专题八　函数与导数

一、单项选择

1.（济宁一模 3）已知 a=sin2，6=log$_2$0.2，c=$2^{0.2}$，则

A. a>b>c　　　B. c>a>b　　　C. b>a>c　　　D. c>b>a

2.（潍坊一模 3）在一次数学实验中，某同学运用图形计算器采集到如下一组数据：

x	-2	-1	1	2	3
y	0.24	0.51	2.02	3.98	8.02

在以下四个函数模型（a，b 为待定系数）中，最能反映 x，y 函数关系的是

A. $y=a+bx$　　　B. $y=a+\frac{b}{x}$　　　C. $y=a+\log_b x$　　　D. $y=a+b^x$

3.（滨州一模 4）定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，且 $\forall x_1$，$x_2\in[0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$ 时，都有 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$，则（　　）

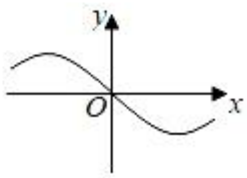
A. $f(\log_4 3)<f(\log_3\frac{1}{4})<f(2^{\frac{1}{2}})$

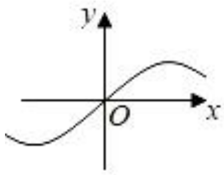
B. $f(\log_3\frac{1}{4})<f(\log_4 3)<f(2^{\frac{1}{2}})$

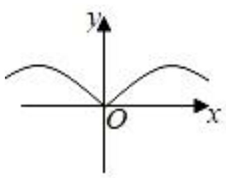
C. $f(\log_3\frac{1}{4})<f(2^{\frac{1}{2}})<f(\log_4 3)$

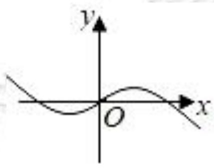
D. $f(2^{\frac{1}{2}})<f(\log_4 3)<f(\log_3\frac{1}{4})$

4.（菏泽一模 5）函数 $y=\frac{x+\sin x}{e^x+e^{-x}}$ 的图象大致为（　　）

A.


B.


C.


D.


5.（烟台一模 5）某工厂产生的废气经过滤后排放，过滤过程中废气的污染物含量 P(单位：mg/L)与时间 t(单位：h)间的关系式为$P=P_0e^{-kt}$，其中 P_0，k 为正常数.如果一定量的废气在前 10h 的过滤过程污染物被消除了 20%，那么污染物减少到最初含量的 50%还需要经过多长时间？（结果四舍五入取整数，参考数据：ln2≈0.693，ln5≈1.609）

A.11h　　　B.21h　　　C.31h　　　D.41h

6.（泰安一模 6）已知定义在 **R** 上的偶函数 $f(x)$ 在（$-\infty$，0）上单调递增，则（　　）

A．$f(2^{-\frac{3}{4}}) < f(\log_{\frac{1}{4}}6) < f(\log_4\frac{1}{5})$

B．$f(\log_{\frac{1}{4}}6) < f(\log_4\frac{1}{5}) < f(2^{-\frac{3}{4}})$

C．$f(\log_{\frac{1}{4}}6) < f(2^{-\frac{3}{4}}) < f(\log_4\frac{1}{5})$

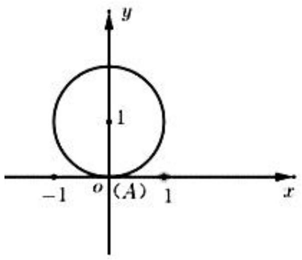
D．$f(2^{-\frac{3}{4}}) < f(\log_4\frac{1}{5}) < f(\log_{\frac{1}{4}}6)$

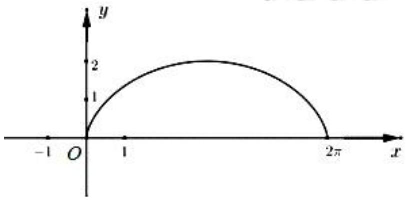
7.（青岛一模 5）若$f(x)=\begin{cases} log_3(x+1), x\ge 0 \\ 2^x, x<0 \end{cases}$，则不等式$f(x)>\frac{1}{2}$的解集为（　　）

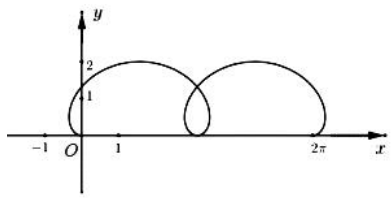
A. $(-1,0)\cup(\sqrt{3}-1,+\infty)$　　B. $(-\infty,1-\sqrt{3})\cup(1,+\infty)$

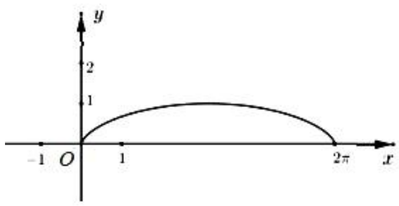
C. $(-1,0)\cup(0,\sqrt{3}-1)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(\sqrt{3}-1,+\infty)$

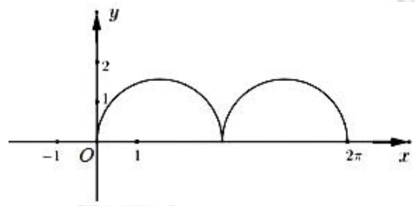
8.（日照一模 6）如图所示，单位圆上一定点 A 与坐标原点重合. 若单位圆从原点出发沿 x 轴正向滚动一周则 A 点形成的轨迹为



A. 

B. 

C. 

D. 

9.（潍坊一模 7）已知 $2020^a=2021$， $2021^b=2020$， $c=\ln 2$， 则

A． $\log_a c>\log_b c$　　B． $\log_c a>\log_c b$　　C． $a^c<b^c$　　D． $c^a<c^b$

10.（烟台一模 7）已知 f(x)是定义在 R 上的奇函数，f(2-x)=f(x)，当 x∈[0,1]时，$f(x)=x^3$，则

A.f(2021)=0　　B.2 是 f(x)的一个周期

C.当 x∈(1,3)时，f(x)=(1-x)3　　D.f(x)>0 的解集为(4k,4k+2)(k∈Z)

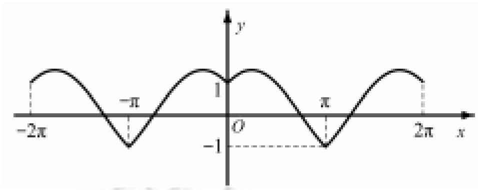
11.（济南一模 6）函数 y=f(x)在［-2π,2π]上的图象如图所示，则 f(x)的解析式可能是

A.f(x)=sinx+cosx

B.f(x)=|sinx|+cosx

C.f(x)=sin|x|+cosx

D.f(x)=sin|x|+|cosx|



12.（青岛一模 7）已知 $y=f(x)$ 为奇函数，$y=f(x+1)$ 为偶函数，若当 $x\in[0,1]$，$f(x)=\log_2(x+a)$，

则 $f(2021)=$

A.-1　　B.0　　C.1　　D.2

13.（德州一模 7）设函数 $f(x)=xe^x-a(x-1)$，其中 $a<1$，若存在唯一整数 x_0，使得 $f(x_0)<a$，则 a 的取值范围是（　　）

A．$[-\frac{1}{e^2}, 1)$　　B．$[-\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e})$　　C．$[\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e})$　　D．$[\frac{1}{e^2}, 1)$

14.（聊城一模 8）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\le 0,\\ \ln x, x>0,\end{cases}$ $g(x)=|x||x-2|$，若方程 $f(g(x))+g(x)-m=0$ 的所有实根之和为 4，则实数 m 的取值范围为

A．m>1　　B．m⩾1　　C．m<1　　D．m⩽1

15.（滨州一模 7）定义在 **R** 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x)=f(2-x)$，当 $x\in[-2, 0]$时，$f(x)=x+2$，设函数 $h(x)=e^{-|x-2|}$（$-2<x<6$）（e 为自然对数的底数），则 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的图象所有交点的横坐标之和为（　　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

16.（2021•临沂一模 7）高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的美誉，用其名字命名的“高斯函数”：设 $x\in$**R**，用$[x]$表示不超过 x 的最大整数，则 $y=[x]$称为高斯函数，也称取整函数，例如：$[-3.7]=-4$，$[2.3]=2$．已知 $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{1}{2}$，则函数 $y=[f(x)]$的值域为（　　）

A．{0}　　B．{－1，0}　　C．{－2，－1，0}　　D．{－1，0，1}

17.（济南一模 8）设 a=20221n2020, b=2021ln2021, c=20201n2022,则

A.a>c>b　　B.c>b>a　　C.b>a>c　　D.a>b>c

二、多项选择

18.（2021•淄博一模 10）已知函数 $f(x)=2^x+2^{-x}$，则下列结论正确的是（　　）

A．$f(x)$ 是偶函数　　B．$f(x)$ 是增函数

C．$f(x)$ 最小值是 2　　D．$f(x)$ 最大值是 4

19.（济南一模 10）已知函数 $f(x)=x^3-ax+1$ 的图象在 x=2 处切线的斜率为 9,则下列说法正确的是

A.a=3　　　　B.f(x)在 x= -1 处取得极大值

C.当 x∈(-2,1]时，f(x) ∈(-1,3]　　D.f(x)的图象关于点（0,1)中心对称

20.（潍坊一模 10）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\ge 0\\ \cos x, & x<0\end{cases}$，　则下列结论正确的是

A．$f(x)$ 是偶函数　　B．$f(f(-\frac{3}{2}\pi))=1$

C．$f(x)$ 是增函数　　D．$f(x)$ 的值域为$[-1，+\infty)$

21.（菏泽一模 10）对于函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，下列说法正确的是（　　）

