{5}a,-\frac{3}{5}b\right)+y\left(-\frac{a}{2},0,-\frac{b}{2}\right)+z(0,-a\lambda,-b\lambda)$$

$$=\left(0+\frac{-ay}{2}+0,\frac{5a}{3}x+0-a\lambda z,-\frac{3b}{5}x-\frac{b}{2}y-b\lambda z\right)$$

由方程组

$$\begin{cases}a=-\frac{ay}{2}\\ \frac{5a}{3}x+0-a\lambda z=0\\ -b=-\frac{3b}{5}x-\frac{b}{2}y-b\lambda z\\ x+y+z=1\end{cases}，得\begin{cases}y=-z\\ \frac{5}{3}x-\lambda z=0\\ \frac{5}{3}x+\lambda z=2\\ x+z=3\end{cases}，解得，\lambda=\frac{3}{4}。$$



22.【答案】$\dfrac{8}{9}$

23.答案: $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi^2R^3$；$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

【解析】设扇形的圆心角为 θ（0<θ<2π），弧长为 l，圆锥的底面半径为 r，

则 $l=R\theta=2\pi r$，可得 $r=\dfrac{R\theta}{2\pi}$，再设圆锥的高为 h，

$\therefore h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\dfrac{R^2\theta^2}{4\pi^2}}=\dfrac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$，

圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2\theta^2}{4\pi^2}\cdot\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\theta^2}=\frac{R^3}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2\theta^4-\theta^6}$.

令 $f(\theta)=4\pi^2\theta^4-\theta^6$，由 $f'(\theta)=16\pi^2\theta^3-6\theta^5=0$，得 $\theta=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$，

∴当 $\theta\in(0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi)$ 时，$f'(\theta)>0$，当 $\theta\in(\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi,2\pi)$ 时，$f'(\theta)<0$，

可得当 $\theta=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时，$V_{max}=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\sqrt{\frac{256}{27}\pi^6}=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi^2R^3$.

故答案为：$\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi^2R^3$；$\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

四、解答

24.【解析】（1）证明：因为侧棱 $PA\perp$ 底面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，所以 $BC\perp PA$，

又 C 点在以 AB 为直径的圆上，所以 $BC\perp AC$，

又 $AC\cap PA=A$，AC，$PA\subset$ 平面 PAC，所以 $BC\perp$ 平面 ABC，

在平面 ABC 内过点 A 作垂直 AC 的直线为 x 轴，AC，AP 所在的直线分别为 y 轴，z 轴，

以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系如图所示，设 $PA=a$，设 $BC=b$，

则 $A(0,0,0)$，$B(b,a,0)$，$C(0,a,0)$，$P(0,0,a)$，$E(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2})$，

所以 $\overrightarrow{AE}=(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2})$，$\overrightarrow{PB}=(b,a,-a)$，

故 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{PB}=0\cdot b+\frac{a}{2}\cdot a-a\cdot\frac{a}{2}=0$，

所以 $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{PB}$，

故 $AE\perp PB$；

（2）【解析】当 $PA=AC$，E 为 PC 的中点时，$AE\perp PC$，

则由（1）可知，$AE\perp$ 平面 PBC，

故可取平面 PBC 的一个法向量为 $\overrightarrow{AE}=(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2})$，

当 $PA=AC=BC=a$ 时，$\overrightarrow{AP}=(0,0,a)$，$\overrightarrow{AB}=(a,a,0)$，

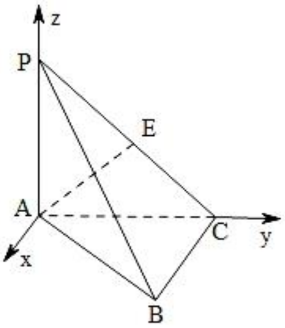
设平面 PAB 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}az=0\\ax+ay=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=-1$，故 $\vec{n}=(1,-1,0)$，

所以 $\cos<\overrightarrow{AE},\ \vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AE}||\vec{n}|}=\dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$,

由图可知，二面角 $C-BP-A$ 为锐角，

所以二面角 $C-BP-A$ 的大小为 60°．



25.

.解:（1）证明:因为面 $PAD\perp$ 面 $ABCD$，面 $PAD\cap$ 面 $ABCD=AD$，$AB\subset$ 面 $ABCD$，

$AB\perp AD$，所以 $AB\perp$ 面 PAD， ···························1 分

又 $PD\subset$ 面 PAD，所以 $PD\perp AB$， ···························2 分

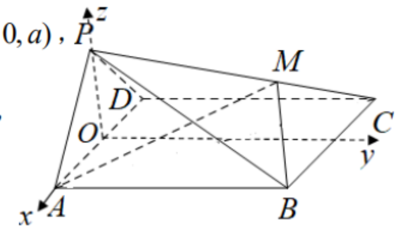
又 $PD\perp BM$，$AB\cap BM=B$，所以 $PD\perp$ 面 ABM， ···························3 分

