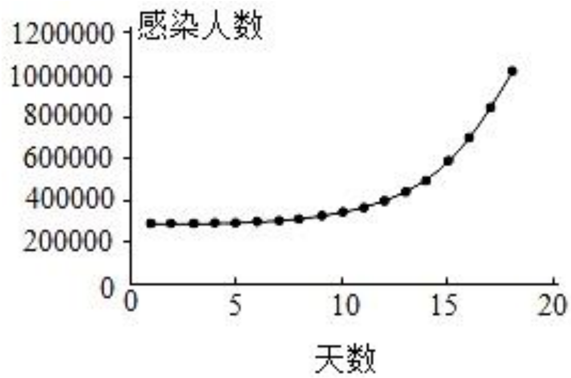
专题八　函数与导数

一、　　单项选择题

1. （2021 日照三模 2）已知幂函数 $y=x^a$ 的图象经过点（2，4），则 $f(-3)=$（　　）

A．－9　　B．9　　C．3　　D．－3

2. （2021 淄博三模 2）某个国家某种病毒传播的中期，感染人数 y 和时间 x（单位：天）在 18 天里的散点图如图所示，下面四个回归方程类型中最适宜作为感染人数 y 和时间 x 的回归方程的是（　　）



A．$y=a+bx$　　B．$y=a+be^x$　　C．$y=a+b\ln x$　　D．$y=a+b\sqrt{x}$

3. （2021 枣庄二模 3）已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{x+\ln 2}, & x\le 0\\ f(x-3), & x>0\end{cases}$，则 $f(2021)=$

A．$\dfrac{2}{e}$　　B．$2e$　　C．$\dfrac{2}{e^2}$　　D．$2e^2$

4. （2021 临沂二模 2）已知奇函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-1, & x<0\\ g(x), & x>0\end{cases}$，则 $f(-1)+g(2)=$（　　）

A．－11　　B．－7　　C．7　　D．11

5. （2021 潍坊四县 5 月联考 3）已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^{-x}+1 (x\leqslant 0)\\ x^a+2 (x>0)\end{cases}$，若 $f(f(-1))=18$，那么实数 a 的值是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

6. （2021 省实验中学二模 3）设 $a=5^{0.3}$，$b=\log_{0.3}0.5$，$c=\log_3 0.4$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$c<a<b$　　D．$c<b<a$

7. （2021 泰安二模 4）已知 $a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-0.8}$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2}{3}$，$c=4^{0.3}$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<b<a$　　D．$b<c<a$

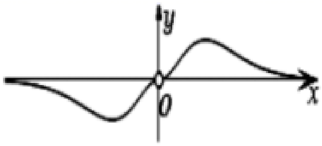
8. （2021 青岛三模 5）已知 $1<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，$M=a^a$，$N=a^b$，$P=b^a$，则 M，N，P 的大小关系正确的为（　　）

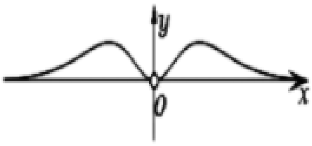
A. $N<M<P$　　B. $P<M<N$　　C. $M<P<N$　　D. $P<N<M$

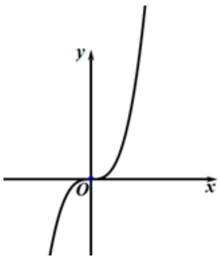
9. （2021 日照二模 6）已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln x+x$，则 $a=f(-2^{\frac{3}{2}})$，$b=f(\log_2 9)$，$c=f(\sqrt{5})$ 的大小关系为（　　）

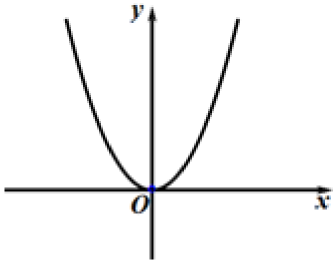
A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>c>a$　　D. $b>a>c$

10. （2021 聊城三模 3）函数 $f(x)=\frac{x^2}{e^x-e^{-x}}$ 的图象大致为（　　）

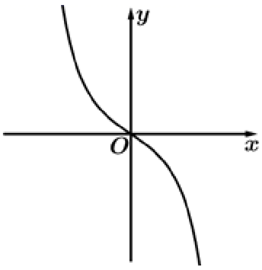

A.

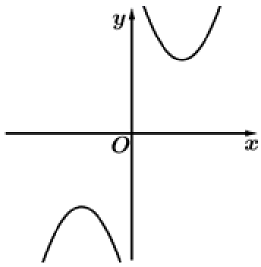

B.

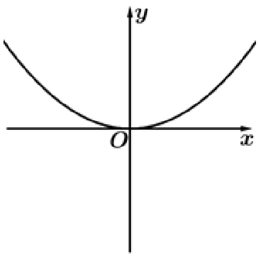

C.

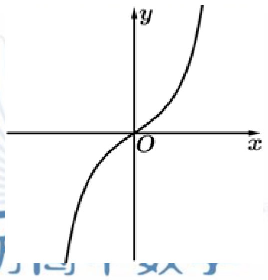

D.

11. （2021 淄博二模 5）函数 $f(x)=(e^x+e^{-x})\tan x$ 的部分图像大致为（　　）.

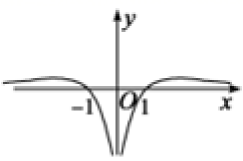

A.

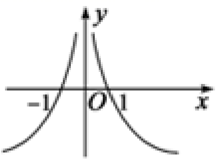

B.

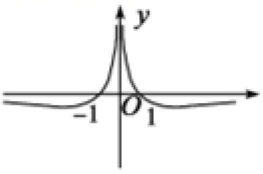

C.

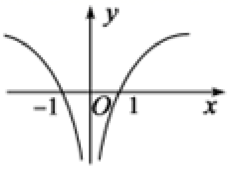

D.

12. （2021 德州二模 5）函数 $f(x)=\frac{2^{x+1}\cdot\ln|x|}{4^x+1}$ 的部分图像大致为（　　）.

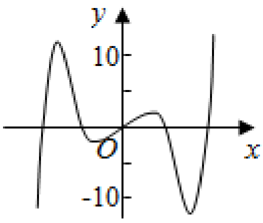

A.

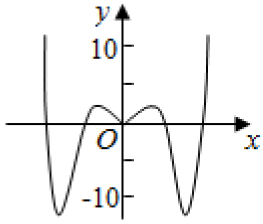

B.

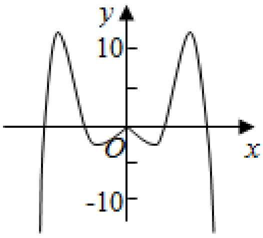
C. 

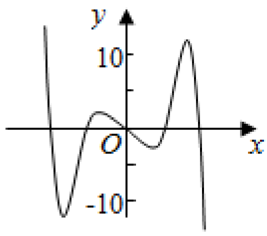
D. 

13.（2021 泰安二模 6）函数 $y=(e^x-e^{-x})\sin|2x|$ 的图象可能是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

14.（2021 潍坊三模 6）某地区为落实乡村振兴战略，帮助农民脱贫致富，引入一种特色农产品种植，该农产品上市时间仅能维持 5 个月，预测上市初期和后期会因产品供应不足使价格持续上涨，而中期又将出现供大于求使价格连续下跌．经研究其价格模拟函数为 $f(t)=t(t-3)^2+n$，（$0\le t\le 5$，其中 $t=0$ 表示 5 月 1 日，$t=1$ 表示 6 月 1 日，以此类推）．若 $f(2)=6$，为保护农户的经济效应，当地政府计划在价格下跌时积极拓宽外销，请你预测该农产品价格下跌的月份为（　　）

A. 5 月和 6 月　　B. 6 月和 7 月　　C. 7 月和 8 月　　D. 8 月和 9 月

15.（2021 济宁二模 7）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-1+2\ln x, x>1\\ 1-2\ln x, 0<x\le 1\end{cases}$，若 $f(a)=f(b)$，则 $a+b$ 的最小值是（　　）

A. $2\sqrt{e}$　　B. e　　C. $1+e$　　D. $2e$

16.（2021 菏泽二模 8）已知 a，b，$c\in(0,3)$，且 $a^5=5^a, b^4=4^b, c^3=3^c$，下列不等式正确的是

A. $a>b>c$　　B. $c>a>b$　　C. $c>b>a$　　D. $a>c>b$

17.（2021 烟台三模 8）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(\pi+x)=f(-x)$，当 $x\in(0,\pi)$ 时，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-\pi x+\pi}$，则下列结论正确的是（　　）

A. π 是函数 $f(x)$ 的周期

B. 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最大值为 2

C. 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

D. 方程 $f(x)-\frac{1}{2}=0$ 在 $x\in(-10,10)$ 上的所有实根之和为 3π

18.（2021 滨州二模 4）设曲线 $y=e^{2ax}$（e=2.718…为自然对数的底数）在点（0，1）处的切线及直线 $2x-y-1=0$ 和两坐标轴的正半轴所围成的四边形有外接圆，则 a=（　　）

A. -1　　　　B. $-\frac{1}{4}$　　　　C. $\frac{1}{4}$　　　　D. 1

19.（2021 潍坊二模 6）关于函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a, & 0\leqslant x<2\\ b-x, & x\geqslant 2\end{cases}$，其中 a，$b\in$R，给出下列四个结论：

甲：6 是该函数的零点；

乙：4 是该函数的零点；

丙：该函数的零点之积为 0；

丁：方程 $f(x)=\frac{5}{2}$ 有两个根.