A．f（x）在 $x=\sqrt{e}$处取得极大值$\frac{1}{2e}$

B．f（x）有两个不同的零点

C．$f(\sqrt{2})<f(\sqrt{\pi})<f(\sqrt{3})$

D．若$f(x)<k-\frac{1}{x^2}$在（0，+∞）上恒成立，则$k>\frac{e}{2}$

22.（日照一模 10）已知$x_1+log_3^{x_1}=0, x_2+log_2^{x_2}=0$，则

A. $0<x_2<x_1<1$　　B. $0<x_1<x_2<1$

C. $x_2\lg x_1-x_1\lg x_2<0$　　D. $x_2\lg x_1-x_1\lg x_2>0$

23.（青岛一模 11）若实数 $a<b$，则下列不等式关系正确的是（　　）

A.$(\frac{2}{5})^b<(\frac{2}{5})^a<(\frac{3}{5})^a$

B.若 $a>1$,则$\log_a ab>2$

C.若$a>0$,则$\frac{b^2}{1+a}>\frac{a^2}{1+b}$

D.若$m>\frac{5}{3}, a,b\in(1,3)$，则$\frac{1}{3}$（$a^3-b^3)-m(a^2-b^2)+a-b>0$

24.（滨州一模 11）若 $0<x_1<x_2<1$，e 为自然对数的底数，则下列结论错误的是（　　）

A．$x_2e^{x_1}<x_1e^{x_2}$　　B．$x_2e^{x_1}>x_1e^{x_2}$

C．$e^{x_2}-e^{x_1}>\ln x_2-\ln x_1$　　D．$e^{x_2}-e^{x_1}<\ln x_2-\ln x_1$

25.（泰安一模 11）已知函数 f（x）是定义在 **R** 上的奇函数，当 $x>0$ 时，f（x）$=\frac{x-1}{e^x}$．则下列结论正确的是（　　）

A．当 $x<0$ 时，f（x）$=-e^x$（$x+1$）

B．函数 f（x）在 **R** 上有且仅有三个零点

C．若关于 x 的方程 f（x）＝m 有解，则实数 m 的取值范围是 f（－2）≤m≤f（2）

D．$\forall x_1$，$x_2\in$**R**，$|f(x_2)-f(x_1)|<2$

26.（日照一模 11）已知函数 f(x)对于任意 x∈R，均满足 f(x)=f(2−x).当 x≤1 时$f(x)=\begin{cases}lnx,0<x\le 1\\ e^x,x\le 0\end{cases}$

若函数 g(x)=m|x|-2-f(x)，下列结论正确的为

A. 若 m<0，则 g(x)恰有两个零点

B. 若$\frac{3}{2}<m<e$，则 g(x)有三个零点

C. 若$0<\mathrm{m}\le\frac{3}{2}$，则 g(x)恰有四个零点

D. 不存在 m 使得 g(x)恰有四个零点

27.（济宁一模 12）已知函数 $f(x)=e^{\sin x}-e^{\cos x}$，其中 e 是自然对数的底数，下列说法中正确的是

A. 函数 f(x)的周期为 2π

B. f(x)在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上是减函数

C. $f(x+\frac{\pi}{4})$是奇函数

D. f(x)在区间$(\frac{\pi}{2},\pi)$上有且仅有一个极值点

三、填空

28.（2021•临沂一模 13）若函数 f（x）满足：

（1）对于任意实数 x_1，x_2，当 $0<x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$；

（2）$f(\frac{x_1}{x_2})=f(x_1)-f(x_2)$，则 f（x）＝______.（答案不唯一，写出满足这些条件的一个函数即可）

29.（潍坊一模 14）写出一个存在极值的奇函数 $f(x)$＝_______.

30.（日照一模 13）若函数$f(x)=log_a x(a>1)$，在区间[a,2a]上的最大值是最小值的 3 倍，则 a=________.

31.（济宁一模 14）已知函数$f(x)=\begin{cases}e^x，x>0\\ f(x+2)，x\le 0\end{cases}$，则 f(−5)=_________.

32.（日照一模 15）已知函数$f(x)=\frac{3^{x+1}+a}{3^x+1}$(a≥3)，若对任意 x_1，x_2，x_3∈R，总有 $f(x_1)$，$f(x_2)$，$f(x_3)$为某一个三角形的边长，则实数 a 的取值范围是__________.

33.（2021•淄博一模 16）已知函数 f（x）＝$|x^3+2^x+a|$在[1，2]上的最大值是 6，则实数 a 的值是______.

34.（菏泽一模 16）已知 f（x）是定义在 **R** 上的偶函数，且 f（0）＝1，g（x）＝f（x－1）是奇函数，则 f（2021）＝______，$\sum_{i=1}^{4n-1} f(i)$=_____.

35.（德州一模 16）设定义在 D 上的函数 $y=f$（x）在点 P（x_0，f（x_0））处的切线方程为 l：$y=g$（x），当 $x\ne x_0$ 时，若$\frac{g(x)-f(x)}{x-x_0}$<0 在 D 内恒成立，则称 P 点为函数 $y=f$（x）的“类对称中心点”，则函数 h

（x）$=\frac{x^2}{2e}+\ln x$ 的“类对称中心点”的坐标为________.

四、解答

36.（济南一模 18）已知函数 f(x)= $\begin{cases} a(x+1)e^x, x\le 0. \\ x^2-ax+\frac{1}{2}x, x>0. \end{cases}$.

（1)若 a=2,求 f(x)的最小值；（2)若 f(x)恰好有三个零点，求实数 a 的取值范围.

37.（潍坊一模 21）已知函数 $f(x)=\frac{x^2-a}{\sin x}-2\ (a\in \mathrm{R})$.

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在点($\frac{\pi}{2}$，$f(\frac{\pi}{2})$)处的切线经过坐标原点，求实数 a；

（2）当 $a>0$ 时，判断函数 $f(x)$ 在 $x\in(0,\pi)$上的零点个数，并说明理由.

38.（菏泽一模 22）已知函数 f（x）$=\ln x-kx$（$k\in\mathbf{R}$），g（x）$=x$（e^x-2）.

（1）若 f（x）有唯一零点，求 k 的取值范围；

（2）若 g（x）$-f$（x）$\geqslant 1$ 恒成立，求 k 的取值范围.

39.（日照一模 22）已知函数$\mathrm{f(x)}=e^x-ax-1, g(x)=kx^2$.

（1）当 a>0 时，求 f(x)的值域；

（2）令 a=1，当 x∈(0,+∞)时，$\mathrm{f(x)}\ge\frac{g(x)}{\ln(x+1)}-x$恒成立，求 k 的取值范围.

40.（泰安一模 22）已知函数 $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}x^2+(2a-1)x\ (a\in\mathbf{R})$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的极值点的个数；

（2）已知函数 $g(x)=\frac{e^x}{x}-f'(x)$ 有两个不同的零点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$.证明：$x_2-x_1<\frac{4a^2-2a-1}{2a-1}$.

41.（2021•淄博一模 22）已知数列 $an=(1+\frac{1}{n})^n(n\in N^*)$

(1) 证明：$a_n<e$ (n∈N*, e 是自然对数的底数)；

(2) 若不等式 $(1+\frac{1}{n})^{n+a}\le e$ (n∈N*, a>0) 成立，求实数 a 的最大值。

42.（聊城一模 22）已知函数 $f\left(x\right)=\frac{x^2-ax\ln x+1}{x}$．

(1)讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

(2)若 $2f\left(x\right)+3\ln 2>5$，求 a 的取值范围.

43.（青岛一模 22）青岛胶东国际机场的显著特点之一是弯曲曲线的运用，衡量曲线弯曲程度的重要指标是曲率，曲线的曲率定义如下：若 $f'(x)$是$f(x)$ 的导函数，$f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的曲率 $K=\dfrac{|f''(x)|}{(1+[f'(x)]^2)^{\frac{3}{2}}}$。

已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-b\cos(x-1)$（$a\geq 0, b>0$），若 a=0 则曲线 $y=f(x)$ 在点$(1, f(1))$处的曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

（1）求 b；

（2）若函数 $y=f(x)$ 存在零点，求 a 的取值范围；

（3）已知 $1.098<\ln 3<1.099, e^{0.048}<1.050$，$e^{-0.045}<0.956$，证明：$1.14<\ln\pi<1.15$

44.（滨州一模 22）已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{2}-ax+\dfrac{4a}{x}$（$a>0$）.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $0<a<\dfrac{1}{4}$，求函数 $f(x)$在区间$(0, \dfrac{1}{a^2})$上零点的个数.（附：对于任意 $x>0$，都有 $f(x)+f(\dfrac{4}{x})=0$）.

45.（烟台一模 22）已知函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\cos x$，$f'(x)$为 f(x)的导数.

（1）求函数 f(x)的极值；

（2）设函数$g(x)=\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)e^x-a\left(\frac{1}{6}x^3+\sin x-x\right), a\in R$，讨论 g(x)的单调性；

（3）当 x≥0 时，$f'(x)\le e^x+bx-1$，求实数 b 的取值范围.

46.（德州一模 22）已知函数 $f(x)=xe^{3x}-(a+1)\ln x+\frac{2}{x}-1$，$g(x)=-a\ln x+(a+2)x+\frac{2}{x}$. 定义新函数 $d(f,g)=|f(x)-g(x)|_{min}$.

（1）当 $a\leqslant-2$ 时，讨论函数 $g(x)$ 的单调性；

（2）若新函数 $d(f,g)$ 的值域为$[0,+\infty)$，求 a 的取值范围.

47.（济宁一模 22）已知函数 $f(x)=(a-1)\ln x+\frac{x^2}{2}-a(x-1)$ $(a>2)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(m)=f(1)$ 且 $m\neq1$，证明：$\forall x\in(1,m]$，$(a-1)\ln x>x-1$.

48.（2021•临沂一模 22）已知函数$f(x)=e^{x-1}+x^2+2x-4$, $g(x)=\frac{1}{2}ax^2-x+2a\cos x+\ln(x+1)$.

(1)判断 f(x)的单调性，并求 f(x)的最值

2)用$\max\{m,n\}$表示 m,n 的最大值，记函数$h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$,讨论 h(x)的零点个数.

专题八　函数与导数

一、单项选择

1.【答案】C

解析：$\because \frac{\pi}{2}<2<\pi$，$\therefore 0<a<1$；$b=\log_2 0.2<\log_2 1=0$；$c=2^{0.2}>2^0=1$。$\therefore c>a>b$

2.【答案】D

【解析】由于 x 可以取负数，排除 C，再根据 $f(\frac{1+3}{2})<\frac{f(1)+f(3)}{2}$，可确定 A，B 均错误，故选 D.