$AM\subset$ 面 ABM，所以 $PD\perp AM$； ···························4 分

（2）取 AD 中点 O，以 O 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OP}$

方向为 x,y,z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系， ··················5 分

设 $OP=a$，则有 $B(1,2,0),C(-1,2,0),D(-1,0,0),P(0,0,a)$，



可得 $\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{CD}=(0,-2,0)$，$\overrightarrow{CP}=(1,-2,a)$，

设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 PBC 的一个法向量，

则有 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x_1=0\\ x_1-2y_1+az_1=0\end{cases}$，令 $y_1=a$，则 $\boldsymbol{m}=(0,a,2)$， ·········7 分

设 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 为平面 PCD 的一个法向量，

则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-2y_2=0\\ x_2-2y_2+az_2=0\end{cases}$，令 $x_2=a$，则 $\boldsymbol{n}=(a,0,-1)$， ·········9 分

因为 $\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，可得 $\dfrac{2}{\sqrt{a^2+4}\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$， ·································10 分

解得 $a=1$， ···11 分

所以 $AP=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. ···12 分

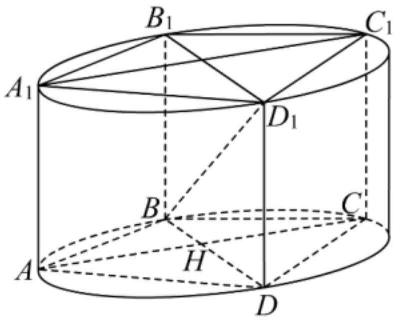
26.【解析】（1）由空间几何关系可知，

三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球也就是三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接圆柱的外接球，

取 AC 的中点 H，因为 $AB=BC$，所以 $BH\perp AC$，

延长 BH 到 D，使得 $BC\perp DC$，

所以 BD 为圆柱底面圆的直径，　　　　…………………………………………2 分

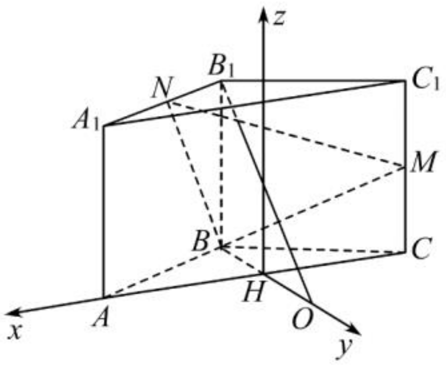


因为 $AB=BC=4$，$\angle ABC=120^\circ$，所以 $BD=8$，又 $DD_1=BB_1=4$，

所以 $2r=BD_1=\sqrt{BD^2+DD_1^2}=4\sqrt{5}$，　　　……………………………………3 分

所以外接球的表面积 $S=4\pi r^2=\pi(2r)^2=80\pi$.　　　……………………………4 分

（2）据（1）可知，以 CA 所在的直线为 x 轴，以 BH 所在的直线为 y 轴，以过点 H 且和 AA_1 平行的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系如图所示：



所以 $A(2\sqrt{3},0,0)$，$B(0,-2,0)$，$C(-2\sqrt{3},0,0)$，$A_1(2\sqrt{3},0,4)$，$C_1(-2\sqrt{3},0,4)$，

$B_1(0,-2,4)$，所以 $\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{3},2,0)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,4)$，

因为$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}$，所以$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}=\left(-2\sqrt{3},2,2\right)$，

同理$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1N}=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1A_1}=\left(\sqrt{3},1,4\right)$， ··························6 分

设平面 BMN 的法向量$\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BM}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BN}=0\end{cases}$， ··7 分

即$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y+z=0\\ \sqrt{3}x+y+4z=0\end{cases}$，取$x=\sqrt{3}$，则$z=-2$，$y=5$，

所以$\vec{m}=\left(\sqrt{3},5,-2\right)$， ··9 分

由（1）可知，截面圆的圆心 O 在 BH 的延长线上，且 $HO=2$，

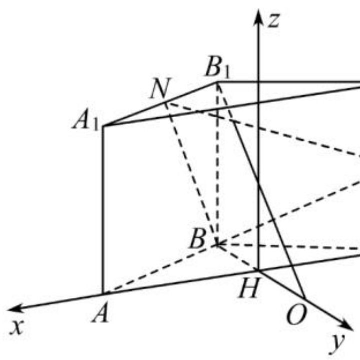
所以$\overrightarrow{OB_1}=\left(0,-4,4\right)$， ··10 分

设直线OB_1与平面 BMN 所成的角大小为θ ，

所以$\sin\theta=\frac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{OB_1}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB_1}\right|}=\frac{20+8}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{32}}=\frac{7}{8}$，

所以直线OB_1与平面 BMN 所成角的正弦值为$\frac{7}{8}$． ························12 分

解法 2：（1）据已知条件，取 AC 的中点 H，以 CA 所在的直线为x轴，以 BH 所在的直线为 y 轴，以过点 H 且和 AA_1 平行的直线为z轴，建立空间直角坐标系如图所示：