若上述四个结论中有且只有一个结论错误，则该错误结论是（　　）

A. 甲　　　　B. 乙　　　　C. 丙　　　　D. 丁

20.（2021 青岛二模 7）已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的图象连续不断，有下列四个命题：

甲：$f(x)$ 是奇函数；

乙：$f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称；

丙：$f(x)$ 在区间[－1，1]上单调递减；

丁：函数 $f(x)$ 的周期为 2.

如果只有一个假命题，则该命题是（　　）

A. 甲　　　　B. 乙　　　　C. 丙　　　　D. 丁

21.（2021 临沂二模 6）在天文学上恒星的亮度一般用星等来表示，直接测量到的天体亮度被称为视星等 m，而把天体置于 10 秒差距的距离处所得到的视星等称为绝对星等 M，它能反映天体的发光本领．如果我们观测到了恒星的光谱，可以知道一些类型恒星的绝对星等，就可以利用光谱视差法来获得这些恒星的距离．如表是某校天文爱好者社团在网上收集到一些恒星的相关数据，那么最适合作为星等差 y 关于距离 x（光年）的回归方程类型的是（　　）

星名	天狼星	南河三	织女星	大角星	五车二	水委一	老人星	参宿四
距离 x	8.6	11.46	25	36.71	42.8	139.44	309.15	497.95
$y=m-M$	-2.80	-2.27	-0.57	0.26	0.59	3.15	4.88	5.92

A. $y=a+bx^2$　　B. $y=a+b\lg x$　　C. $y=a+b\sqrt{x}$　　D. $y=a+bx$

22.（2021 济南二模 7）苏格兰数学家纳皮尔发明了对数表，这一发明为当时天文学家处理“大数运算”提供了巨大的便利．已知正整数 N 的 31 次方是一个 35 位数，则由下面的对数表，可得 N 的值为（　　）

M	2	3	6	7	8	9	11	12	13	14	15	16	17
$\lg M$	0.30	0.48	0.78	0.85	0.90	0.95	1.04	1.08	1.11	1.15	1.18	1.20	1.23

A. 12　　B. 13　　C. 14　　D. 15

23.（2021 青岛三模 8）定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 的图象连续不断，其导函数为 $f'(x)$，对任意正实数 x 恒有 $xf'(x)>2f(-x)$，若 $g(x)=x^2f(x)$，则不等式 $g(\log_3(x^2-1))+g(-1)<0$ 的解集是（　　）

A. $(0,2)$　　B. $(-2,2)$

C. $(-\sqrt{3},2)$　　D. $(-2,-1)\cup(1,2)$

24.（2021 滨州二模 7）已知 $a=\frac{\ln 2}{2}$，$b=\frac{1}{e}$（$e=2.718\cdots$为自然对数的底数），$c=\frac{2\ln 3}{9}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>a>c$　　D. $b>c>a$

25.（2021 潍坊四县 5 月联考 8）关于函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$ 的性质，以下说法正确的是（　　）

A. 函数 $f(x)$ 的周期是 2π

B. 函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有极值

C. 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减

D. 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有最小值

26.（2021 烟台适应性练习二 7）已知函数 $f(x)$ 是定义在区间 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的偶函数，且当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=\begin{cases}2^{|x-1|}, & 0<x\leqslant 2\\ f(x-2)-1, & x>2\end{cases}$，则方程 $f(x)+\frac{1}{8}x^2=2$ 根的个数为（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

27.（2021 省实验中学二模 8）中国科学院院士吴文俊在研究中国古代数学家刘徽著作的基础上，把刘徽常用的方法概括为“出入相补原理”：一个图形不论是平面的还是立体的，都可以切割成有限多块，这有

限多块经过移动再组合成另一个图形，则后一图形的面积或体积保持不变．利用这个原理，解决下面问题：已知函数 $f(x)$满足 $f(4-x)=f(x)$，且当 $x\in[0,2]$时的解析式为 $f(x)=\begin{cases}-\log_2(2-x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \log_2 x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，

则函数 $y=f(x)$ 在 $x\in[0, 4]$时的图象与直线 $y=-1$ 围成封闭图形的面积是（　　）

A．2　　B．$2\log_2 3$　　C．4　　D．$4\log_2 3$

28.（2021 德州二模 8）已知定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，且满足 $f(-1)=-2$ ，则关于 x 的不等式 $f(x)<\frac{2}{x}+\sin\pi x$ 的解集为（　　　）.

A．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　B．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

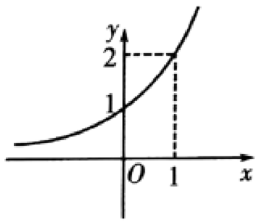
C．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　D．$(-1,0)\cup(0,1)$

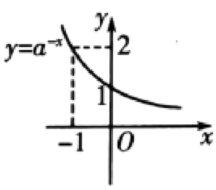
29.（2021 烟台适应性练习一 8）若函数 $f(x)=\begin{cases}log_2(-x), & x<0\\ 2^x+2^{1-x}-a, & x\geq 0\end{cases}$ 的所有零点之和为 0，则实数 a 的取值范围为（　　）

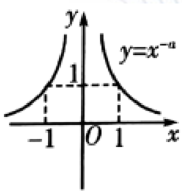
A．$(2\sqrt{2}, 3]$　　B．$[2\sqrt{2}, 3]$　　C．$(2\sqrt{2}, +\infty)$　　D．$[2\sqrt{2}, +\infty)$

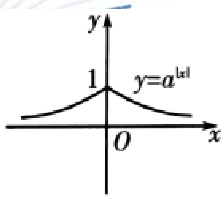
二、　多项选择题

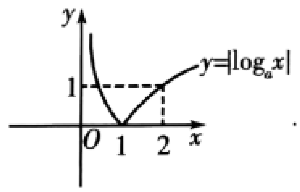
30.（2021 潍坊三模 9）已知函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的图象如下图所示，则下列四个函数图象与函数解析式对应正确的是（　　）



A. 

B. 

C. 

D. 

31.（2021 潍坊二模 9）定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(2-x)$，且在[0，2]上是增函数，下面判断正确的是（　　）

A．$f(x)$ 的周期是 4　　B．$f(2)$ 是函数的最大值

C．$f(x)$ 的图象关于点（-2，0）对称　　D．$f(x)$ 在[2，6]上是减函数

32. （2021 临沂二模 11）若 $a=\log_5 2$，$b=\frac{1}{2}ln2$，$c=\frac{1}{5}ln5$，则（　　）

A. $a>b$　　B. $b>c$　　C. $c>a$　　D. $a>2b$

33. （2021 济南二模 10）已知函数 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$，则下列说法正确的是（　　）

A. $f(x)$ 为奇函数　　B. $f(x)$ 为减函数

C. $f(x)$ 有且只有一个零点　　D. $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1)$

34. （2021 淄博二模 11）已知 e 是自然对数的底数，则下列不等关系中不正确的是（　　　）.