3.【答案】B

【解析】由题意可知函数 $f(x)$ 是奇函数且在 **R** 上单调递增，

又因为 $\log_3\frac{1}{4}<0<\log_4 3<1<2^{\frac{1}{2}}$，

$\therefore f(\log_3\frac{1}{4})<f(\log_4 3)<f(2^{\frac{1}{2}})$，

故选：B.

4.【答案】B

【解析】$f(-x)=\frac{-x-\sin x}{e^{-x}+e^{x}}=-f(x)$，则函数 $f(x)$ 是奇函数，图象关于原点对称，排除 C，

$f(1)=\frac{1+\sin 1}{e+\frac{1}{e}}>0$，排除 A，

当 $x\to+\infty$ 时，$y\to 0$，排除 D，

故选：B.

5.【答案】B

【解析】当 t=0 时，$P=P_0$，可知 P_0 时污染物含量的初始值，当 t=10 时，$P=0.8P_0=\frac{4}{5}P_0$，所以 $\frac{4}{5}P_0=P_0e^{-10k}$，

即 $-10k=\ln\frac{4}{5}$，$-k=\frac{\ln\frac{4}{5}}{10}$，设还需经过 t_1 小时减少到最初含量的 50%，即 $\frac{1}{2}P_0=P_0e^{-k(10+t_1)}$，

所以 $-k(10+t_1)=\ln\frac{1}{2}$，即 $10+t_1=\frac{\ln\frac{1}{2}}{-k}=\frac{10\ln\frac{1}{2}}{\ln\frac{4}{5}}=\frac{10\ln 2}{\ln 5-\ln 4}\approx 31, t_1=21$，故选 B

6.【答案】B

【解析】∵偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，

∴函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，

$\because \log_{\frac{1}{4}}6=-\log_4 6$，$\log_4\frac{1}{5}=-\log_4 5$，

$\therefore f$（$\log_{\frac{1}{4}}6$）$=f$（$\log_4 6$），f（$\log_4\frac{1}{5}$）$=f$（$\log_4 5$），

∵$\log_4 6>\log_4 5>1>>0$，

$\therefore f$（$\log_{\frac{1}{4}}6$）$<f$（$\log_4\frac{1}{5}$）$<f$（$2-\frac{3}{4}$），

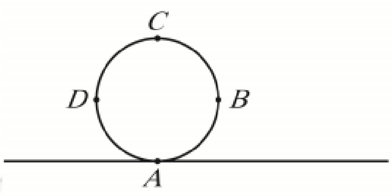
故选：B.

7.【答案】A

【解析】当 x⩾0 时，$f(x)=log_3(x+1)>\frac{1}{2}$，而$\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$，所以 $x+1>\sqrt{3}$，$x>\sqrt{3}-1$；当 x<0 时，$f(x)=2^x>\frac{1}{2}$，而$2^{-1}=\frac{1}{2}$，所以-1<x<0，故选 A。

8.【答案】A

【解析】如图所示，记 B,C,D 为圆上的三个四等分圆周的点，由题意可知：圆是顺针滚动的



因为圆的周长为 2π ,所以 AB=BC=CD=AD=$\frac{\pi}{2}$,且圆上点的纵坐标最大值为 2,当圆顺时针滚动 π 单位长度时，此时 A.C 的相对位置互换，所以 A 的纵坐标为 2,排除 BCD,故选 A.

9.【答案】D

【解析】首先可判断出 $0<b<1<a$，$0<c<1$，$\therefore c^a<c^b$，故选 D.

10.【答案】D

【解析】因为 f(x)是奇函数，所以 f(x)=f(2-x)=-f(x-2),所以 T=4 且 f(x)图象关于直线 x=1 对称，

因此 f(2021)=f(1)=1.由奇偶性可得，当 x∈[-1,1]时，$f(x)=x^3$,

当 x∈(1,3)时，x-2∈(-1,1)，$f(x-2)=(x-2)^3=-f(x)$,所以 $f(x)=(2-x)^3$,

由周期性知，当 x∈[-1,3]时，f(x)>0 的解集为(0,2)。

当 x∈R 时，f(x)>0 的解集为（4k,4k+2）(k∈Z),故选 D.

11.【答案】B

【解析】有图像知，f(x)为偶函数，可排除 A；当 x=π 时 f(x)=-1，可排除 D；对于 C，当 x>0 时，$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，在$x=\frac{5\pi}{4}$时，取得最小值$-\sqrt{2}$，不符合题意，排除 C，故选 B。

12.【答案】C

【解析】因为 f(x)为奇函数，所以 f(-x)=-f(x)，f(0)=0；又因为 x∈[0, 1]时，$f(x)=\log_2(x+a)$，所以 $f(0)=\log_2 a=0$，a=1；因为 f(x+1)为偶函数，所以 f(-x+1)=f(x+1)，f(-x)=f(x+2)=-f(x)，因此 T=4，$f(2021)=f(1)=\log_2 2=1$，故选 C。

13.【答案】C

【解析】函数 f（x）$=xe^x-a$（$x-1$），其中 $a<1$，

设 g（x）$=xe^x$，$y=ax$，

∵存在唯一的整数 x_0，使得 $f(x_0)<a$，

∴存在唯一的整数 x_0，使得 $g(x_0)$ 在直线 $y=ax$ 的下方，

∵$g'(x)=(x+1)e^x$，

∴当 $x<-1$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>-1$ 时，$g'(x)>0$，

∴$g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

∴当 $x=-1$ 时，$[g(x)]_{min}=g(-1)=-\frac{1}{e}$.

当 $x=0$ 时，$g(0)=0$，当 $x=-2$ 时，$g(-2)=-\frac{2}{e^2}$，

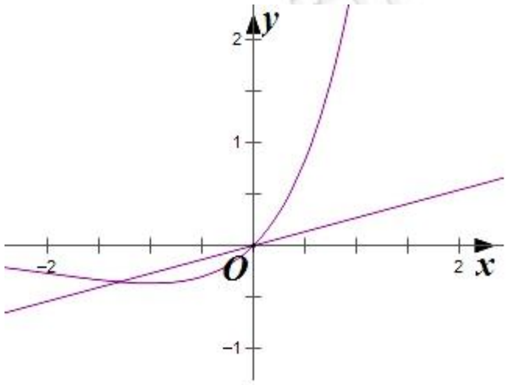
直线 $y=ax$ 恒过 $(0,0)$，斜率为 a，

故 $-a>g(-1)=-\frac{1}{e}$，且 $g(-2)=-\frac{2}{e^2}\geqslant -2a$，

解得 $\frac{1}{e^2}\leqslant a<\frac{1}{e}$，

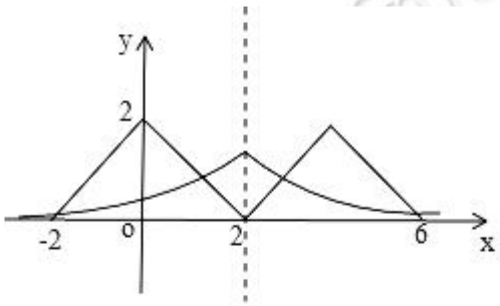
∴a 的取值范围是 $[\frac{1}{e^2},\frac{1}{e})$.

故选：C.



14.【答案】C

15.【解析】由 $f(2+x)=f(2-x)$ 且 $f(x)$ 是偶函数，可知函数 $f(x)$ 的周期为 4，



由题意可知 $f(x)$ 和 $h(x)$ 的图象都是关于 $x=2$ 对称，因此四个交点的横坐标也都关于直线 $x=2$ 对称，所以四个交点的横坐标之和为 8，

故选：D.

16.【答案】B

【分析】分离常数可得出 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{e^x+1}$，然后根据 $e^x>0$ 可求出 $f(x)$ 的范围为 $-\frac{1}{2}<f(x)<0$ 或 $0\leq f(x)<\frac{1}{2}$，然后即可求出 $y=[f(x)]$ 的值域.

【解答】$f(x)=1-\frac{1}{e^x+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{e^x+1}$，

$\because e^x+1>1$，$\therefore -1<-\frac{1}{e^x+1}<0$，$-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{e^x+1}<\frac{1}{2}$，

$\therefore -\frac{1}{2}<f(x)<0$，$0\leq f(x)<\frac{1}{2}$，

$\therefore [f(x)]=-1$ 或 0，

$\therefore y=[f(x)]$ 的值域为 $\{-1，0\}$.

故选：B.

17.【答案】D

【解析】设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，在 $(e,+\infty)$，$f'(x)<0$，f(x)递减

所以 f(2020)>f(2022)，即：$\frac{\ln 2020}{2020}>\frac{\ln 2022}{2022}$

所以 2022ln2020>2020ln2022，即 a>c

又 c-b=2020ln2022-2021ln2021=2020(ln2022-ln2021)-ln2021=$2020\ln\frac{2022}{2021}-\ln 2021<0$

故 c-b<0，c<b

所以 a>b>c，故选 D。

二、多项选择

18.【答案】AC

【分析】利用偶函数的定义判断 A；举例说明 B 错误；求出函数最小值判断 C；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，说明 D 错误.

【解答】函数 $f(x)=2^x+2^{-x}$ 的定义域为 **R**，且 $f(-x)=f(x)$，则函数为偶函数，故 A 正确；

$\because f(1)=f(-1)=\frac{5}{2}$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 不是单调函数，故 B 错误；

$f(x)=2^x+2^{-x}\geqslant 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$，当且仅当 $2^x=2^{-x}$，即 $x=0$ 时等号成立，

$\therefore f(x)$ 最小值是 2，故 C 正确；

当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=2^x+2^{-x}\to+\infty$，函数 $f(x)$ 无最大值，故 D 错误.

故选：AC.