由已知可得：$A\left(2\sqrt{3},0,0\right)$，$B\left(0,-2,0\right)$，$C\left(-2\sqrt{3},0,0\right)$，$A_1\left(2\sqrt{3},0,4\right)$，

$C_1\left(-2\sqrt{3},0,4\right)$，$B_1\left(0,-2,4\right)$，

设球心 G 的坐标为(a,b,c)，则$GA=GC=GB_1$，且$c=2$

所以$\begin{cases}\left(a-2\sqrt{3}\right)^2+b^2+4=\left(a+2\sqrt{3}\right)^2+b^2+4\\ \left(a-2\sqrt{3}\right)^2+b^2+4=a^2+\left(b+2\right)^2+4\end{cases}$， ·······························2 分

解得：$a=0$，$b=2$，所以$G\left(0,2,2\right)$，

所以 $r=\sqrt{0^2+(2+2)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{5}$， ……………………………3 分

所以外接球的表面积 $S=4\pi r^2=\pi(2r)^2=80\pi$. ………………………4 分

（2）由（1）可知：所以 $\overrightarrow{BC}=\left(-2\sqrt{3},2,0\right),\overrightarrow{CC_1}=(0,0,4)$，

因为 $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}$，所以 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}=\left(-2\sqrt{3},2,2\right)$，

同理 $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1N}=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1A_1}=\left(\sqrt{3},1,4\right)$， …………………………6 分

设平面 BMN 的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BM}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BN}=0\end{cases}$， ………………………………………7 分

即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+y+z=0\\ \sqrt{3}x+y+4z=0\end{cases}$，取 $x=\sqrt{3}$，则 $z=-2$，$y=5$，

所以 $\vec{m}=\left(\sqrt{3},5,-2\right)$， ………………………………………9 分

由（1）可知，截面圆的圆心 O 在 BH 的延长线上，且 $HO=2$，

所以 $\overrightarrow{OB_1}=(0,-4,4)$， ………………………………………10 分

设直线 OB_1 与平面 BMN 所成的角大小为 θ ，

所以 $\sin\theta=\frac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{OB_1}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB_1}\right|}=\frac{20+8}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{32}}=\frac{7}{8}$，

所以直线 OB_1 与平面 BMN 所成角的正弦值为 $\frac{7}{8}$. ……………………12 分

27.【解析】（1）证明：∵$BM\perp AD$，$CN\perp AD$，∴$BM\,//\,CN$，

在四棱锥 D - $ABCN$ 中，$CN\subset$平面 CDN，

$BM\not\subset$平面 CDN，∴$BM\,//$ 平面 CDN，

又平面 $BMEF\cap$平面 $CDN=EF$，

∴$BM\,//\,EF$，

∵平面 $ADN\perp$平面 $ABCN$ 且交于 AN，$BM\perp AN$，

∴$BM\perp$平面 ADN，即 $EF\perp$平面 ADN，

又 $DA\subset$平面 ADN，∴$EF\perp DA$；

（2）解：存在，E 为棱 DN 上靠近 N 点的四等分点．

∵$DA=DN$，$AM=MN=1$，

连接 DM，∴$DM\perp AN$，又平面 $ADN\perp$ 平面 $ABCN$，且平面 $ADN\cap$ 平面 $ABCN=AN$，

∴$DM\perp$ 平面 $ABCN$．

如图，以 M 为坐标原点，分别以 MA，MB，MD 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

则 $D(0,0,\sqrt{3})$，$B(0,1,0)$，$M(0,0,0)$，$N(-1,0,0)$，

$\overrightarrow{DB}=(0,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BM}=(0,-1,0)$，$\overrightarrow{ND}=(1,0,\sqrt{3})$，

设 $\overrightarrow{NE}=\lambda\overrightarrow{ND}$，$(0<\lambda<1)$，则 $E(\lambda-1,0,\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{ME}=(\lambda-1,0,\sqrt{3}\lambda)$，

设平面 $BMEF$ 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=-y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{ME}=(\lambda-1)x+\sqrt{3}\lambda z=0\end{cases},$$

不妨令 $x=\sqrt{3}\lambda$，则 $z=1-\lambda$，$\vec{n}=(\sqrt{3}\lambda,0,1-\lambda)$，

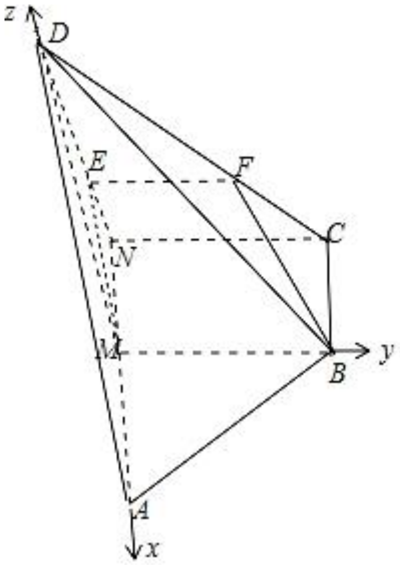
设直线 DB 与平面 $BMEF$ 所成角为 α，则有

$$\sin\alpha=|\cos<\vec{n},\overrightarrow{DB}>|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{DB}|}=\frac{|\sqrt{3}(\lambda-1)|}{2\sqrt{3\lambda^2+(1-\lambda)^2}}=\frac{3}{4},$$