A. $\ln 2>\frac{2}{e}$　　B. $\ln 3<\frac{3}{e}$　　C. $\ln\pi>\frac{\pi}{e}$　　D. $\frac{\ln 3}{\ln\pi}<\frac{3}{\pi}$

35. （2021 菏泽二模 10）已知 $a>b>0$. $a+b=1$，则下列结论正确的有

A. $a+\sqrt{2b}$ 的最大能为 $\frac{3}{2}$　　B. $2^{2a}+2^{2b+1}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$

C. $a+\sin b<1$　　D. $b+\ln a>0$

36. （2021 济宁二模 11）已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，$f(1-x)=-f(1+x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^2+x-2$，则下列说法正确的是（　　　）

A. $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数

B. $f(2018)+f(2021)=-2$

C. 函数 $y=\log_2(x+1)$ 的图象与函数 $f(x)$ 的图象有且仅有 3 个交点

D. 当 $x\in[3,4]$ 时，$f(x)=x^2-9x+18$

37. （2021 菏泽二模 12）已知函数 $f(x)=\frac{\sin\pi x}{e^x+e^{1-x}}$，则下列结论正确的有

A. 函数 $f(x)$ 是周期函数　　B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上先减后增　　D. 函数 $f(x)$ 既有最大值又有最小值

38. （2021 聊城二模 12）用符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如：$[0.6]=0$，$[2.3]=2$. 设 $f(x)=(1-lnx)(ax^2+2lnx)$ 有 3 个不同的零点 x_1，x_2，x_3，则（　　）

A. $x=e$ 是 $f(x)$ 的一个零点

B. $x_1+x_2+x_3=2\sqrt{e}+e$

C. a 的取值范围是 $(-\frac{1}{e}, 0)$

D. 若 $[x_1]+[x_2]+[x_3]=6$，则 a 的范围是 $[-\frac{2\ln 3}{9}, -\frac{\ln 2}{4})$

39.（2021 泰安二模 12）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-x}, & x<1\\ \ln x, & x\geq 1\end{cases}$，$g(x)=kx-k$，则（　　）

A．$f(x)$ 在 R 上为增函数

B．当 $k=\frac{1}{4}$时，方程 $f(x)=g(x)$ 有且只有 3 个不同实根

C．$f(x)$ 的值域为（-1，+∞）

D．若 $(x-1)(f(x)-g(x))\leq 0$，则 $k\in[1,+\infty)$

40.（2021 德州二模 12）已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则（　　　）.

A．$f(2)>f(5)$　　B．若 $f(x)=m$ 有两个不相等的实根 x_1、x_2，则 $x_1x_2<e^2$

C．$\ln 2>\sqrt{\frac{2}{e}}$　　D．若 $2^x=3^y$，x，y 均为正数，则 $2x>3y$

41.（2021 青岛二模 12）已知函数 $f(x)=x\cos x+\sin x$ 在区间（$-n\pi$，$n\pi$）（$n\in N^*$）上的零点个数为 a_n，函数 $f(x)$ 在区间（$-n\pi$，$n\pi$）（$n\in N^*$）上的所有零点的和记为 b_n．则下述正确的是（　　）

A．$b_n=0$

B．$\sum_{i=1}^{n} a_i=n^2+2n$

C．$f(x)$ 在区间（$-n\pi$，$n\pi$）上任意两零点的差大于$\frac{\pi}{2}$

D．$f(x)$ 在区间（$-n\pi$，$n\pi$）上任意两相邻零点的差大于 π

三、填空题

42.（2021 日照二模 13）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{6}, & x\leq 0\\ \log_3 x, & x>0\end{cases}$，则 $f(f(\frac{1}{3}))=$______.

43.（2021 烟台适应性练习一 14）已知曲线 $f(x)=\sin 2x$ 在 $x=\pi$ 处的切线的倾斜角为 α，则 cos2α 的值为____.

44.（2021 聊城三模 14）曲线 $y=e^x+x^2-\frac{2}{3}x$ 在 $x=0$ 处的切线的倾斜角为 α，则 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{2})=$ ________.

45.（2021 菏泽二模 13）写出一个同时满足下列两个条件的非常数函数 ________

①当 $x_1x_2\geq 0$ 时，$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$；②$f(x)$ 为偶函数

46.（2021 淄博三模 13）请写出一个函数 $f(x)=$________，使之同时具有如下性质：①∀$x\in$R，$f(x)=f(4-x)$，②∀$x\in$R，$f(x+4)=f(x)$．

47.（2021 潍坊四县 5 月联考 13）写出一个满足 $f(x)=f(2-x)$ 的奇函数 $f(x)=$________.

48.（2021 枣庄二模 15）写出一个图象关于直线 $x=2$ 对称且在 $[0,2]$ 上单调递增的偶函数 $f(x)=$________.

49.（2021 聊城二模 15）请你举出与函数 $f(x)=e^{2x}-1$ 在 $(0,0)$ 处具有相同切线的一个函数____________.

50.（2021 潍坊三模 14）设函数 $f(x)=\begin{cases}x, x\le 1,\\ (x-1)^2+1, x>1,\end{cases}$ 则不等式 $f(1-|x|)+f(2)>0$ 的解集为___.

51.（2021 滨州二模 15）某同学设想用“高个子系数 k”来刻画成年男子的高个子的程度，他认为，成年男子身高 $160cm$ 及其以下不算高个子，其高个子系数 k 应为 0；身高 $190cm$ 及其以上的是理所当然的高个子，其高个子系数 k 应为 1，请给出一个符合该同学想法、合理的成年男子高个子系数 k 关于身高 $x(cm)$ 的函数关系式____________.

52.（2021 日照三模 16）已知 a，b，c 为正整数，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两实根为 x_1，x_2（$x_1\neq x_2$），且 $|x_1|<1$，$|x_2|<1$，则 $a+b+c$ 的最小值为______.

53.（2021 青岛三模 16）定义方程 $f(x)=f'(x)$ 的实数根 x_0 叫做函数 $f(x)$ 的“新驻点”，若函数 $g(x)=\frac{1}{2}x$，$h(x)=ln2x$，$\phi(x)=\sin x$（$0<x<\pi$）的“新驻点”分别为 α，β，γ，则 α，β，γ 的大小关系为_________.

54.（2021 日照二模 16）牛顿选代法又称牛顿 - 拉夫逊方法，它是牛顿在 17 世纪提出的一种在实数集上近似求解方程根的一种方法．具体步骤如下：设 r 是函数 $y=f(x)$ 的一个零点，任意选取 x_0 作为 r 的初始近似值，过点（x_0，$f(x_0)$）作曲线 $y=f(x)$ 的切线 l_1，设 l_1 与 x 轴交点的横坐标为 x_1，并称 x_1 为 r 的 1 次近似值；过点（x_1，$f(x_1)$）作曲线 $y=f(x)$ 的切线 l_2，设 l_2 与 x 轴交点的横坐标为 x_2，称 x_2 为 r 的 2 次近似值．一般的，过点（x_n，$f(x_n)$）（$n\in N$）作曲线 $y=f(x)$ 的切线 l_{n+1}，记 l_{n+1} 与 x 轴交点的横坐标为 x_{n+1}，并称 x_{n+1} 为 r 的 $n+1$ 次近似值．设 $f(x)=x^3+x-1$（$x\geqslant 0$）的零点为 r，取 $x_0=0$，则 r 的 2 次近似值为__$\frac{3}{4}$__；设 $a_n=\frac{3x_n^3+x_n}{2x_n^3+1}$，$n\in N^*$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n．若任意 $n\in N^*$，$T_n<\lambda$ 恒成立，则整数 λ 的最小值为________.

55.（2021 聊城三模 16）已知函数 $f(x)=(\frac{x}{e^x})^2+(a-2)\frac{x}{e^x}+2-a$ 有三个不同的零点 x_1，x_2，x_3，其中 $x_1<x_2<x_3$，则 $(1-\frac{x_1}{e^{x_1}})^2(1-\frac{x_2}{e^{x_2}})(1-\frac{x_3}{e^{x_3}})$ 的值为________.

56.（2021 济南二模 16）已知函数 $f(x)=e^x-a-eln(ex+a)$，若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

57.（2021 济宁二模 16）设函数 $f(x)=e^x-\cos x-2a$，$g(x)=x$，若存在 x_1、$x_2\in[0,\pi]$ 使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，则 x_2-x_1 的最小值为 1 时，实数 $a=$ ________.

四、解答题

58.（2021 淄博三模 20）已知函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}(x>0)$.

（1）判断函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调性；

（2）证明函数 $f(x)$ 在 $(\pi,2\pi)$ 内存在唯一的极值点 x_0，且 $f(x_0)<-\frac{2}{3\pi}$.

59.（2021 济宁二模 22）已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2+x$ ， $g(x)=(1-a)x\ln x-e^{x-1}$ ， $a>0$.

（1）当 $a=\frac{e}{2}$ 时，判断函数 $f(x)$ 在定义域内的单调性；

（2）若 $f(x)\geq g(x)+x$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

60.（2021 潍坊二模 20）已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{e^x}$的单调递增区间是[0，1]，极大值是$\dfrac{3}{e}$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点（﹣1，f（﹣1））处的切线方程；

（2）若存在非零实数 x_0，使得 $f(x_0)=1$，$m>0$，求 $f(x)$ 在区间（﹣∞，m]上的最小值.

61.（2021 青岛三模 21）已知函数 $f(x)=x-\ln x+\dfrac{2}{x}$.

（1）求 $f(x)$ 的最小值；

（2）若存在区间[a，b]⊆[$\dfrac{1}{2}$，+∞），使 $g(x)=xf(x)$ 在[a，b]上的值域为[$k(a+2)$，$k(b+2)$]，求实数 k 的取值范围.

62.（2021 日照二模 22）已知函数 $f(x)=\frac{1}{6}x^3+ax\ln x-(a+\frac{1}{2})x$.