19.【答案】ABD

【解析】$f'(x)=3x^2-a$，由题意得 $f'(2)=12-a=9$，$\therefore a=3$，A 正确；$f'(x)=3(x-1)(x+1)$，由 $f'(x)=0$ 得，x=-1 或 1，所以在(-∞,-1)，(1，+∞)上 $f'(x)>0$,f(x)为增函数，在(-1,1)上 $f'(x)<0$,f(x)为减函数，所以 f(x)在 x=-1 处取得极大值，B 正确；因为 f(1)=-1，f(-1)=3，故在(-2,1]上的值域为[-1,3]，C 错误；令 f(x)=g(x)+1,则 $g(x)=x^3-x$ 是奇函数，g(x)图象关于(0,0)中心对称，所以 f(x)关于(0,1)中心对称，D 正确；故选 ABD。

20.【答案】BD

【解析】很明显 $f(x)$ 既不是偶函数，也不是增函数，故选 BD.

21.【答案】ACD

【解析】①函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$，所以 $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$ $(x>0)$，

令 $f'(x)=0$，即 $2\ln x=1$，解得 $x=\sqrt{e}$，

当 $0<x<\sqrt{e}$ 时，$f'(x)>0$，故函数在 $(0,\sqrt{e})$ 上为单调递增函数.

当 $x>\sqrt{e}$ 时，$f'(x)<0$，故函数为单调递减函数．所以函数在 $x=\sqrt{e}$ 时取得极大值 $f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}$，故 A 正确，

②由于当 $x=1$ 时，$f(1)=0$，当 $0<x<\sqrt{e}$ 时，$f'(x)>0$，故函数在 $(0,\sqrt{e})$ 上为单调递减函数，当 $x>\sqrt{e}$ 时，$f'(x)<0$，故函数为单调递增函数，且 $f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}>0$.

所以函数 $f(x)$ 没有零点．故 B 错误.

③由于当 $x>\sqrt{e}$ 时，$f'(x)<0$，故函数为单调递减函数.

所以 $f(\sqrt{\pi})<f(\sqrt{3})$，

由于 $f(\sqrt{2})=\dfrac{\ln\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\ln 2}{4}$，$f(\sqrt{\pi})=\dfrac{\ln\sqrt{\pi}}{\pi}=\dfrac{\ln\pi}{2\pi}$

所以 $f(\sqrt{\pi})-f(\sqrt{2})=\dfrac{\ln\pi^2}{4\pi}-\dfrac{\ln 2^{\pi}}{4\pi}$，

由于 $\pi^2>2^{\pi}$，

所以 $f(\sqrt{2})<f(\sqrt{\pi})$，即 $f(\sqrt{2})<f(\sqrt{\pi})<f(\sqrt{3})$，故 C 正确.

④由于 $f(x)<k-\dfrac{1}{x^2}$，故 $k>f(x)+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\ln x+1}{x^2}$，由于函数在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以$k>(\frac{\ln x+1}{x^2})_{max}$，设$g(x)=\frac{\ln x+1}{x^2}$，则$g'(x)=\frac{-2\ln x-1}{x^3}$，

令$g'(x)=0$，解得$x=\frac{1}{\sqrt{e}}$，

所以$0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$函数单调递增，$x>\frac{1}{\sqrt{e}}$函数单调递减，

所以$g(x)_{max}=g(\frac{1}{\sqrt{e}})=e-\frac{e}{2}=\frac{e}{2}$.

故$k>\frac{e}{2}$，故 D 正确.

故选：ACD.

22. 【答案】BC

【解析】由 $x_1+\log_3 x_1=0, x_2+\log_3 x_2=0$，得 $0<x_1<1, 0<x_2<1$，由图像得 $0<x_1<x_2<1$，.构造函数 $f(x)=\frac{\lg x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{\lg e-\lg x}{x^2}$，所以 $f(x)=\frac{\lg x}{x}$ 在 $(0,\ e)$ 递增；所以 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $x_2\lg x_1-x_1\lg x_2<0$.故选 **BC.**

23.【答案】BCD

【解析】因为函数$y=(\frac{2}{5})^x$为减函数，所以$(\frac{2}{5})^b<(\frac{2}{5})^a$正确，但当 a=0 时，$(\frac{2}{5})^a=(\frac{3}{5})^a=1$，因此 A 错误；因为 a>1,a<b，所以 $ab>a^2$，$\log_a ab>\log_a a^2=2$，因此 B 正确；$\frac{b^2}{1+a}-\frac{a^2}{1+b}=\frac{b^2+b^3-a^2-a^3}{(1+a)(1+b)}=\frac{(b^2-a^2)+(b^3-a^3)}{(1+a)(1+b)}=\frac{(b-a)(b+a+b^2+a^2+ab)}{(1+a)(1+b)}$，因为 a>0，a<b，所以$\frac{b^2}{1+a}-\frac{a^2}{1+b}>0$，即$\frac{b^2}{1+a}>\frac{a^2}{1+b}$，因此 C 正确；要证$\frac{1}{3}(a^3-b^3)-m(a^2-b^2)+a-b>0$，只要证$\frac{1}{3}a^3-ma^2+a>\frac{1}{3}b^3-mb^2+b$，令$f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+x$，$x\in(1,3)$，则$f'(x)=x^2-2mx+1$为开口向上的二次函数，而$f'(1)=2-2m<-\frac{4}{3}, f'(3)=10-6m<0$，因此$f'(x)<0$，f(x)在(1,3)上为减函数，又因为 a<b，所以 f(a)>f(b)，因此 D 正确；故选 BCD。

24.【答案】BC

【解析】令$f(x)=\frac{e^x}{x}$，则$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，函数单调递增，当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$，函数单调递减，

因为 $0<x_1<x_2<1$，

所以 $f(x_1)>f(x_2)$，即$\frac{e^{x_1}}{x_1}>\frac{e^{x_2}}{x_2}$，

所以$x_2e^{x_1}>x_1e^{x_2}$，A 错误，B 正确；

令 $g(x)=e^x+lnx$，易得 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $0<x_1<x_2<1$ 时，$g(x_1)<g(x_2)$，

所以 $e^{x_1}+\ln x_1<e^{x_2}+\ln x_2$，即 $e^{x_2}-e^{x_1}>\ln x_2-\ln x_1$，$C$ 正确，D 错误.

故选：BC.

25.【答案】 BD

【解析】根据题意，依次分析选项：

对于 A，当 $x<0$ 时，则 $-x>0$，则 $f(-x)=\frac{-x-1}{e^{-x}}=-(x+1)e^x$，又由 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)=-f(-x)=e^x(x+1)$，A 错误；

对于 B，当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{x-1}{e^x}$，此时 $f(x)=0$，即 $x=1$，又由 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(-1)=-f(1)=0$，$f(0)=0$，即函数函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有且仅有三个零点，B 正确；

对于 C，当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{x-1}{e^x}$，其导数 $f'(x)=\frac{2-x}{e^x}$，在区间 $(0,2)$ 上，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 为增函数，在区间 $(2,+\infty)$ 上，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 为减函数，

则在区间 $(0,+\infty)$ 上有极大值 $f(2)=\frac{1}{e^2}$，而 $x\to0$，$f(x)\to-1$，则在区间 $(0,+\infty)$ 上，有 $-1<f(x)\leqslant\frac{1}{e^2}$，

又由 $f(x)$ 为奇函数，则在区间 $(-\infty,0)$ 上，由 $-\frac{1}{e^2}\leqslant f(x)<1$，

综合可得：$f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$，

若关于 x 的方程 $f(x)=m$ 有解，则实数 m 的取值范围是 $-1<m<1$，C 错误；

对于 D，由 C 的结论，$f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$，则 $\forall x_1$，$x_2\in\mathbf{R}$，$|f(x_2)-f(x_1)|<1-(-1)=2$，D 正确；

故选：BD.

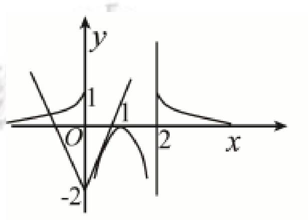
26.【答案】 ABC

【解析】由 $f(x)=f(2-x)$ 知 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，

如图，令 $g(x)=0$，即 $m|x|-2=f(x)$，

设 $h(x)=m|x|-2$,当 $x>0$ 时 $h(x)=mx-2$，

设 $h(x)$ 与 $y=\ln x(x\le 1)$ 相切时的切点为 $P(x_0,\ln x_0)$, $y'=\dfrac{1}{x}$，



则有 $\dfrac{\ln x_0+2}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，解得 $x_0=\dfrac{1}{e}$, 此时 $m=\dfrac{1}{x_0}=e$，

当 $h(x)$ 过点 $(2,1)$ 时，$m=\dfrac{3}{2}$,所以当 $\dfrac{3}{2}<m<e$ 时，$g(x)$ 恰有三个零点，故

B 正确。若 $g(x)$ 恰有两个零点，则 $m<0$ 或 $m=e$,所以若 $m<0$,则 $g(x)$ 恰有两个零点.故 **A** 正确；若 $g(x)$ 恰有四个零点，则 $0<m\le\dfrac{3}{2}$，故 **C** 正确，**D** 错误.故选 **ABC**.

27.【答案】ACD

【解析】 $f(x+2\pi)=e^{\sin(x+2\pi)}-e^{\cos(x+2\pi)}=e^{\sin x}-e^{\cos x}=f(x)$，$\therefore$ A 正确

$f'(x)=\cos x\cdot e^{\sin x}+\sin x\cdot e^{\cos x}$，当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, $f'(x)>0$, $\therefore$ $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 为增函数，B 错误

设 $g(x)=f(x+\dfrac{\pi}{4})=e^{\sin(x+\frac{\pi}{4})}-e^{\cos(x+\frac{\pi}{4})}$，

则 $g(-x)=e^{\sin(-x+\frac{\pi}{4})}-e^{\cos(-x+\frac{\pi}{4})}=e^{\cos(x+\frac{\pi}{4})}-e^{\sin(x+\frac{\pi}{4})}=-g(x)$，所以 $g(x)$ 是奇函数，C 正确

对于 D 选项，$f'(x)=\cos x\,e^{\sin x}+\sin x\,e^{\cos x}=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\left(\frac{e^{\sin x}}{\sin x}+\frac{e^{\cos x}}{\cos x}\right)$

令$g(t)=\frac{e^t}{t}$, $(-1<t<1$ 且 $t\neq 0)$，则$g'(t)=\frac{(t-1)e^t}{t^2}<0$

所以g(t)在(-1,0),(0,1)均为减函数

$f'(x)=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)(g(\sin x)+g(\cos x))$

根据复合函数单调性，得$y=g(\sin x)+g(\cos x)$在$(\frac{\pi}{2},\pi)$上单调递增且$g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$

在$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$，$f(x)$ 递增，在$(\frac{3\pi}{4},\pi)$，$f(x)$ 递减，故 $f(x)$ 在$(\dfrac{\pi}{2}$，$\pi)$仅有一个极值点，因此 D 正确。

三、填空

28.【答案】 lgx

【分析】根据题意，结合对数函数的性质分析可得答案.