解得 $\lambda=\frac{1}{4}$ 或 $-\frac{1}{2}$（舍）．

∴$\overrightarrow{NE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{ND}$，即在棱 DN 上存在点 E，使得直线 DB 与平面 $BMEF$ 所成角的正弦值为 $\frac{3}{4}$，

E 为棱 DN 上靠近 N 点的四等分点．



28.【解析】（1）连接 AC、BD 交于 N，连接 AF、EG 交于 M，

因为平面 A_1D∥平面 B_1C，平面 $AEFG\cap$平面 $A_1D=AG$，平面 $AEFG\cap$平面 $B_1C=EF$，所以 AG∥EF，

因理 AE∥GF，所以四边形 $AEFG$ 为平行四边形，于是 M 是 AF、EG 中点，

因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 N 为 AC、BD 中点，

于是 MN 为△ACF 中位线，又是梯形 $DGEB$ 的中位线，

所以 $MN=\frac{1}{2}CF=\frac{3}{2}$，$DG+BE=2\cdot MN$，所以 $BE=2\cdot\frac{3}{2}-2=1$.

（2）建立如图所示的空间直角坐标系，

$\overrightarrow{AE}=(4,0,1)$，$\overrightarrow{AD_1}=(0,4,6)$，

设平面 AD_1E 的法向量为 $\overrightarrow{m}=(x,y,z)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{m}=4x+z=0\\ \overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{m}=4y+6z=0\end{cases}$，令 $z=-4$，$\overrightarrow{m}=(1,6,-4)$，

平面 $ABCD$ 的法向量为 $\overrightarrow{n}=(0,0,1)$，

所以平面 $ABCD$ 与平面 AED_1 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{n}|}=\frac{4}{\sqrt{53}\cdot1}=\frac{4\sqrt{53}}{53}$.

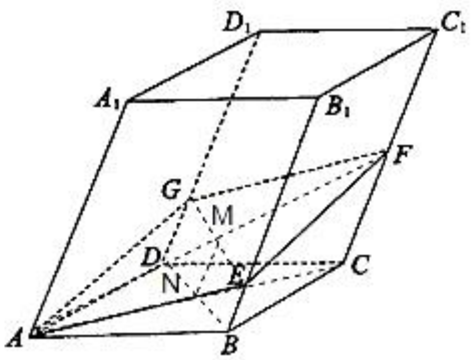


图1

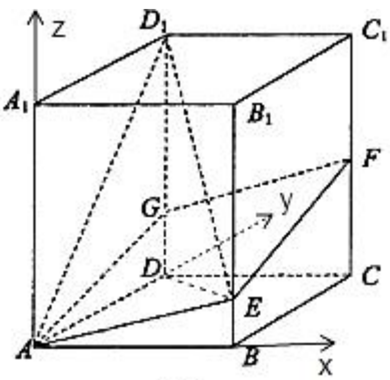


图2

29.【解析】（1）证明：∵BC＝3，BM＝1，∴CM＝2，AD＝CM，

又∵AD∥CM，∴四边形 AMCD 为平行四边形，

又∵BC⊥CD，∴四边形 AMCD 为矩形，

∵ $\frac{MN}{AM}=\frac{AM}{AD}=\frac{1}{2}$，∴ $\Delta AMN\backsim\Delta DAM$，

∴∠AED＝∠MAN＋∠AME＝∠ADM＋∠AME＝90°，

∴MD⊥AN，又∵PA⊥平面 ABCD，∴PA⊥MD，AN⋂PA＝A，

∴MD⊥平面 PAN；

（2）如图建立空间坐标系，则 M(1，0，0)，A(0，0，0)，P(0，0，2)，

N(1，$\frac{1}{2}$，0)，B(1，－1，0)，Q(x，y，z)，

设 $\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{BP}\Rightarrow(x-1,y+1,z)=\lambda(-1,1,2)\Rightarrow\begin{cases}x=1-\lambda\\y=\lambda-1\\z=2\lambda\end{cases}$

$\therefore Q(1-\lambda,\lambda-1,2\lambda)$

$\overrightarrow{MQ}=(-\lambda,\lambda-1,2\lambda)$，$\overrightarrow{AM}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{AN}=\left(1,\frac{1}{2},0\right)$

设平面 MQA 与平面 PAN 的一个法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{MQ}=0\\\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AM}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\lambda x_1+(\lambda-1)y_1+2\lambda z_1=0\\x_1=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=(0,2\lambda,1-\lambda)$