（1）若 $a\geqslant 0$，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a\geqslant -1$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的极值点个数.

63.（2021 济南二模 20）已知函数 $f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}(n\in N_+)$.

（1）证明：$f_3(x)$ 单调递增且有唯一零点；

（2）已知 $f_{2n-1}(x)$ 单调递增且有唯一零点，判断 $f_{2n}(x)$ 的零点个数.

64.（2021 青岛二模 21）已知函数$f(x)=alnx-\sqrt{x}+1(x>0)$，$a\in$R.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若对任意 $x\in(0,+\infty)$，均有 $f(x)\leqslant 0$，求 a 的值；

（3）假设某篮球运动员每次投篮命中的概率均为 0.81，若其 10 次投篮全部命中的概率为 p，证明：$p<e^{-2}$.

65.（2021 淄博二模 21）已知函数 $f(x)=|\ln x|+ax(a<0)$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $f(x)$ 恰好有一个零点，求 a 的取值范围.

66.（2021 枣庄二模 22）已知函数 $f(x)=a\cos x+1-e^{\frac{\pi}{2}-x}$，且 $f'(\frac{\pi}{2})=0$.

（1）求实数 a 的值，并判断 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的单调性；

（2）对确定的 $k\in N^*$，求 $f(x)$ 在 $[2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\pi]$ 上的零点个数.

67.（2021 省实验中学二模 22）已知函数 $f(x)=e^x-ax$（$a\in R$）.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a=2$ 时，求函数 $g(x)=f(x)-\cos x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},+\infty)$ 上的零点个数.

68.（2021 烟台适应性练习二 22）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}mx^2-2ax+\ln x$（$m$，$a\in R$）在 $x=1$ 处的切线斜率为 $2-2a$.

（1）确定 m 的值，并讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $g(x)=xf(x)-\frac{1}{2}x^3+2x$，若 $g(x)$ 有两个不同零点 x_1，x_2，且 $x_2-3x_1\geqslant 0$，证明：$x_1+x_2>\frac{6}{e^2}$.

69.（2021 烟台三模 22）已知函数 $f(x)=e^x\left(mx^2+x\right)$，$g(x)=e^x x^2+ax+a\ln x+1$.

（1）若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，求实数 m 的值；

（2）当 $m=1$ 时，若对 $\forall x>0$，不等式 $f(x)\geq g(x)$ 恒成立，求实数 a 的值.

70.（2021 潍坊四县 5 月联考 22）已知函数 $f(x)=e^x-ax^2-bx-1$，其中 a，$b\in R$，$e=2.71828\cdots$为自然对数的底数.

（1）设 $g(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，求函数 $g(x)$ 在区间$[0,1]$上的最小值；

（2）若 $f(1)=0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，求 a 的取值范围.

71.（2021 菏泽二模 22）已知函数 $f(x)=e^x-ax^2-bx-1$（a，$b\in R$），$e=2.71828\cdots$为自然对数的底数.

(1)设 $g(x)=f'(x)$，若 $g(x)$ 是 $(0,2)$ 上的单调函数，求 a 的取值范围；

(2)若 $f(2)=0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上有零点，求 a 的取值范围.

72.（2021 聊城二模 22）已知函数 $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^{2}-2$，$g(x)=\frac{1}{2}x^{2}+\sin x-e^{bx}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最小值；

（2）若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，求实数 b 的取值范围.

73.（2021 临沂二模 22）已知函数 $f(x)=xe^{x}-a\ln x$，$a\in R$.

（1）若 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线过原点，求 a 的值；

（2）在（1）的条件下，若 $f(x)\geqslant b(x-1)^{2}+a(\ln x+1)$ 恒成立，求 b 的取值范围.

74.（2021 泰安二模 22）已知函数 $f(x)=m\ln x+kx+1$（$m>0$）.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若存在实数 k，使得 $xf'(x)\leqslant e^{mx}$ 恒成立的 m 值有且只有一个，求 $k+m$ 的值.

75.（2021 烟台适应性练习一 22）已知函数 $f(x)=a(x^2-x)-\ln x$（$a\in R$）.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：当 $x>1$ 时，$\frac{2e^{x-1}}{\ln x}\geq\frac{x^2+1}{x^2-x}$.

76.（2021潍坊三模22）2 设函数 $f\left(x\right)=x\ln x$.

（1）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(e^{-2},f\left(e^{-2}\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）若关于 x 的方程 $f\left(x\right)=a$ 有两个实根，设为 x_1， x_2（$x_1<x_2$），证明：$x_2-x_1<1+2a+e^{-2}$.

77.（2021德州二模22）已知函数 $f(x)=x\ln x+mx$ ，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 1.

（1）求实数 m 的值；

（2）设 $g(x)=\frac{af(x)}{x}+x^2-8x(a\in R)$ 在定义域内有两个不同的极值点 x_1 、 x_2 ，求实数 a 的取值范围；

（3）在（2）的条件下，令 $x_1<x_2$ 且 $x_1\neq 1$ ，总有 $(t-2)(4+3x_1-x_1^2)<\frac{a\ln x_1}{1-x_1}$ 成立，求实数 t 的取值范围.

78.（2021 滨州二模 22）已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}-2ax,a\in\mathbf{R}$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的极值；

（2 当 $a>0$ 时，若 $x_1\neq x_2$，且 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，求证：$x_1+x_2<4a-2$.

79.（2021 日照三模 22）设函数$f(x)=e^{x}-\frac{1}{2}ax^2-x$.

（1）若函数 f（x）在 R 上单调递增，求 a 的值；

（2）当 a>1 时，

①证明：函数 f（x）有两个极值点 x_1，x_2（x_1<x_2），且 x_2-x_1 随着 a 的增大而增大；

②证明：$f(x_2)$<$1+\frac{sinx_2-x_2}{2}$.

80.（2021 聊城三模 22）已知 $f(x)=e^x-ax^2-x-1$.

（1）当 $a=\frac{e}{2}$ 时求 $f(x)$ 的极值点个数；

（2）当 $x\in[0,+\infty)$ 时， $f(x)\geq 0$ ，求 a 的取值范围；

（3）求证： $\frac{2}{2e-1}+\frac{2}{2e^2-1}+\cdots+\frac{2}{2e^n-1}<\frac{3}{2}$ ，其中 $n\in N^*$.

专题八　函数与导数参考答案

一、单项选择题

1. 【答案】B

【解析】因为幂函数 $y=x^a$ 的图象过点（2，4），

所以 $2^a=4$，$a=2$，

$y=f(x)=x^2$，

所以 $f(-3)=(-3)^2=9$.

故选：B.

2. 【答案】B

【解析】由图可知，图象随着 x 的增大而增高，且增长速度越来越快，

结合选项，可判断 $y=a+be^x$ 最适宜作为感染人数 y 和时间 x 的回归方程.

故选：B.

3. 【答案】A

【解析】 $f(2021)=f(-1)=\mathrm{e}^{-1+\ln 2}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，故选 A.

4. 【答案】C

【解析】根据题意，函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-1, & x<0\\ g(x), & x>0\end{cases}$，

则 $f(-1)=(-1)^3-1=-2$，$f(-2)=(-2)^3-1=-9$，

又由 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(-2)=-f(2)=-g(2)=-9$，则 $g(2)=9$，

则 $f(-1)+g(2)=9-2=7$；

故选：C.

5. 【答案】C

【解析】∵函数 $f(x)=\begin{cases}3^{-x}+1 & (x\leqslant 0)\\ x^a+2 & (x>0)\end{cases}$，$f(f(-1))=18$，

∴ $f(-1)=3+1=4$，

$f(f(-1))=f(4)=4^a+2=18$，

解得 $a=2$.

故选：C.

6.【答案】D

【解析】∵$a=5^{0.3}>5^{0}=1$，

$\log_{0.3}1<\log_{0.3}0.5<\log_{0.3}0.3$，$0<b<1$，

$c=\log_{3}0.4<\log_{3}1=0$，

∴$c<b<a$，

故选：D.

7.【答案】D

【解析】∵ $a=2^{0.8}$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}$，$c=2^{0.6}$，且 $2^{0.8}>2^{0.6}>2^{0}=1$，$\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$，

∴$b<c<a$.

故选：D.

8.【答案】B

【解析】根据题意，令 $a=\frac{1}{2}$、$b=\frac{1}{4}$，则 $P=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$，$M=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$，$N=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$.

根据幂函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$在（0，+∞）上是增函数，可得 $P<M$;

根据指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$在 R 上是减函数，可得 $M<N$.

故选：B.

9.【答案】D

【解析】根据题意，函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，则 $a=f(-2^{\frac{3}{2}})=f(2^{\frac{3}{2}})=f(\sqrt{8})$，

当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln x+x$，其导数为 $f'(x)=\frac{1}{x}+1$，则 $f(x)$ 在（0，+∞）上为增函数，

又由 $0<\sqrt{5}<\sqrt{8}<3=\log_{2}8<\log_{2}9$，则 $f(\sqrt{5})<f(2^{\frac{3}{2}})<f(\log_{2}9)$，

故有 $b>a>c$，

故选：D.