【解答】根据题意，

若函数 $f(x)$ 满足（1），则函数 $f(x)$ 在区间（0，$+\infty$）上为增函数，

若函数 $f(x)$ 满足（2），可以考虑 $f(x)$ 为对数函数，

则 f（x）可以为 f（x）$=lgx$，

故答案为：lgx．

29.【答案】$\sin x$

【解析】$f(x)=\sin x$，答案不唯一．

30. 【答案】$\sqrt{2}$

【解析】$\because a>1$，$\therefore f(x)$ 是增函数，$\therefore \log_a 2a=3\log_a a=3$，即是：$a^3=2a$，$\because a>1$，$\therefore a=\sqrt{2}$

31.【答案】e

【解析】由题得，当 $x<0$，是周期为 2 的函数，$f(-5)=f(-5+3\times 2)=f(1)=e$

32. 【答案】[3,6] ．

【解析】由题意可得，$f(x_1)+f(x_2)>f(x_3)$ 对任意的 $x_1,x_2,x_3\in R$ 恒成立，

$$f(x)=\frac{3^{x+1}+a}{3^x+1}=\frac{3(3^x+1)+a-3}{3^x+1}=3+\frac{a-3}{3^x+1}$$

当 $a\geq 3$ 时，函数 $y=f(x)$ 是 R 上的减函数，该函数的值域为 $(3,a)$，

故 $f(x_1)+f(x_2)>6$，$f(x_3)\leq a,\therefore a\leq 6$

综上，$3\leq a\leq 6$

33．【答案】－9 或－6

【分析】令 g（x）$=x^3+2^x+a$，利用导数研究其单调性，求得 g（x）在[1，2]上的最值，然后对 a 分类讨论求得 f（x）$=|g$（x）$|$ 的最大值，再由最大值为 6 求解 a 值．

【解析】令 g（x）$=x^3+2^x+a$，得 g'（x）$=3x^2+2^x ln2>0$，

则函数 g（x）在[1，2]上是增函数，可得 g（1）$\leqslant g$（x）$\leqslant g$（2），

即 $a+3\leqslant g$（x）$\leqslant a+12$，

当 $a\geqslant -3$ 时，g（x）$\geqslant a+3\geqslant 0$，f（x）$=|g$（x）$|=g$（x）$\leqslant a+12$，

由 $a+12=6$，解得 $a=-6<-3$，舍去；

当 $a<-3$ 时，若 g（x）$\geqslant 0$，则 $0\leqslant |g$（x）$|\leqslant a+12$，

若 g（x）<0，则 $0<|g$（x）$|\leqslant -a-3$，

故 $a+12=6$ 或 $-a-3=6$，解得 $a=-6$ 或 $a=-9$．

当 $a=-6$ 时，$|a+3|=3<a+12=6$，当 $a=-9$ 时，$a+12=3<9-3=6$，

故 $a=-6$ 或 $a=-9$ 均符合题意．

故答案为：﹣9 或﹣6．

34.【答案】0，-1

【解析】根据题意，$g(x)=f(x-1)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 的图象关于点（﹣1，0）对称，

则有 $f(-x)=-f(-2+x)$，且 $f(1)=0$，

又由 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，则有 $f(x)=-f(x-2)$，

变形可得 $f(x-4)=-f(x-2)=f(x)$，即 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，

$f(2021)=f(1+4\times505)=f(1)=0$，

又由 $f(x)=-f(x-2)$，即 $f(x)+f(x-2)=0$，则有 $f(1)+f(3)=0$，$f(2)+f(4)=0$，

故$[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]=0$，

则 $\sum\limits_{i=1}^{4n-1}f(i)=n\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]-f(4n)=0-f(0)=-1$，

故答案为：0，﹣1．

35.【答案】（$\sqrt{e}$，1）

【解析】$h'(x)=\frac{x}{e}+\frac{1}{x}$，

$h(x_0)=\frac{x_0^2}{2e}+\ln x_0$，（$x_0>0$），

即函数 $h(x)$ 的定义域为 $D=(0,+\infty)$，

所以函数 $h(x)$ 在点 $P(x_0,h(x_0))$ 处的切线方程为：

$y-(\frac{x_0^2}{2e}+\ln x_0)=(\frac{x_0}{e}+\frac{1}{x_0})(x-x_0)$，

则 $g(x)=(\frac{x_0}{e}+\frac{1}{x_0})(x-x_0)+\frac{x_0^2}{2e}+\ln x_0$，

设 $F(x)=h(x)-g(x)=\frac{x^2}{2e}+\ln x-[(\frac{x_0}{e}+\frac{1}{x_0})(x-x_0)+\frac{x_0^2}{2e}+\ln x_0]$，

则 $F(x_0)=0$，

所以 $F'(x)=h'(x)-g'(x)=\frac{x}{e}+\frac{1}{x}-(\frac{x_0}{e}+\frac{1}{x_0})=\frac{x-x_0}{e}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}=\frac{x-x_0}{e}+\frac{x_0-x}{xx_0}=\frac{(x-x_0)}{x}$

$(\frac{x}{e}-\frac{1}{x_0})$，

当 $x_0<\frac{e}{x_0}$，即 $0<x_0<\sqrt{e}$时，F（x）在（x_0，$\frac{e}{x_0}$）上单调递减，

所以 F（x）$<F$（x_0）$=0$，

所以$\frac{h(x)-g(x)}{x-x_0}<0$，$\frac{g(x)-h(x)}{x-x_0}>0$，

当 $x_0>\frac{e}{x_0}$，即 $x_0>\sqrt{e}$时，F（x）在（$\frac{e}{x_0}$，x_0）上单调递增，

所以 F（x）$>F$（x_0）$=0$，

所以$\frac{h(x)-g(x)}{x-x_0}<0$，$\frac{g(x)-h(x)}{x-x_0}>0$，

所以 $y=F$（x）在（0，$\sqrt{e}$）∪（$\sqrt{e}$，$+\infty$）上不存在“类对称点”，

若 $x_0=\frac{e}{x_0}$，即 $x=\sqrt{e}$时，F'（x）>0，F（x）单调递增，

当 $x>x_0$ 时，F（x）$>F$（x_0）$=0$，

当 $x<x_0$ 时，F（x）$<F$（x_0）$=0$，

所以$\frac{h(x)-g(x)}{x-x_0}>0$，$\frac{g(x)-h(x)}{x-x_0}<0$，

综上，可得 $y=h$（x）存在“类对称点”，$\sqrt{e}$是一个“类对称点”的横坐标，

又 h（$\sqrt{e}$）$=\frac{(\sqrt{e})^2}{2e}+ln\sqrt{e}=1$，

故答案为：（$\sqrt{e}$，1）.

四、解答

36.【解析】

（1）$a=2$时，$f(x)=\begin{cases}2(x+1)e^x, & x\leqslant 0,\\ x^2-2x+\frac{1}{2}, & x>0.\end{cases}$

当 $x<0$ 时，$f'(x)=2(x+2)e^x$，

所以 $f(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递减，在$(-2,0)$上单调递增，

此时 $f(x)$的最小值为$f(-2)=-\frac{2}{e^2}$；

当 $x>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

此时 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=-\frac{1}{2}$；

因为 $-\frac{2}{e^2}>-\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$；

（2）显然 $a\neq 0$；

因为 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 有且只有一个零点 -1，

所以 原命题等价于 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点.

所以 $\begin{cases}a^2-2>0\\a>0\end{cases}$，解得 $a>\sqrt{2}$，

故 实数 a 的取值范围是 $(\sqrt{2},+\infty)$．

37.【解析】（1）$f'(x)=\frac{2x\sin x-(x^2-a)\cos x}{\sin^2 x}$，$f'(\frac{\pi}{2})=\pi$，

所以 $f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2},f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程为 $y=\pi x$，

所以 $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{2}$，即 $\frac{\pi^2}{4}-a-2=\frac{\pi^2}{2}$，$a=-\frac{\pi^2}{4}-2$；⋯⋯

（2）因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $\sin x>0$，

所以 $\frac{x^2-a}{\sin x}-2=0$ 可转化为 $x^2-a-2\sin x=0$，

设 $g(x)=x^2-a-2\sin x$，则 $g'(x)=2x-2\cos x$，

当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 上单调递增，

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，设 $h(x)=g'(x)=2x-2\cos x$，

此时 $h'(x)=2+2\sin x>0$，

所以 $g'(x)$ 在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时单调递增，

又 $g'(0)=-2<0$，$g'(\frac{\pi}{2})=\pi>0$，

所以存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$ 使得 $g'(x)=0$ 且 $x\in(0,x_0)$ 时 $g(x)$ 单调递减，

$x\in[x_0,\frac{\pi}{2})$ 时 $g(x)$ 单调递增，

综上，对于连续函数 $g(x)$，在 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)$ 单调递减，

在$x\in(x_0,\pi)$时，$g(x)$单调递增，

又因为$g(0)=-a<0$，

所以当$g(\pi)=\pi^2-a>0$，即$a<\pi^2$时，函数$g(x)$有唯一零点在区间(x_0,π)上，

当$g(\pi)=\pi^2-a\leqslant 0$，即$a\geqslant\pi^2$时，函数$g(x)$在区间$(0,\pi)$上无零点，

综上可知，当$0<a<\pi^2$时，函数$f(x)$在$(0,\pi)$上有 1 个零点；

当$a\geqslant\pi^2$时，函数$f(x)$在$(0,\pi)$上没有零点.