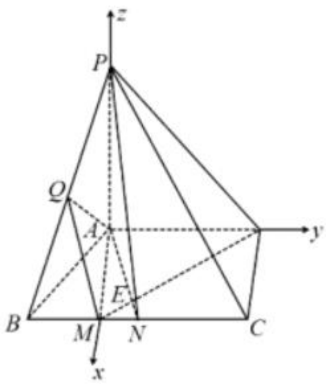
$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AP}=0\\\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AN}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2z_1=0\\x_2+\frac{1}{2}y_2=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=(1,-2,0)$

设平面 MQA 与平面 PAN 所成锐二面角为 θ，

$\therefore\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right|=\frac{4\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+(1-\lambda)^2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{4}{5}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$

此时 $\overrightarrow{MQ}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$，平面 ABCD 的一个法向量 $\overrightarrow{n_3}=(0,0,1)$，

$\therefore\sin\alpha=\left|\frac{\overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{MQ}}{\left|\overrightarrow{n_3}\right|\left|\overrightarrow{MQ}\right|}\right|=\frac{\sqrt{6}}{3}$.



30.【解析】（1）证明：∵$PA\perp$平面 $ABCD$，$CD\subset$平面 $ABCD$，∴$PA\perp CD$，

∵四边形 $ABCD$ 为矩形，∴$AD\perp CD$，

又 $AD\cap PA=A$，AD、$PA\subset$平面 PAD，∴$CD\perp$平面 PAD，

∵$AE\subset$平面 PAD，∴$AE\perp CD$，

在△PAD 中，$PA=AD$，E 为 PD 的中点，∴$AE\perp PD$，

而 $PD\cap CD=D$，PD、$CD\subset$平面 PCD，

∴$AE\perp$平面 PCD；

（2）解：以 A 为坐标原点，分别以 AB、AD、AP 所在直线为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系，

设 $AP=a$（$a>0$），则 C（2，1，0），P（0，0，a），E（0，$\frac{1}{2}$，$\frac{a}{2}$），

∴$\overrightarrow{AC}=(2,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{a}{2})$，$\overrightarrow{PC}=(2,\ 1,\ -a)$，

设平面 ACE 的一个法向量为$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，

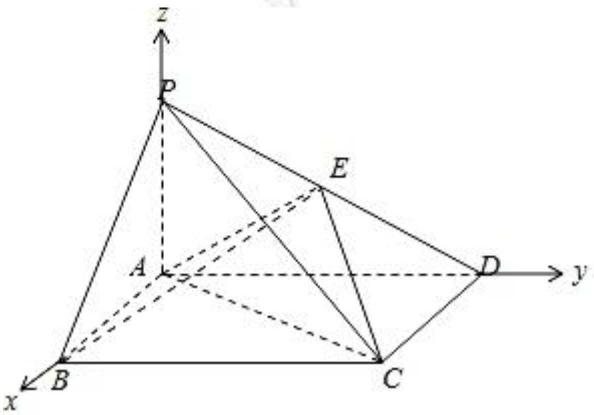
则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2x+y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}y+\frac{a}{2}z=0\end{cases}$，取 $y=-a$，可得$\vec{n}=(\frac{a}{2},\ -a,\ 1)$．

设直线 PC 与平面 ACE 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos<\vec{n},\ \overrightarrow{PC}>|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{PC}|}$

$=\frac{a}{\sqrt{\frac{5}{4}a^2+1}\cdot\sqrt{5+a^2}}=\frac{2}{\sqrt{29+\frac{20}{a^2}+5a^2}}\leqslant\frac{2}{7}$，当且仅当 $a=\sqrt{2}$时等号成立．

即当 $AP=\sqrt{2}$时，直线 PC 与平面 ACE 所成角最大，

此时三棱锥 $E-ABC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$．



31.解析:(1)证明：连结 AC 交 BD 于点 O，连结 OM，因为四边形 ABCD 是矩形，所以 AO=OC，

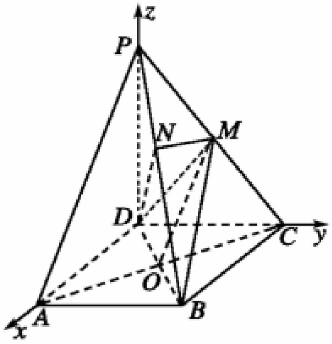
又因为 PM=MC，所以 OM//PA，……………………2 分

又因为 $PA\not\subset$平面 BMD，$OM\subset$平面 BMD，所以 PA∥平面 BMD．……………………………………5 分

(2)解：由已知得 DA，DC，DP 两两垂直，以点 D 为原点建立如图所示的坐标系，因为 PD⊥平面 ABCD，所以∠PCD 就是直线 PC 与平面 ABCD 所成的角，所以$\angle PCD=60^\circ$，

故 $DP=\sqrt{3}DC$．设 CD=1，则

$D(0,0,0),C(0,1,0),P(0,0,\sqrt{3}),B(2,1,0)$，$M\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，