10.【答案】 A

【解析】由 $f(x)=\frac{x^2}{e^x-e^{-x}}$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$f(-x)=\frac{(-x)^2}{e^{-x}-e^{x}}=-\frac{x^2}{e^x-e^{-x}}=-f(x)$，

所以函数为奇函数，故排除 BD;

当 $x>0$ 时，$f(x)>0$；当 $x\to+\infty$ 时，函数 $y=e^x-e^{-x}$ 的增长速度比 $y=x^2$ 的增产速度快，

所以 $f(x) \to 0$ ，故排除 C；

故答案为：A

11.【答案】 D

【解析】因为 $f(x)=(e^{x}+e^{-x})\tan x$ ， $x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k \in Z$ ，定义域关于原点对称，

且 $f(-x)=(e^{x}+e^{-x})\tan(-x)=-f(x)$ ，

所以函数为奇函数，故排除 C 选项，

当 $x=0$ 时， $f(0)=0$ ，故排除 B 选项；

当 $x=1$ 时， $f(1)>0$ ，故排除 A，

故答案为：D

12.【答案】 A

【解析】由 $f(x)=\frac{2^{x+1}\ln|x|}{4^{x}+1}=\frac{\ln x^{2}}{2^{x}+2^{-x}}$ 知，

$f(x)$ 为偶函数， $f(1)=0$ ， $f(\frac{1}{2})=\frac{-\ln 4}{2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}}<0$ ，故排除 BC 选项；

$f(4)=\frac{\ln 16}{2^{4}+2^{-4}} \approx 0.17$ ， $f(5)=\frac{\ln 25}{2^{5}+2^{-5}} \approx 0.10$ ，易知 $f(x)$ 在随着 x 增大过程中出现递减趋势，且趋近于 x 轴，A 符合题意.

故答案为：A.

13.【答案】A

【解析】函数的定义域为 R，$f(-x)=(e^{-x}-e^{x})\sin|-2x|=-(e^{x}-e^{-x})\sin|2x|=-f(x)$，为奇函数，故排除选项 B，C；

又 $f(\frac{1}{2})=(e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}})\sin 1>0$，$f(\frac{\pi}{2})=0$，且 $\frac{\pi}{2}$ 是第一个大于 0 的零点，故排除选项 D.

故选：A.

14.【答案】B

【解析】 $f(2)=2+n=6$，故 $n=4$，$f(t)=t(t-3)^{2}+4$，$(t \in [0,5])$，

则 $f'(t)=(t-3)^{2}+2t(t-3)=3(t-1)(t-3)$，

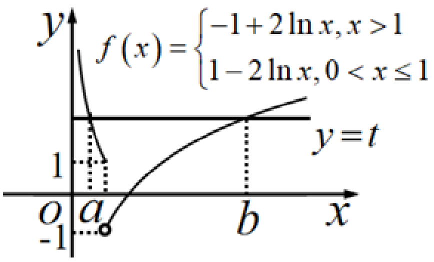
则 $t \in (0,1)$ 时， $f(t)$ 单增； $t \in (1,3)$ 时， $f(t)$ 单减； $t \in (3,5)$ 时， $f(t)$ 单增；

则 $t=1$ 和 2 时，处在中期，出现价格下跌，即 6 月和 7 月

故选：B

15.【答案】 C

【解析】函数 $f(x)=\begin{cases}-1+2\ln x, x>1\\1-2\ln x, 0<x\le 1\end{cases}$ 的图像如图所示，



作出 $y=t$ 交 $y=f(x)$ 两点，其横坐标分别为 a、b ， 不妨设 $0<a\le 1<b$.

由 $f(a)=f(b)$ 可得： $1-2\ln a=-1+2\ln b$ ，解得： $ab=e$ ，

所以 $a+b=a+\frac{e}{a}$

记 $g(a)=a+\frac{e}{a}(0<a\le 1)$ ，

任取 $0<a_1<a_2\le 1$ ，则 $g(a_1)-g(a_2)=(a_1+\frac{e}{a_1})-(a_2+\frac{e}{a_2})$=$(a_1-a_2)+(\frac{e}{a_1}-\frac{e}{a_2})$=$(a_1-a_2)(1-\frac{e}{a_1a_2})$ 。

因为 $0<a_1<a_2\le 1$ ，所以 $a_1-a_2<0,1-\frac{e}{a_1a_2}<0$ ，所以 $(a_1-a_2)(1-\frac{e}{a_1a_2})>0$ ，

所以 $g(a_1)>g(a_2)$

则 $g(a)=a+\frac{e}{a}$ 在 $a\in(0,1)$ 上单调递减，所以 $g(a)_{\min}=g(1)=1+e.$

故答案为：C

16.【答案】C

【解析】条件可化为$\frac{lna}{a}=\frac{ln5}{5},\frac{lnb}{b}=\frac{ln4}{4},\frac{lnc}{c}=\frac{ln3}{3}$,，构造函数$f(x)=\frac{lnx}{x}$，可得 f(a)=f(5)， f(b)=f(4)，f(c)=f(3)，结合函数$f(x)=\frac{lnx}{x}$的图像得答案为 C.

17.【答案】D

【解析】$\because f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$，$\because f(\pi+x)=f(-x)=-f(x)\ne f(x)$，故$\pi$不是函数$f(x)$的周期，且$f(x+2\pi)=-f(x+\pi)=f(x)$，故$2\pi$是函数$f(x)$的周期，故 A 错误；

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$y=\sin x>0$且单调递增，$y=x^2-\pi x+\pi>0$且单调递减，则$f(x)$单调递增，故 C 错误；

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，$y=\sin x>0$且单调递减，$y=x^2-\pi x+\pi>0$且单调递增，则 $f\left(x\right)$单调递减；

且 $f\left(0\right)=f\left(\pi\right)=0$，又 $f\left(x\right)$是奇函数且周期为2π，$\therefore f\left(x\right)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{4\pi-\pi^2}\neq 2$，故 B 错误；

由 $f\left(\pi+x\right)=f\left(-x\right)$可得 $f\left(x\right)$关于 $x=\frac{\pi}{2}$对称，方程 $f\left(x\right)-\frac{1}{2}=0$的根等价于 $y=f\left(x\right)$与 $y=\frac{1}{2}$的交点的横坐标，根据 $f\left(x\right)$的单调性和周期可得，$y=f\left(x\right)$与 $y=\frac{1}{2}$在$\left(0,\pi\right)$有两个关于 $x=\frac{\pi}{2}$对称的交点，在$\left(2\pi,3\pi\right)$有两个关于 $x=\frac{5\pi}{2}$对称的交点，在$\left(-2\pi,-\pi\right)$有两个关于 $x=-\frac{3\pi}{2}$对称的交点，所以方程 $f\left(x\right)-\frac{1}{2}=0$在 $x\in\left(-10,10\right)$上的所有实根之和为$\frac{\pi}{2}\times 2+\frac{5\pi}{2}\times 2+\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\times 2=3\pi$，故 D 正确.

故选：D.

18. 【答案】B

【解析】$y=e^{2ax}$的导数为 $y'=2ae^{2ax}$，

可得在点（0，1）处的切线的斜率为 $k=2a$，

由于切线及直线 $2x-y-1=0$ 和两坐标轴的正半轴所围成的四边形有外接圆，

可得切线与直线 $2x-y-1=0$ 垂直，

所以 $2k=-1$，即 $4a=-1$，

解得 $a=-\frac{1}{4}$.

故选：B.

19. 【答案】B

【解析】当 $x\in[0，2]$时，$f（x）=2^x-a$ 为增函数，

当 $x\in[2，+\infty）$时，$f（x）=b-x$ 为减函数，故 6 和 4 只有一个是函数的零点，

即甲乙中有一个结论错误，一个结论正确，而丙、丁均正确.

由两零点之积为 0，则必有一个零点为 0，则 $f（0）=2^0-a=0$，得 $a=1$，

若甲正确，则 $f（6）=0$，即 $b-6=0$，$b=6$，

可得 $f(x)=\begin{cases}2^x-1, & 0\leqslant x<2\\ 6-x, & x\geqslant 2\end{cases}$，由 $f(x)=\dfrac{5}{2}$，

可得 $\begin{cases}0\leqslant x<2\\ 2^x-1=\dfrac{5}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant 2\\ 6-x=\dfrac{5}{2}\end{cases}$，解得 $x=\log_2\dfrac{7}{2}$ 或 $x=\dfrac{7}{2}$，方程 $f(x)=\dfrac{5}{2}$ 有两个根，故丁正确.

故甲正确，乙错误.