38.【解析】（1）由 $f(x)=\ln x-kx$ 有唯一的零点，故方程 $\ln x-kx=0$ 有唯一的实数根，即$k=\dfrac{\ln x}{x}$有唯一的实数根，

令 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则$h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

令 $h'(x)>0$，解得 $0<x<e$，令 $h'(x)<0$，解得 $x>e$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

所以当 $x=e$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $h(e)=\dfrac{1}{e}$，

又 $h(1)=0$，所以 $0<x<1$ 时，$h(x)<0$，

又当 $x>e$ 时，$h(x)=\dfrac{\ln x}{x}>0$，

综上可得，k 的取值范围为$k=\dfrac{1}{e}$或 $k\leqslant 0$；

（2）因为 $g(x)-f(x)\geqslant 1$ 恒成立，即 $x(e^x-2)-(\ln x-kx)\geqslant 1$ 对 $x>0$ 恒成立，

所以$k\geqslant\dfrac{1+\ln x}{x}-e^x+2$对 $x>0$ 恒成立，

令 $m(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}-e^2+2$，则 $m'(x)=\dfrac{-\ln x-x^2e^x}{x^2}$，

令 $n(x)=-\ln x-x^2e^x$，则 $n'(x)<0$，故 $n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

又$n(\frac{1}{e})=1-e^{\frac{1}{e}-2}>0$，$n(1)=-e<0$，

由零点的存在性定理可知，存在唯一的零点$x_0\in(\frac{1}{e},1)$，使得 $n(x_0)=0$，即$-\ln x_0=x_0^2e^{x_0}$，

两边取对数可得，$\ln(-\ln x_0)=2\ln x_0+x_0$，即 $\ln(-\ln x_0)+(-\ln x_0)=x_0+\ln x_0$，

由函数 $y=x+\ln x$ 为单调函数，可得 $x_0=-\ln x_0$，

由以上分析可知，m（x）在（0，x_0）上单调递增，在（x_0，$+\infty$）上单调递减，

所以 $m(x)\leqslant m(x_0)=\dfrac{1+\ln x_0}{x_0}-e^{x_0}+1=\dfrac{1-x_0}{x_0}-\dfrac{1}{x_0}+2=1$，

故 $k\geqslant m(x_0)=1$，

所以 k 的取值范围为 $k\geqslant 1$.

39.【解析】(1) $f'(x)=e^x-a$，由 $f'(x)=0$ 得，$x=\ln a$ …………2 分

$f(x)$ 在区间 $(-\infty,\ln a]$ 上单调递减，在区间 $[\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

函数 $f(x)$ 的最小值为：$f(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a-1=a-a\ln a-1$；

函数 $f(x)$ 的值域是 $[a-a\ln a-1,+\infty)$ ……4 分

(2)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x-1$，$f(x)\geq\dfrac{g(x)}{\ln(x+1)}-x\Leftrightarrow[f(x)+x]\ln(x+1)\geq kx^2,x>0$

$[f(x)+x]\ln(x+1)\geq kx^2\Leftrightarrow(e^x-1)\ln(x+1)\geq kx^2$

$$k\leq\frac{(e^x-1)\ln(x+1)}{x^2}=\frac{\dfrac{e^2-1}{x}}{\dfrac{x}{\ln(x+1)}}=\frac{\dfrac{e^x-1}{x}}{\dfrac{e^{\ln(x+1)}-1}{\ln(x+1)}}$$ ……6 分

令 $m(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$,则 $m'(x)=\dfrac{(x-1)e^x+1}{x}$，

令 $\varphi(x)=(x-1)e^x+1$,则 $\varphi'(x)=xe^x$

∵x>0,∴ $\varphi'(x)>0$, $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi(x)>\varphi(0)=0$，$m'(x)>0$，

于是 m(x)在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 m(x)>0,(x>0)……8 分

又由（1)知当 $a=1,x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=e^x-x-1$ 的值域是 $[0,+\infty)$,即：$f(x)=e^x-x-1>f(0)=0$,

所以：$e^x>x+1$ 恒成立，$x>\ln(x+1)$,……10 分

所以：$m(x)>m(\ln(x+1))$,即：$\dfrac{m(x)}{m(\ln(x+1))}>1$，所以：k≤1

∴k 的取值范围是 $(-\infty,1]$ ……12 分

40.【解析】（1）解：函数 $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}x^2+(2a-1)x$，故 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\ln x-x+2a$，

令 $h(x)=\ln x-x+2a$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$，则 $h(x)$ 单调递增，

当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 单调递减，

所以当 $x=1$ 时，$h(x)$ 取得最大值 $h(1)=2a-1$，

当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$h(1)=2a-1\leqslant0$，则 $f'(x)\leqslant0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，此时 $f(x)$ 无极值点；

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$h(1)=2a-1>0$，因为 $0<e^{-2a}<1$，$h(e^{-2a})=-2a-e^{-2a}+2a=-e^{-2a}<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上有且只有一个零点，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有且只有一个极值点，

又 $e^{5a}>e^2>1$，$h(e^{5a})=5a-e^{5a}+2a<7a-e^{4a}a=a(7-e^{4a})<a(7-e^2)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有且只有一个零点，

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有且只有一个极值点.

综上所述，当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 无极值点；当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 有 2 个极值点.

（2）证明：函数 $g(x)=\frac{e^x}{x}-f'(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x+x-2a$，

则 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}-\frac{1}{x}+1=\frac{(x-1)(e^x+x)}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 单调递减，

当 $x>$时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 单调递增，

所以当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取得最小值 $g(1)=e+1-2a$，

因为函数 $g(x)$ 有两个不同的零点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，

所以 $g(1)<0$，即 $e+1-2a<0$，所以 $2a>e+1$，

又 $g(2a)=\frac{e^{2a}}{2a}-\ln 2a+2a-2a=\frac{e^{2a}}{2a}-\ln 2a$，

令 $\varphi(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x(x\geqslant e)$，则 $\varphi'(x)=\frac{e^x(x-1)-x}{x^2}$，

令 $m(x)=e^{x}(x-1)-x$（$x\geqslant e$），则 $m'(x)=xe^{x}-1\geqslant e^{e+1}-1>0$，

所以 $m(x)$ 单调递增，所以 $m(x)\geqslant m(e)=e^{e}(e-1)-e>0$，

所以 $\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)$ 单调递增，

所以 $\varphi(2a)>\varphi(e+1)>\varphi(e)=e^{e-1}-1>0$，

所以 $g(2a)>0$，所以 $x_2<2a$，

令 $n(x)=\ln x-x+1$（$x>0$），则 $n'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$n'(x)>0$，则 $n(x)$ 单调递增，

当 $x>1$ 时，$n'(x)<0$，则 $n(x)$ 单调递减，

所以当 $x=1$ 时，$n(x)$ 取到最大值为 $n(1)=0$，

所以 $n(x)\leqslant 0$，即 $\ln x\leqslant x-1$，

所以 $g\left(\frac{1}{2a-1}\right)=\frac{e^{\frac{1}{2a-1}}}{\frac{1}{2a-1}}-\ln\left(\frac{1}{2a-1}\right)+\frac{1}{2a-1}-2a\geqslant\frac{e^{\frac{1}{2a-1}}}{\frac{1}{2a-1}}+1-2a$，

令 $p=\frac{1}{2a-1}\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，则 $g(p)>\frac{e^{p}}{p}-\frac{1}{p}>0$，所以 $x_1>\frac{1}{2a-1}$，

所以 $x_2-x_1<2a-\frac{1}{2a-1}=\frac{4a^2-2a-1}{2a-1}$.

41.

22.（12 分）解：（1）要证 $(1+\frac{1}{n})^n<e(n\in\mathbf{N}^*)$ 成立，两边取对数：

只需证明 $\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 成立，…………………………1 分

令 $x=\frac{1}{n},0<x\leq 1$，构造函数 $f(x)=\ln(1+x)-x\ (0<x\leq 1)$，

即只需证明函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上小于零，……………2 分

由于 $f'(x)=-\frac{x}{x+1}$，

在区间 $(0,1]$ 上，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

且 $f(0)=0$，所以在区间 $(0,1]$ 上函数 $f(x)<0$ ……………4 分

所以不等式 $(1+\frac{1}{n})^n<e\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 成立；……………5 分

（2）对于不等式 $(1+\frac{1}{n})^{n+a}\le e(n\in\mathbf{N}^*)$，两边取对数：

只需不等式 $\ln(1+\frac{1}{n})\le\frac{1}{n+a}$ 成立， ………6 分

令 $x=\frac{1}{n},0<x\le1$，构造函数 $g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{ax+1}\ (0<x\le1)$，

不等式 $(1+\frac{1}{n})^{n+a}\le e(n\in\mathbf{N}^*)$ 成立，

等价于在区间 $(0,1]$ 上 $g(x)\le0$ 恒成立 ………………………7 分

其中 $g'(x)=\frac{a^2x^2+(2a-1)x}{(1+x)(ax+1)^2}$ ………8 分

由分子 $a^2x^2+(2a-1)x=0$，得其两个实数根为 $x_1=0$，$x_2=\frac{1-2a}{a^2}$；

当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，$x_2\le0$，

在区间 $(0,1]$ 上，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增，

由于 $g(x)>g(0)=0$，不等式不成立 ……………………………………9 分

当 $\sqrt{2}-1<a<\frac{1}{2}$ 时，$x_2\in(0,1)$，

在区间 $(0,x_2)$ 上 $g'(x)<0$，在区间 $(x_2,1)$ 上 $g'(x)>0$；

函数 $g(x)$ 在区间 $(0,x_2)$ 上单调递减，在区间 $(x_2,1)$ 上单调递增；

且 $g(0)=0$，只需 $g(1)=\ln2-\frac{1}{a+1}\le0$，

得 $a\le\frac{1}{\ln2}-1$，即 $\sqrt{2}-1<a\le\frac{1}{\ln2}-1$ 时不等式成立 …………………10 分

当 $0<a\le\sqrt{2}-1$ 时，$x_2\ge1$，

在区间 $(0,1]$ 上，$g'(x)\le0$，函数 $g(x)$ 单调递减，

且 $g(x)<g(0)=0$，不等式恒成立 ……………………………………11 分

综上，不等式 $(1+\frac{1}{n})^{n+a}\le e(n\in\mathbf{N}^*,a>0)$ 成立，实数 a 的最大值为 $\frac{1}{\ln2}-1$.