于是 $\overrightarrow{DM}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{DP}=\left(0,0,\sqrt{3}\right),\overrightarrow{PB}=\left(2,1,-\sqrt{3}\right)$．……6 分

设 $\overrightarrow{PN}=\lambda\overrightarrow{PB}$，则 $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DP}+\lambda\overrightarrow{PB}=\left(2\lambda,\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda\right),\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{DM}$

$=\left(2\lambda,\lambda-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\lambda\right)$，由 $MN\perp PB$，得 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，

即 $4\lambda+\lambda-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\lambda\right)=0$，

解得 $\lambda=\frac{1}{4}$，所以 $\overrightarrow{DN}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$．……………………………………………………8 分

设平面 DMN 的一个法向量为 $m=(x,y,z)$，

则由 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{DM}=0,\\ m\cdot\overrightarrow{DN}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{3\sqrt{3}}{4}z=0,\end{cases}$ 令 $z=-1$，得 $m=\left(\sqrt{3},\sqrt{3},-1\right)$，…10 分

又平面 PDA 的一个法向量为 $n=(0,1,0)$，……………………………………………11 分

所以 $\cos\langle m,n\rangle=\frac{m\cdot n}{|m||n|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$．

所以平面 DMN 与平面 PAD 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$．…………………12 分

32. 【解析】（1）证明：取 CD 的中点 N，连结 FN，MN，

因为 F，N 分别为 AB，CD 的中点，
所以 FN∥AD，
又因为 FN⊄平面 PAD，AD⊂平面 PAD，
所以 FN∥平面 PAD，
同理，MN∥平面 PAD，
又因为 FN∩MN＝N，
所以平面 MFN∥平面 PAD，
又因为 FM⊂平面 MFN，
所以 FM∥平面 PAD；

（2）因为平面 PAD⊥平面 ABCD，AB⊥AD，
所以 AB⊥平面 PAD，
所以∠AEF 即为直线 EF 与平面 PAD 所成的角，
且 tan∠AEF＝$\frac{AF}{AE}=\frac{2}{AE}$，当 AE 最小，E 为 PD 中点时，AE⊥PD，此时∠AEF 最大为 30°，
又因为 AF＝2，所以 AE＝$2\sqrt{3}$，∴AD＝4，

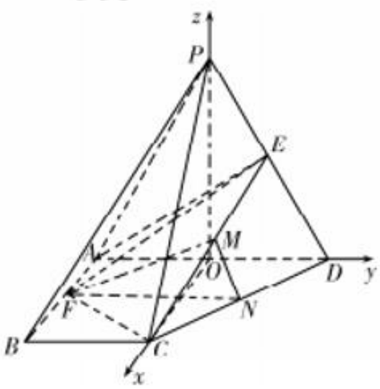
取 AD 的中点 O，连结 PO，OC，

易知 PO⊥平面 ABCD，

因为 AO∥BC 且 AO＝BC，

所以四边形 ABCO 为平行四边形，

所以 AO⊥OC，



以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OC}$ 的方向为 x 轴正方形，建立如图所示的空间直角坐标系 O—xyz，

则 $O(0,0,0),C(4,0,0),D(0,2,0),P(0,0,2\sqrt{3})$，

$E(0,1,\sqrt{3}),F(2,-2,0),\overrightarrow{CE}=(-4,1,\sqrt{3}),\overrightarrow{FC}=(2,2,0)$，

设 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$ 为平面 CEF 的法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{FC}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x+2y=0,\\ -4x+y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，可取 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3},-\sqrt{3},5)$，

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,0)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{31}}=\dfrac{\sqrt{93}}{31}$.

所以平面 CEF 与平面 PAD 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{93}}{31}$.

33. 证明：（1）因为 ABCD 是菱形，所以 AC⊥BD，则 BE⊥AC, PE⊥AC，

因为 BE⊂面 PBE , PE⊂面 PBE，且 BE⋂PE=E，所以 AC⊥面 PBE．

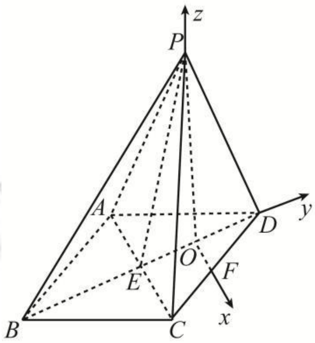
因为 PB⊂面 PBE，所以 AC⊥PB．

（2）解：取 DE 的中点 O，连接 OP，取 CD 的中点 F，连接 OF，

因为 BD=8，所以 DE=PE=4．

因为 PD=4，所以 PD=PE，所以 PO⊥DE，由（1）可知 AC⊥面 PBE，

所以 面 PBD⊥面 ABCD，则 PO⊥面 ABCD．



故以 O 为坐标原点，以 $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 O－xyz．

由题中数据可得 A(-3,-2,0), B(0,-6,0), C(3,-2,0), D(0,2,0), P(0,0, $2\sqrt{3}$)，

则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$=(3,-4,0)，$\overrightarrow{BP}$=(0,6, $2\sqrt{3}$)，$\overrightarrow{DP}$=(0,-2, $2\sqrt{3}$)

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$

则 $\begin{cases}\vec{m}\bullet\overrightarrow{AB}=3x_1-4y_1=0\\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{BP}=6y_1+2\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$　令 x_1=4，得 $\vec{m}=(4,3,-3\sqrt{3})$.