故选：B.

20.【答案】D

【解析】由函数 $f(x)$ 的特征可知：函数在区间 $[-1,1]$ 上单调递减，其中该区间的宽度为 2，所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减与函数 $f(x)$ 的周期为 2 互相矛盾.

即：丙和丁中有一个为假命题.

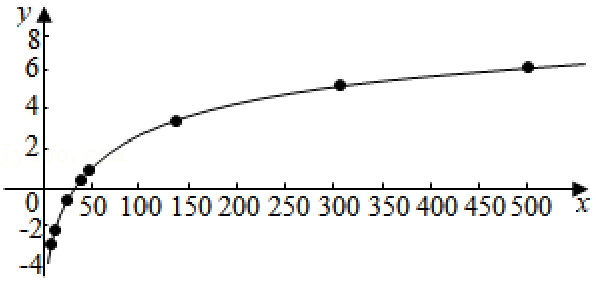
若甲乙成立，故 $f(-x)=-f(x)$，$f(x+1)=f(1-x)$ 故 $f(x+2)=f[1-(1+x)]=f(-x)=-f(x)$，故 $f(x+4)=f(x)$，所以函数的周期为 4，

即丁为假命题，由于只有一个假命题，

故选：D.

21.【答案】B

【解析】解：根据表格数据，在直角坐标系中从左到右依次标注表格数据代表的点，拟合曲线如下所示，



图象左侧无限接近 y 轴，不与 y 轴重合，故其拟合曲线比较接近 $y=\lg x$ 的图象.

故选：B.

22.【答案】B

【解析】正整数 N 的 31 次方是个 35 位数，

则 $10^{34}<N^{31}<10^{35}$，

则 $\dfrac{34}{31}<\lg N<\dfrac{35}{31}$，

则 $1.09<\lg N<1.13$，

由对数表知，$N=13$.

故选：B.

23.【答案】D

【解析】∵对任意正实数 x 恒有 $xf'(x)>2f(-x)$，∴$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)=x[2f(x)+xf'(x)]>0$，

定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 的图象连续不断且 $g(x)=x^2f(x)$，∴函数 $g(x)$ 是在 R 上单调递增的奇函数，

∵$g(\log_3(x^2-1))+g(-1)<0$，∴$g(\log_3(x^2-1))<-g(-1)=g(1)$，∴$\log_3(x^2-1)<1$ 且 $x^2-1>0$，解得：$x\in(-2,-1)\cup(1,2)$．

故选：D.

24.【答案】C

【解析】∵$a=\frac{ln2}{2}, b=\frac{1}{e}=\frac{lne}{e}$，$c=\frac{2ln3}{9}=\frac{ln9}{9}$，

∴构造函数 $f(x)=\frac{lnx}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}$，$x>0$，

由 $f'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}=0$，得 $x=e$，

当 $f'(x)<0$ 时，$x>e$，$f(x)$ 是减函数，

当 $f'(x)>0$ 时，$0<x<e$，$f(x)$ 是增函数，

∴当 $x=e$ 时，$f(x)$ 取最大值，

∵ $c=\frac{ln9}{9}=\frac{\frac{2}{9}ln9}{2}=\frac{ln\sqrt[9]{81}}{2}$，

$a=\frac{ln2}{2}=\frac{ln\sqrt[9]{2^9}}{2}=\frac{ln\sqrt[9]{216}}{2}$.

∴$a>c$，∴$b>a>c$.

故选：C.

25.【答案】D

【解析】对于 A 选项：$f(x+2\pi)=\frac{\sin(x+2\pi)}{x+2\pi}=\frac{\sin x}{x+2\pi}\neq f(x)$，选项 A 错误；

对于 B 选项：$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，令 $G(x)=x\cos x-\sin x$.

则 $x\in(0,\pi)$ 时 $G'(x)=-x\sin x<0$，$G(x)$ 单调递减，

又 $G(0)=0$，故在该区间 $G(x)<0$．而 $x^2>0$，则 $x\in(0,\pi)$ 时，$f'(x)<0$.

故 $x\in(0,\pi)$ 函数 $f(x)$ 单调递减没有极值，选项 B 错误；

对于 C 选项：$f'(\frac{3}{2}\pi)=\frac{4}{9\pi^2}>0$，即存在函数单调递增的点．选项 C 错误；

对于选项 D：$f'(\pi)=-\frac{1}{\pi}<0$，$f'(2\pi)=\frac{2}{\pi}>0$.

故在 $x\in(\pi,2\pi)$ 存在一点 x_0，使得 $f'(x_0)=0$，且 $f(x_0)$ 为函数的极小值，

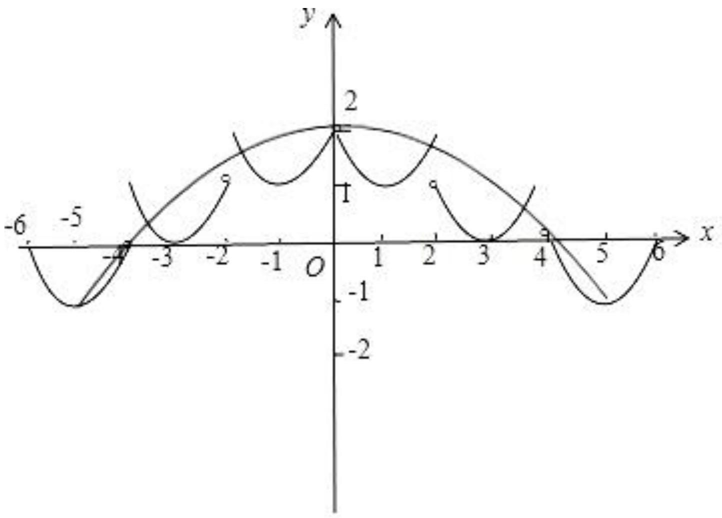
故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至少有一个极小值，且其在 $(0,+\infty)$ 定义域时连续不断地，因此也存在最小值，

选项 D 正确.

故选：D.

26. 【答案】D

【解析】方程 $f(x)+\frac{1}{8}x^2=2$ 根的个数⇔函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=-\frac{1}{8}x^2+2$ 的图象交点个数，图象如下：



由图象可知两函数图象有 6 个交点.

故选：D.

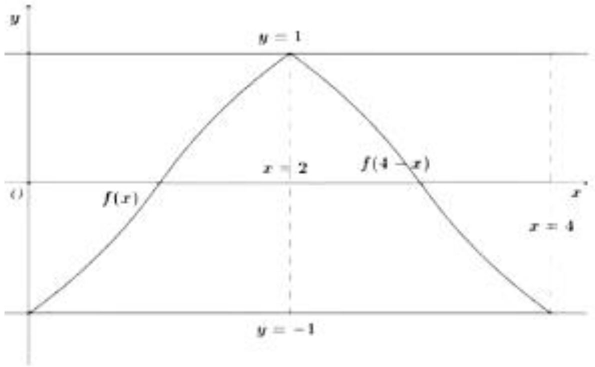
27. 【答案】C

【解析】由题意可得，$f(x)$ 关于 $x=2$ 对称，

而 $f(x)=\begin{cases}-\log_2(2-x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \log_2 x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，

且 $f(0)=f(4)=-1$，$f(2)=1$，

在 $x\in[0,4]$，$f(x)$，$f(4-x)$ 及 $y=-1$ 的图象如下：



所以将围成的图形在 x 轴下半部分阴影区域部分相补到 x 轴上半部分的阴影区域，

可得图示：由 x 轴，y 轴，$y=1$，$x=4$ 所围成的矩形的面积，

所以函数 $y=f(x)$ 在 $x\in[0,4]$ 的图象与直线 $y=1$ 围成的封闭图形的面积为 4.

故选：C.

28.【答案】 C

【解析】$\because f(x)$ 为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$ ，

令 $g(x)=f(x)-\frac{2}{x}$ ，则 $g(-x)=f(-x)+\frac{2}{x}=-f(x)+\frac{2}{x}=-g(x)$ ，

$\therefore g(x)$ 为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上奇函数；

$\because f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增， $y=-\frac{2}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

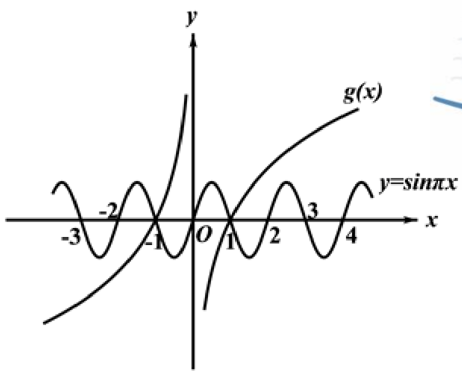
$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，由奇函数性质知： $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

$\because f(-1)=-2$ ， $\therefore g(-1)=f(-1)+2=0$ ，则 $g(1)=0$ ，

又 $f(\frac{5}{2})>f(1)=-f(-1)=2$ ，当 $x=\frac{5}{2}$ 时， $\frac{2}{x}+\sin\pi x=\frac{4}{5}+\sin\frac{5\pi}{2}=\frac{9}{5}$ ，

$\therefore$ 当 $x=\frac{5}{2}$ 时， $f(x)<\frac{2}{x}+\sin\pi x$ 不成立，即 $g(\frac{5}{2})<\sin\frac{5\pi}{2}$ 不成立，

由此可在坐标系中画出 $g(x)$ 与 $y=\sin\pi x$ 大致图象如下图所示：



由图象可知：当 $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ 时， $g(x)<\sin\pi x$ ，

即当 $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ 时， $f(x)<\frac{2}{x}+\sin\pi x$.