……………………………………12 分

42.【解析】(1) $f(x)=x+\frac{1}{x}-a\ln x$, $f(x)$ 的定义域为 $(0.+\infty)$，

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax-1}{x^2}$. ……………………………………………………2 分

令 $f'(x)>0$，解得 $x>\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$；令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$，

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)$ 内单调递减，

在 $\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2},+\infty\right)$ 内单调递增. ……………………………………………………5 分

(2)设 $\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}=x_0$，则由(1)得 $x_0^2-ax_0-1=0$，即 $a=x_0-\frac{1}{x_0}$，

且 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 内单调递增，

因此，$f(x)_{\min}=f(x_0)=x_0+\frac{1}{x_0}-a\ln x_0=x_0+\frac{1}{x_0}-\left(x_0-\frac{1}{x_0}\right)\ln x_0$

$=x_0+\frac{1}{x_0}-x_0\ln x_0+\frac{\ln x_0}{x_0}$，…………………………………………7 分

设 $g(x)=x+\frac{1}{x}-x\ln x+\frac{\ln x}{x}$，则由 $2f(x)+3\ln 2>5$，得 $f(x)>\frac{5-3\ln 2}{2}$，

即 $f(x)_{\min}>\frac{5-3\ln 2}{2}$，从而 $g(x_0)>\frac{5-3\ln 2}{2}$. ………………………………8 分

$g'(x)=1-\frac{1}{x^2}-(1+\ln x)+\frac{1-\ln x}{x^2}=-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln x$，

令 $g'(x)=0$，得 $x=1$，因为当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，在(1，+∞)内单调递减，……………………………10 分

又因为 $g(2)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5-3\ln 2}{2}$，所以由 $g(x_0)>\frac{5-3\ln 2}{2}$，解得 $\frac{1}{2}<x_0<2$，

又因为 $a=x_0-\frac{1}{x_0}$，所以 $-\frac{3}{2}<a<\frac{3}{2}$. ………………………………

43.（1）$a=0$ 时，$f(x)=-\ln x-b\cos(x-1)$，$f(1)=-b$，

$f'(x)=-\frac{1}{x}+b\sin(x-1)$，$f''(x)=\frac{1}{x^2}+b\cos(x+1)$，

$\therefore f(x)$在$(1,-b)$处的曲率为$k=\dfrac{|1+b|}{2^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow b=1$，

（2）$f(x)=ae^x-\ln x-\cos(x-1)=0\Rightarrow a=\dfrac{\ln x+\cos(x-1)}{e^x}$

令$g(x)=\dfrac{\ln x+\cos(x-1)}{e^x}$，$\therefore g(x)\le\dfrac{\ln x+1}{e^x}\le\dfrac{x}{e^x}\le\dfrac{1}{e}$，

当且仅当 $x=1$ 时取“＝”，显然，当$a>\dfrac{1}{e}$时，$f(x)$无零点，

当$0\le a\le\dfrac{1}{e}$时，$g(1)=\dfrac{1}{e}\ge a$，$g\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{-1+\cos\left(\dfrac{1}{e}-1\right)}{e^{\frac{1}{e}}}<0\le a$

∴存在$x\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$使$g(x_0)=a$，符合题意，

综上：实数 a 的取值范围为$\left[0,\dfrac{1}{e}\right]$，

（3）由（2）知$\dfrac{\ln x+1}{e^x}\le\dfrac{1}{e}$，$\therefore\ln x+1\le e^{x-1}$（当且仅当 $x=1$ 时取“＝”）

$\therefore\ln\dfrac{\pi}{3}+1<e^{\frac{\pi}{3}-1}<e^{0.048}$，$\therefore\ln\pi<e^{0.048}-1+\ln3<1.050-1+1.099<1.15$

又$\because\ln\dfrac{3}{\pi}+1<e^{\frac{3}{\pi}-1}<e^{-0.045}$，$\therefore\ln\pi>\ln3+1-e^{-0.045}>1.098+1-0.956>1.14$

综上：$1.14<\ln\pi<1.15$.

44.【解析】（1）函数$f(x)=\ln\dfrac{x}{2}-ax+\dfrac{4a}{x}$（$x>0$，$a>0$），$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a-\dfrac{4a}{x^2}=\dfrac{-ax^2+x-4a}{x^2}$（$x>0$，$a>0$），

令 $g(x)=-ax^2+x-4a$（$x>0$，$a>0$），$\triangle=1-16a^2$，

当$\triangle=1-16a^2\leqslant0$，即 $a\geqslant\dfrac{1}{4}$时，$g(x)\leqslant0$，$f'(x)\leqslant0$ 且 $f'(x)$ 不恒为 0，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当$\triangle=1-16a^2>0$，即 $0<a<\dfrac{1}{4}$时，

$g(x)=-ax^2+x-4a$ 有两个不同的零点，$x_1=\frac{1-\sqrt{1-16a^2}}{2a}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-16a^2}}{2a}$，

$g(x)=-ax^2+x-4a$ 开口向下，当 $0<x<x_1$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x_1<x<x_2$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

$x>x_2$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

综上所述，当 $a\geq\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $0<a<\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1-\sqrt{1-16a^2}}{2a})$，$(\frac{1+\sqrt{1-16a^2}}{2a},+\infty)$ 上单调递减，

在 $(\frac{1-\sqrt{1-16a^2}}{2a},\frac{1+\sqrt{1-16a^2}}{2a})$ 上单调递增.

（2）因为 $0<a<\frac{1}{4}$，由（1）可知 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1-\sqrt{1-16a^2}}{2a})$，$(\frac{1+\sqrt{1-16a^2}}{2a},+\infty)$ 上单调递减，

在 $(\frac{1-\sqrt{1-16a^2}}{2a},\frac{1+\sqrt{1-16a^2}}{2a})$ 上单调递增，$f(2)=0$，

又 $x_1x_2=4$，所以 $x_1<2<x_2$，

因为 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上单调递增，

所以 $f(x_1)<f(2)=0$，$f(x_2)>f(2)=0$，

由零点存在定理可知 $f(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 上有一个零点.

$f(4a^2)=ln2a^2-4a^3+\frac{1}{a}=h(a)$，则 $h'(a)=\frac{2}{a}-12a^2-\frac{1}{a^2}=\frac{2a-12a^4-1}{a^2}$，

设 $m(a)=2a-12a^4-1$，则 $m'(a)=2-48a^3>0$ 在 $(0,\frac{1}{4})$ 上恒成立，

所以 $m(a)$ 在 $(0,\frac{1}{4})$ 上单调递增，

所以 $m(a)<m(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}-\frac{12}{256}-1<0$，

所以 $h'(a)<0$，所以 $h(a)$ 在 $(0,\frac{1}{4})$ 上单调递减，

所以 $f(4a^2)=h(a)>h(\frac{1}{4})=ln\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+4=-3ln2-\frac{1}{64}+4>0$，

又 $f(x_1)<0$，$x_1<2$，$4a^2<\frac{1}{4}<2$，结合 $f(x)$ 的单调性可知 $4a^2<x_1$，

由零点存在定理可知 $f(x)$ 在 $(4a^2,x_1)$ 上有一个零点，

因为对于任意 $x>0$，都有 $f(x)+f(\frac{4}{x})=0$，

所以 $f(4a^2)+f(\frac{1}{a^2})=0$，所以 $f(\frac{1}{a^2})<0$，

又 $f(x_2)>0$，$x_2>2$，$\frac{1}{a^2}>16>2$，结合函数 $f(x)$ 的单调性可知 $\frac{1}{a^2}>x_2$，

由零点存在定理可知 $f(x)$ 在区间 $(x_2,\frac{1}{a^2})$ 有一个零点.

综上可得，当 $0<a<\frac{1}{4}$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{1}{a^2})$ 上零点的个数为 3.

45.

解：（1）$f'(x)=x-\sin x$， ……………………………………………………1 分

因为 $(x-\sin x)'=1-\cos x\geq 0$，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单增，又 $f'(0)=0$，所以当

$x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增； ……………………………………………………2 分

故当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取极小值 $f(0)=1$，无极大值. ……………………3 分

（2）$g'(x)=(\frac{x^2}{2}+\cos x-1)(e^x-a)$， ……………………………………………4 分

由（1）知，$f(x)\geq f(0)$，即 $\frac{x^2}{2}+\cos x-1\geq 0$. ………………………5 分

当 $a\leq 0$ 时，$e^x-a>0$，$g'(x)\geq 0$，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单增； ………………6 分

当 $a>0$ 时，令 $e^x-a=0$，得 $x=\ln a$．于是，当 $x\in(-\infty,\ln a)$，$e^x-a<0$，$g'(x)\leq 0$，$g(x)$ 单减，当 $x\in(\ln a,+\infty)$，$e^x-a>0$，$g'(x)\geq 0$，$g(x)$ 单增.

综上，当 $a\leq 0$ 时，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单增；当 $a>0$ 时，$g(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 单减，在 $(\ln a,+\infty)$ 单增. ……………………………………………………7 分

（3）令 $h(x)=f'(x)-e^x-bx+1$，则 $h(x)=-e^x+(1-b)x-\sin x+1$，$x\in[0,+\infty)$.

$h'(x)=-e^x-\cos x+1-b$，$h'(x)$ 的导函数 $h''(x)=-e^x+\sin x$.