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$

则$\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{DC}=3x_2-4y_2=0\\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{BP}=-2y_2+2\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$ 令 $x_2=4$，得 $\vec{m}=(4,3,\sqrt{3})$.

设 平面 PAB 与平面 PCD 所成的锐二面角为θ，

则 $\cos\theta=\left|\dfrac{\vec{m}\bullet\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}\right|=\dfrac{4\times4+3\times3-3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{4^2+3^2+(-3\sqrt{3})^2}\times\sqrt{4^2+3^2+(\sqrt{3})^2}}=\dfrac{4\sqrt{91}}{91}$

34.

证明：(1)过点 E 作 $EO\perp AD$ 交 AD 于点 O，连接 OB，OC，BD

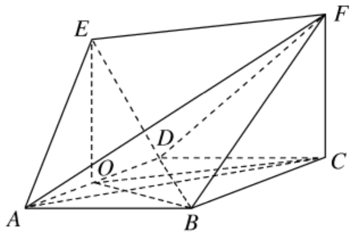
$\because$平面 $ADE\perp$平面 $ABCD$

平面 $ADE\cap$平面 $ABCD=AD$

$EO\subset$平面 ADE

$\therefore EO\perp$平面 $ABCD$ ………………………… 2 分

又 ΔADE 是正三角形，$AD=2$



第20题图1

所以 $EO=\sqrt{3}$

$\because CF\perp$平面 $ABCD$，$CF=\sqrt{3}$

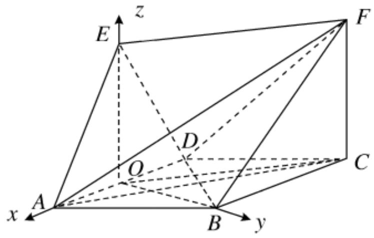
$\therefore CF/\!/OE$，$CF=OE$

$\therefore$四边形 $OCFE$ 为平行四边形

$\therefore OC/\!/EF$ ……………………………… 4 分

又$\because OC\subset$平面 $ABCD$，$EF\not\subset$平面 $ABCD$

$\therefore EF/\!/$平面 $ABCD$ ………………… 5 分



第20题图2

(2)因为四边形 $ABCD$ 是菱形，$AB=2$，

$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$. 所以，$OB\perp AD$ ………………………………………………………… 6 分

故，以 O 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OE}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.

$\therefore A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$C(-2,\sqrt{3},0)$，$D(-1,0,0)$，

$E(0,0,\sqrt{3})$，$F(-2,\sqrt{3},\sqrt{3})$ ……………………………………………………… 7 分

$\therefore\overrightarrow{AE}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EF}=(-2,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{DB}=(1,\sqrt{3},0)$

设平面 AEF 的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-x+\sqrt{3}z=0\\ -2x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$，得$\begin{cases}y=2\\ z=1\end{cases}$

$\therefore\vec{n}=(\sqrt{3},2,1)$ …………………………………………………………………… 9 分

$\because CF\perp$平面 $ABCD\therefore CF\perp BD$

在菱形 $ABCD$ 中，$BD\perp AC$ 又 $CF\cap AC=C\therefore BD\perp$平面 ACF

$\therefore\overrightarrow{DB}$ 是平面 ACF 的一个法向量 ……………………………………………… 10 分

设二面角 $E-AF-C$ 的大小为 θ

则 $|\cos\theta|=|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{DB}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{DB}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{DB}|\times|\vec{n}|}=\dfrac{|\sqrt{3}+2\sqrt{3}|}{2\sqrt{2}\times2}=\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

$\therefore\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{10}}{8}$ ……………………………………………… 12 分

35.

20.(1)证明：如图，取 AB 的中点 M，连结 DM，DB，

$\because CD=\frac{1}{2}AB$，$\therefore CD=MB$，

$\because CD /\!/ MB$，$\therefore$ 四边形 $BCDM$ 为平行四边形，$\therefore DM=BC$，…………………………… 1 分

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，$AB /\!/ CD$，$\therefore DM=BC=AD$，

又 $AD=CD=\frac{1}{2}AB=AM$，$\therefore \triangle AMD$ 为等边三角形，

$\therefore \angle DAM=\angle DMA=60^\circ$，

$\therefore$ 在等腰 $\triangle MBD$ 中，$\angle MBD=30^\circ$ …………………………………………………… 2 分