故答案为：C.

29. 【答案】A

【解析】当 $x<0$ 时函数零点即为方程 $\log_2(-x)=0$ 的解，解得：$x=-1$.

当 $x\geqslant0$ 时，函数零点即为方程 $2^x+2^{1-x}-a=0$ 的解，方程整理得：$(2^x)^2-a\cdot2^x+1=0$，

设两个根为 x_1、x_2，则由题意知 $x_1+x_2=1$，$\therefore 0\leqslant x_1\leqslant1$，$\therefore 1\leq 2^{x_1}\leq2$，

由根与系数关系可知$2^{x_1}+2^{x_2}=a$，$2^{x_1}\cdot2^{x_2}=2$，$\therefore a=2^{x_1}+\frac{2}{2^{x_1}}$，

设 $2^{x_1}=t\in[1,2]$，$\therefore a=t+\frac{2}{t}$，$a'=1-\frac{2}{t^2}$，由 $a'>0$ 得：$\sqrt{2}<t<2$，

$\therefore$函数 $a=t+\frac{2}{t}$在$[1,\sqrt{2})$上递减，在$(\sqrt{2},2]$上递增，又$\because$当 $t=\sqrt{2}$时，$a=2\sqrt{2}$

当 $a=2\sqrt{2}$时不满足零点之和为 0；

当 $t=1$ 或 2 时，$a=3$. $\therefore t\in(2\sqrt{2},3]$.

故选：A.

二、多项选择题

30. 【答案】ABD

【解析】由图可得 $a^1=2$，即 $a=2$，

$y=a^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$单调递减过点$(-1,2)$，故 A 正确；

$y=x^{-a}=x^{-2}$为偶函数，在$(0,+\infty)$上单调递减，在$(-\infty,0)$上单调递增，故 B 正确；

$y=a^{|x|}=2^{|x|}=\begin{cases}2^x,x\geq0\\2^{-x},x<0\end{cases}$为偶函数，结合指数函数图象可知 C 错误；

$y=|\log_a x|=|\log_2 x|$，根据““上不动、下翻上”可知 D 正确；

故选：ABD.

31. 【答案】BD

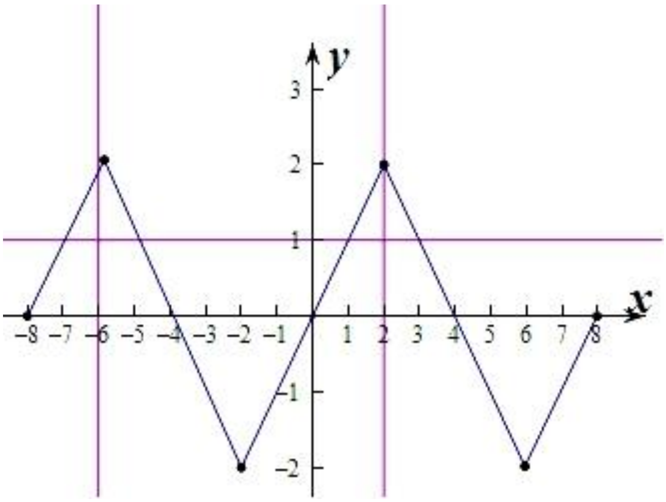
【解析】定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(2-x)$，得 $f(x+2+2)=f(2-x-2)=f(-x)=-f(x)$，即 $f(x+4)=-f(x)$，

则 $f(x+8)=-f(x+4)=-[-f(x)]=f(x)$.

∴$f(x)$ 的周期为 8．函数 $f(x)$ 的图形如下：

由图可得，正确答案为：B，D.

故选：BD.



32.【答案】AB

【解析】$a=\frac{ln2}{ln5}$，$b=\frac{ln2}{2}$，$2b=ln2$，$ln2>0$，$1<ln5<2$，

∴$a>b$，$a<2b$，

设$f(x)=\frac{lnx}{x}$，则$f'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}$，

∴$x>e$ 时，$f'(x)<0$，

∴$f(x)$ 在（e，$+\infty$）上单调递减，且$b=\frac{ln4}{4}$，$c=\frac{ln5}{5}$，

∴$b>c$，

∴$a>c$.

故选：AB.

33.【答案】AC

【解析】∵函数 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$，

∴$f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=-\frac{2^x-1}{2^x+1}=-f(x)$，$x\in R$，

∴$f(x)$ 为奇函数．故 A 正确．

∵$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$.

∵ $y=2^x+1$ 在 R 上单调递增，所以 $f(x)=1-\dfrac{2}{2^x+1}$ 在 R 上为增函数．故 B 答案错误．

令 $f(x)=0$，则 $2^x-1=0$，得到 $x=0$，所以 $f(x)$ 有且只有一个零点．故 C 答案正确．

∵ $f(x)$ 在 R 上为增函数，

所以当 $x\to-\infty$ 时，$2^x\to0$，∴ $f(x)\to1-\dfrac{2}{1}=-1$，$x\to+\infty$ 时，$2^x+1\to+\infty$，∴ $f(x)\to1$．

∴ $f(x)\in(-1,1)$．故 D 答案错误．

故选：AC．

34.【答案】 A, C, D

【解析】令 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$，

当 $0<x<e$ 时 $f'(x)>0$，当 $e<x$ 时 $f'(x)<0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，故 $f_{\max}(x)=f(e)=\ln e-\frac{e}{e}=0$

则 $f(2)=\ln2-\frac{2}{e}<0$ 得 $\ln2<\frac{2}{e}$，A 不符合题意；

$f(3)=\ln3-\frac{3}{e}<0$ 得 $\ln3<\frac{3}{e}$，B 符合题意；

$f(\pi)=\ln\pi-\frac{\pi}{e}<0$ 得 $\ln\pi<\frac{\pi}{e}$，C 不符合题意；

对 D 项，令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<e$ 时 $g'(x)>0$，当 $e<x$ 时 $g'(x)<0$

所以 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

则 $g(3)>g(\pi)$，得 $\frac{\ln3}{3}>\frac{\ln\pi}{\pi}$，化为 $\frac{\ln3}{\ln\pi}>\frac{3}{\pi}$，D 不符合题意

故答案为：ACD

35.【答案】BC

【解析】因为 $a>b>0$. $a+b=1$，则$0<b<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<a<1$

A 选项 $a+\sqrt{2b}=1-b+\sqrt{2b}=-(\sqrt{b}-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{3}{2}$，当$\sqrt{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，即$b=\frac{1}{2}$，原式最大值为$\frac{3}{2}$，又$0<b<\frac{1}{2}$，故取不到最大值$\frac{3}{2}$，因此 A 错；

B 选项$2^{2a}+2^{2b+1}\geq2\sqrt{2^{2a+2b+1}}=2\sqrt{2^3}=4\sqrt{2}$，当且仅当 2a=2b+1，即$a=\frac{3}{4}$，$b=\frac{1}{4}$时取等号，故 B 正确；

C 选项 $a+\sin b=\sin b+1-b$，令 h(b)=$\sin b+1-b$（$0<b<\frac{1}{2}$），所以 h′(b)=cosb−1<0，故 h(b) 为减函数，

所以 h(b)<h(0)=1，因此 $a+sinb<1$，C 正确；

D 选项. $b+1na$=lna+1−a，令 g(a)=lna+1−a$(\frac{1}{2}<a<1)$，则$g'(a)=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}>0$，因此 g(a)为增函数，因为$g(a)>g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-ln2$而$\frac{1}{2}-ln2<0$，所以当 a→$\frac{1}{2}$时，g(a)<0，$b+1na>0$ 不恒成立，故 D 不正确.

故正确选项为 BC.