因为 $x\in[0,+\infty)$，所以 $h''(x)\leq -1+\sin x\leq 0$，$h'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减. ……8 分

当 $b\geq -1$ 时，对 $\forall x\geq 0$，$h'(x)\leq h'(0)=-1-b\leq 0$，所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，所以对 $\forall x\geq 0$，$h(x)\leq h(0)=0$. ……………………………9 分

当 $b<-1$ 时，因为 $h'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减，$h'(0)=-1-b>0$，当 $x\to+\infty$ 时，$h'(x)\to-\infty$. 故 $\exists x_0\in(0,+\infty)$，使 $h'(x_0)=0$，……10 分

且 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，所以 $h(x_0)>h(0)=0$，与 $\forall x\geq 0$，$h(x)\leq 0$ 矛盾. ……11 分

所以实数 b 的取值范围是 $[-1,+\infty)$. ……12 分

46.【解析】（1）函数 $g(x)=-a\ln x+(a+2)x+\frac{2}{x}$，

则 $g'(x)=-\frac{a}{x}+(a+2)x-\frac{2}{x^2}=\frac{(a+2)x^2-ax-2}{x^2}$（$x>0$），

①当 $a+2=0$，即 $a=-2$ 时，$g'(x)=\frac{2x-2}{x^2}$，

令 $g'(x)>0$，解得 $x>1$，令 $g'(x)<0$，解得 $0<x<1$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

②当 $a<-2$ 时，$g'(x)=\frac{(a+2)(x-1)(x+\frac{2}{a+2})}{x^2}$，

（i）当 $-\frac{2}{a+2}>1$，即 $-4<a<-2$ 时，

令 $g'(x)>0$，解得 $1<x<-\frac{2}{a+2}$，

令 $g'(x)<0$，解得 $0<x<1$ 或 $x>-\frac{2}{a+2}$，

故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(-\frac{2}{a+2},+\infty)$ 上单调递减，在 $(1,-\frac{2}{a+2})$ 上单调递增；

（ii）当 $-\frac{2}{a+2}=1$，即 $a=-4$ 时，$g'(x)=\frac{-2(x-1)^2}{x^2}<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

（iii）当 $a<-4$ 时，令 $g'(x)>0$，解得 $-\frac{2}{a+2}<x<1$，

令 $g'(x)<0$，解得 $0<x<-\frac{2}{a+2}$ 或 $x>1$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,-\frac{2}{a+2})$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-\frac{2}{a+2},1)$ 上单调递增.

综上所述，当 $a=-2$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$(1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $-4<a<-2$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(-\frac{2}{a+2},+\infty)$ 上单调递减，在 $(1,-\frac{2}{a+2})$ 上单调递增；

当 $a=-4$ 时，以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a<-4$ 时，$g(x)$ 在 $(0,-\frac{2}{a+2})$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-\frac{2}{a+2},1)$ 上单调递增.

（2）因为 $|f(x)-g(x)|_{min}\in[0,+\infty)$，

所以 $f(x)-g(x)=0$ 有解，即 $a+2=e^{3x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，

令 $h(x)=e^{3x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$，则 $h'(x)=\frac{3x^2e^{3x}+\ln x}{x^2}$，

令 $\mu(x)=3x^2e^{3x}+\ln x$，则 $\mu'(x)=6xe^{3x}+9x^2e^{3x}+\frac{1}{x}>0$，

故 $\mu(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $\mu(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}e-\ln 3<0$，$\mu(1)=3e^3>0$，

故存在 $x_0\in(\frac{1}{3},1)$，使 $\mu(x_0)=3x_0^2e^{3x_0}+\ln x_0=0$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$\mu(x)<0$，即 $h'(x)<0$，则 $h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\mu(x)>0$，即 $h'(x)>0$，则 $h(x)$ 单调递增，

故 $h(x)$ 的最小值为 $h(x_0)=e^{3x_0}-\frac{\ln x_0}{x_0}-\frac{1}{x_0}$ 且 $x\to+\infty$，$h(x)\to+\infty$，

由 $h'(x_0)=3x_0^2e^{3x_0}+\ln x_0=0$，可得 $3x_0^2e^{3x_0}=\ln\frac{1}{x_0}$，即 $e^{3x_0}\ln e^{3x_0}=\frac{1}{x_0}\ln\frac{1}{x_0}$，

令 $V(x)=x\ln x\ (x>1)$，$V'(x)=2+\ln x>0$，所以 $V(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $e^{3x_0}=\frac{1}{x_0}$，即 $3x_0=-\ln x_0$，所以 $-\frac{\ln x_0}{x_0}=3$，

故 $h(x)$ 的最小值为 $h(x_0)=e^{3x_0}-\frac{\ln x_0}{x_0}-\frac{1}{x_0}=3$，

故 $a+2\geqslant 3$，所以 $a\geqslant 1$.

47.

解：(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=x-a+\frac{a-1}{x}$ …………………………………………………… 1 分

$=\frac{(x-1)(x-a+1)}{x}$ …………………………………………………… 2 分

$\because a>2$，$\therefore a-1>1$

$\therefore$ 由 $f'(x)>0$ 得 $x>a-1$ 或 $0<x<1$

由 $f'(x)<0$ 得 $1<x<a-1$； …………………………………………… 3 分

∴$f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$和$(a-1,+\infty)$；单调递减区间为$(1,a-1)$． …… 4 分

(2)欲证$\forall x\in(1,m]$，$(a-1)\ln x>x-1$，即证$\forall x\in(1,m]$，$a-1>\dfrac{x-1}{\ln x}$，………… 5 分

令$g(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$，$1<x\leqslant m$，则$g'(x)=\dfrac{\ln x-1+\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$，

令$\varphi(x)=\ln x-1+\dfrac{1}{x}$，则$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，

因为$x>1$，所以$\varphi'(x)>0$，所以$\varphi(x)$在$(1,m]$上单调递增，所以$\varphi(x)>\varphi(1)=0$，

所以$g'(x)>0$，所以$g(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$在$(1,m]$上单调递增，

所以$g(x)\leqslant g(m)=\dfrac{m-1}{\ln m}$， ………………………………………………………… 7 分

所以欲证$\forall x\in(1,m]$，$a-1>\dfrac{x-1}{\ln x}$，只需证$a-1>\dfrac{m-1}{\ln m}$，……① …………………… 8 分

因为$f(m)=f(1)$，所以$\dfrac{m^2}{2}-a(m-1)+(a-1)\ln m=\dfrac{1}{2}$，

即$\dfrac{(m-1)^2}{2}=(a-1)(m-1-\ln m)$，……②

令$h(x)=x-1-\ln x$，则$h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，当$x>1$时，$h'(x)>0$

所以$h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$h(x)>h(1)=0$，即$x-1-\ln x>0$，

所以$m-1-\ln m>0$，故②式可等价变形为：$a-1=\dfrac{(m-1)^2}{2(m-1-\ln m)}$

所以，欲证①式成立，只需证$\dfrac{(m-1)^2}{2(m-1-\ln m)}>\dfrac{m-1}{\ln m}(m>1)$成立

所以仅需证$\ln m>2\dfrac{m-1}{m+1}$， ………………………………………………………… 10 分

令$H(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，$(x>1)$，则$H'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，

∴$H(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

故$H(x)>H(1)=0$，即$\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，

∴结论得证． ……………………………………………………………………… 12 分

48.

22.解：$f'(x)=(x+1)e^{x-1}+2(x+1)=(x+1)(e^{x-1}+2)$． ………………………………… 1 分

当$x\in(-\infty,-1)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x\in(-1,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. ………………………………………… 2 分

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时 $f(x)$ 取最小值 $f(-1)=-5-\frac{1}{e^2}$. ………………………………… 3 分

(2) 函数 $h(x)$ 定义域为 $(-1,+\infty)$，其中 $f(1)=0$. ……………………………………… 4 分

(1) 当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$，则函数 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 无零点 …………… 5 分

(2) 当 $-1<x\leqslant 1$ 时，$f(x)\leqslant 0$.

下面讨论 $g(x)$ 零点情况.

$x-\ln(x+1)\geqslant 0$.（当 $x=0$ 时，取等号），

$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}<\cos 1\leqslant\cos x\leqslant 1$，…………………………………………………… 6 分

①当 $a<0$ 时，$g(x)=a(\frac{1}{2}x^2+2\cos x)-[x-\ln(x+1)]<0$

此时，$g(x)$ 在 $(-1,1]$ 上无零点

$\therefore h(x)$ 的零点为 $x=1$. 即一个零点.

②当 $a=0$ 时，$g(x)=-x+\ln(x+1)\leqslant 0$，$g(0)=0$，$g(1)=-1+\ln 2<0=f(1)$，

$g(x)$ 在 $(-1,1]$ 上一个零点，$h(x)$ 的有两个零点. ………………………………… 7 分

③当 $a>0$ 时，$g'(x)=ax-2a\sin x-1+\frac{1}{x+1}$

$\therefore g''(x)=a-2a\cos x-\frac{1}{(x+1)^2}$

$=a(1-2\cos x)-\frac{1}{(x+1)^2}$

$\because 1-2\cos x<0$. $\therefore g''(x)<0$.

$\therefore g'(x)$ 在 $(-1,1]$ 单调递减，

又 $g'(0)=0$.

$\therefore g(x)$ 在 $x=0$ 取极大值，此时 $g(0)=2a>0$.

又 $\because x\to -1$ 时，$\ln(x+1)\to-\infty$，

$\therefore g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上有一个零点，……………………………………………………… 8 分

又 $g(1)=\frac{1}{2}a+2a\cos 1-1+\ln 2$

当 $g(1)>0$，即：$a>\frac{2-2\ln 2}{1+4\cos 1}$ 时，$g(x)$ 在 $(-1,1]$ 上有一个零点，$h(x)$ 有两个零点 … 9 分

当 $g(1)=0$，即 $a=\frac{2-2\ln 2}{1+4\cos 1}$ 时，$g(x)$ 在 $(-1,1]$ 上有两个零点，$h(x)$ 有两个零点 ………

……………………………………………………………………………………………………… 10 分

当 $g(1)<0$，即 $a<\frac{2-2\ln 2}{1+4\cos 1}$ 时，$g(x)$ 有两个零点，$h(x)$ 有三个零点 ……………… 11 分

综上，$a<0$ 时或 $a>\frac{2-2\ln 2}{1+4\cos 1}$ 时，$h(x)$ 有一个零点.

当 $a=0$ 时或 $a=\frac{2-2\ln 2}{1+4\cos 1}$ 时，$h(x)$ 有两个零点.

当 $0<a<\frac{2-2\ln 2}{1+4\cos 1}$ 时，$h(x)$ 有三个零点. ………………………………………… 12 分