$\therefore$ 在 $\triangle ADB$ 中，$\angle ADB=90^\circ$，

不妨设 $2PD=2AD=2CD=AB=PB=2$，则 $BD=\sqrt{3}$，

在 $\triangle PBD$ 中，$BD=\sqrt{3}$，$PD=1$，$PB=2$，$\therefore PD^2+BD^2=PB^2$，

$\therefore PD\perp BD$，…………………………………………………………………………… 3 分

又 $PD\perp AD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，$AD\cap BD=D$，

$\therefore PD\perp$ 平面 $ABCD$，

又 $PD\subset$ 平面 PAD，$\therefore$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$. ………………………………… 4 分

(2)解：$\because PD\perp AD$，$PD\perp BD$，$AD\perp BD$，

$\therefore$ 以 AD，BD，PD 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，如图：……………… 5 分

设 $PD=1\because$ 平面 PDE 把四棱锥 $P-ABCD$ 分成体积相等的两部分，

$\therefore$ 三棱锥 $P-ADE$ 的体积等于四棱锥 $P-BCDE$，

$\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle ADE}\times PD=\frac{1}{3}S_{梯形DCBE}\times PD$，

$\therefore S_{\triangle ADE}=S_{梯形DCBE}$，…………………………………………………………… 6 分

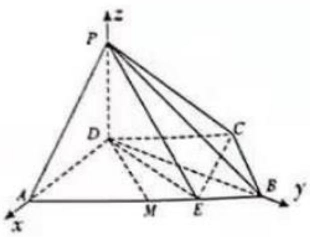
设梯形 $ABCD$ 的高为 h，$AE=x$，则 $\frac{1}{2}xh=\frac{1}{2}\times(2-x+1)h$，

解得 $x=\frac{3}{2}$．…………………………………………………………………………… 7 分

则 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,1)$，

$E(\frac{1}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4},0)$，$C(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$．

$\overrightarrow{PC}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-1)$，$\overrightarrow{PE}=(\frac{1}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4},-1)$ …… 9 分



$\because y$ 轴 $\perp$ 平面 PAD，$\therefore$ 平面 PAD 的一个法向量为

$\boldsymbol{n}=(0,1,0)$．………………………………… 10 分

设平面 PCE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-z=0\\ \frac{1}{4}x+\frac{3\sqrt{3}}{4}y-z=0\end{cases}$，

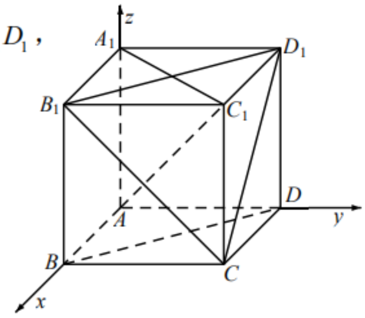
以上两式相减得 $\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y=0$，取 $x=-\sqrt{3}$，则 $y=3$，$z=2\sqrt{3}$，$\therefore \boldsymbol{m}=(-\sqrt{3},3,2\sqrt{3})$．……

…………………………………………………………………………………… 11 分

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$．

$\therefore$ 平面 PAD 与平面 PCE 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$．……………………… 12 分

36. 【解析】



（1）证明：连接 A_1C_1，则 $B_1D_1 \perp A_1C_1$，因为 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，

$B_1D_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$， 所以 $AA_1 \perp B_1D_1$；

又因为 $AA_1 \cap A_1C_1 = A_1$，所以 $B_1D_1 \perp$ 平面 AA_1C_1；

因为 $AC_1 \subset$ 平面 AA_1C_1，所以 $B_1D_1 \perp AC_1$；

同理 $B_1C \perp AC_1$；因为 $B_1D_1 \cap B_1C = B_1$，所以 $AC_1 \perp$ 平面 B_1CD_1；

因为 $AC_1 /\!/$ 平面 α，过直线 AC_1 作平面 β 与平面 α 相交于直线 l，则 $AC_1 /\!/ l$；

所以 $l \perp$ 平面 B_1CD_1；又 $l \subset$ 平面 α，

所以 平面 $\alpha \perp$ 平面 B_1CD_1；

（2）设正方体的棱长为 1，以 A 为坐标原点，AB，AD，AA_1 分别为 x，y，z 轴正方向建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，$C_1(1,1,1)$，

所以 $\overrightarrow{AC_1} = (1,1,1)$，$\overrightarrow{BD} = (-1,1,0)$.

设平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0 \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$，取 $x = 1$，则 $\boldsymbol{n} = (1,1,-2)$；

设 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AC_1}(0 \leqslant t \leqslant 1)$，则 $\overrightarrow{AP} = (t,t,t)$，因为 $\overrightarrow{BA} = (-1,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = (t-1,t,t)$；

设直线 BP 与平面 α 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta = \dfrac{|\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BP}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BP}|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}\sqrt{3t^2 - 2t + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}\sqrt{3(t-\frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3}}}$，

所以 当 $t = \dfrac{1}{3}$ 时，$\sin\theta$ 取到最大值为 $\dfrac{1}{2}$，

此时 θ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{6}$.