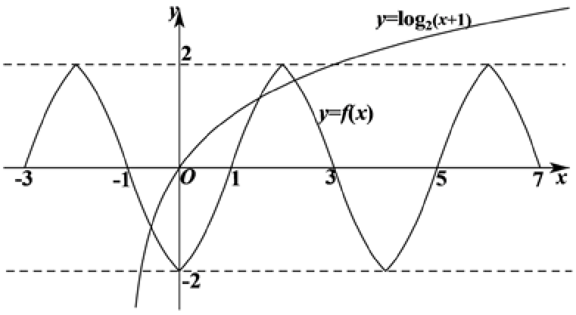
36.【答案】 A,C,D

【解析】对于 A 选项，由已知条件可得 $f(x+1)=-f(1-x)=-f(x-1)=f(x-3)$ ，

所以，函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，A 选项正确；

对于 B 选项， $f(2018)=f(2)=-f(0)=2$ ， $f(2021)=f(1)=0$ ，则 $f(2018)+f(2021)=2$ ，B 选项错误；

对于 C 选项，作出函数 $y=\log_2(x+1)$ 与函数 $f(x)$ 的图象如下图所示：



当 $x\in[0,1]$ 时， $f(x)=x^2+x-2=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}\in[-2,0]$ ，结合图象可知， $-2\le f(x)\le 2$.

当 $x>3$ 时， $\log_2(x+1)>2$ ，即函数 $y=\log_2(x+1)$ 与函数 $f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上的图象无交点，由图可知，函数 $y=\log_2(x+1)$ 与函数 $f(x)$ 的图象有 3 个交点，C 选项正确；

对于 D 选项，当 $x\in[3,4]$ 时， $x-4\in[-1,0]$ ，则 $4-x\in[0,1]$ ，

所以， $f(x)=f(x-4)=f(4-x)=(4-x)^2+(4-x)-2=x^2-9x+18$ ，D 选项正确.

故答案为：ACD.

37.【答案】BCD

【解析】A 显然错误；对于 B，可验证$f(\frac{1}{2}-x)=f(\frac{1}{2}+x)$，故 B 正确；对于 C 研究 f(x)的导数，对导数的分子 g(x)再次求导可知，g(x)在(1,2)上单调递增，又 g(1)<0，g(2)>0，所以 f(x)在(1,2)上先减后增，故 C 正确；对于 D 易知$f(\frac{1}{2})$为函数的最大值，又函数 f(x)关于$x=\frac{1}{2}$对称，所以只研究$x>\frac{1}{2}$的情况即可，又在(1,2),(3,4),…上 f(x)<0，且在(1,2)上|f(x)|最大，所以 f(x)在(1,2)上的极小值即为 f(x)的最小值，故 D 正确.

38.【答案】AD

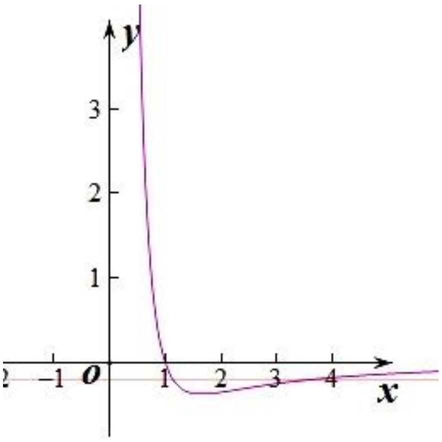
【解析】令 $f(x)=0$，则 $1-lnx=0$ 或 $ax^2+2lnx=0$，由 $1-lnx=0$ 解得 $x_1=e$，故选项 A 正确；

又 $f(x)$ 有 3 个不同的零点，故 $ax^2+2lnx=0$ 有两个不同的零点，即 $a=-\frac{2\ln x}{x^2}$ 有两个不同的零点，不妨设这两个零点为 x_2，x_3（$x_2<x_3$），

∴函数 $g(x)=-\frac{2\ln x}{x^2}$ 的图象与直线 $y=a$ 有两个不同的交点，

由 $g(x)=-\frac{2\ln x}{x^2}$ 得 $g'(x)=\frac{4\ln x-2}{x^3}$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{e}$，易知 $g(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 单减，在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 单增，且 $g(\sqrt{e})=-\frac{1}{e}$，

作出 $g(x)$ 的大致图象如下，



由图象可知，$1<x_2<\sqrt{e}<x_3$，显然 $g(x)$ 不关于 $x=\sqrt{e}$ 对称，故 $x_2+x_3\neq 2\sqrt{e}$，

∴ $x_1+x_2+x_3\neq 2\sqrt{e}+e$，选项 B 错误；

又要使函数 $g(x)=-\frac{2\ln x}{x^2}$ 的图象与直线 $y=a$ 有两个不同的交点，则 $a\in(-\frac{1}{e},0)$，注意到 e 不是此时的零点，

∴ $ae^2+2lne\neq 0$，即 $a\neq -\frac{2}{e^2}$，

∴ $a\in(-\frac{1}{e},-\frac{2}{e^2})\cup(-\frac{2}{e^2},0)$，选项 C 错误；

又 $[x_1]=[e]=2$，$[x_2]=1$，

$\therefore [x_3]=3$，

$\therefore 3\leqslant x_3<4$，

$\therefore g(3)\leqslant g(x_3)<g(4)$，即 $-\dfrac{2\ln 3}{9}\leqslant a<-\dfrac{\ln 2}{4}$，选项 D 正确.

故选：AD.

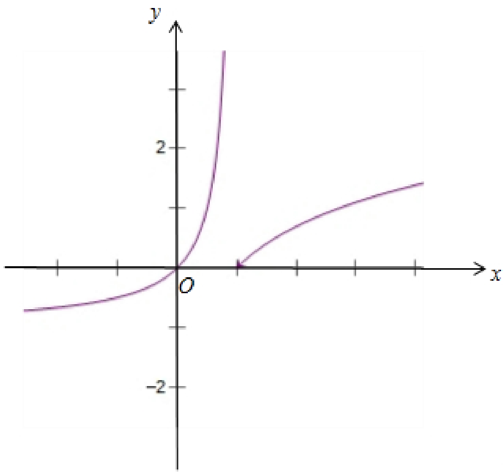
39.【答案】BCD

【解析】解：对于 A：当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=\ln x$ 单调递增，

当 $x<1$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{-(1-x)+1}{1-x}=-1+\dfrac{1}{1-x}$ 单调递增，

当 $x\to 1^-$ 时，$f(x)\to +\infty$，

作出函数 $f(x)$ 图像可得：



所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$，$(1, +\infty)$ 时，单调递增，故 A 不正确；

对于 B：当 $k=\dfrac{1}{4}$ 时，$g(x)=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4}$ 过点 $(1, 0)$，

所以当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 有两个交点，

当 $x<1$ 时，令 $f(x)=g(x)$，即 $\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4}$，

解得 $x=-1$，

此时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的交点为 $(-1, -\dfrac{1}{2})$，

综上，$f(x)$ 与 $g(x)$ 有三个交点，

即 $f(x)=g(x)$ 有三个实数根，故 B 正确；

对于 C：当 $x\to -\infty$ 时，$f(x)\to -1$，

结合图像可得 $f(x)$ 的值域为 $(-1, +\infty)$，故 C 正确；

对于 D：若 $(x-1)(f(x)-g(x))\leqslant 0$，

则 $\begin{cases}x-1\geqslant 0\\ f(x)-g(x)\leqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1\leqslant 0\\ f(x)-g(x)\geqslant 0\end{cases}$，

当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)-g(x)\leqslant 0$，即为 $\ln x\leqslant kx-k$，

$g(x)$ 恒过 $(1, 0)$ 点，

设过 $(1, 0)$ 与 $f(x)=\ln x$ 相切的切线的切点为 (x_0, y_0)，

所以$\begin{cases} k_{切}=\dfrac{1}{x_0} \\ k_{切}=\dfrac{y_0}{x_0-1} \\ y_0=\ln x_0 \end{cases}$，解得 $x_0=1$，$y_0=1$，$k_{切}=1$，

所以当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)-g(x)\leqslant0$ 的 k 的取值范围为$[1，+\infty)$，

当 $x<1$ 时，$f(x)-g(x)>0$，即$\dfrac{x}{1-x}>kx-k$，

设过点（1，0）与 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$相切的切线的切点为（x_1，y_1），

$f'(x)=\dfrac{(1-x)-(-1)x}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，

所以$\begin{cases} k_{切}=\dfrac{1}{(1-x_1)^2} \\ k_{切}=\dfrac{y_1}{x_1-1} \\ y_1=\dfrac{x_1}{1-x_1} \end{cases}$，解得 $x_1=-1$，$k_{切}=\dfrac{1}{4}$，

所以当 $x<1$ 时，$f(x)-g(x)>0$ 的 k 的取值范围为$[\dfrac{1}{4}，+\infty)$，

综上所述，k 的取值范围为$[1，+\infty)$，故 D 正确.

故选：BCD.

40. 【答案】 A, D

【解析】对于 A：$f(2)=\frac{\ln 2}{2}=\ln\sqrt{2}, f(5)=\frac{\ln 5}{5}=\ln\sqrt[5]{5}$，又 $(\sqrt{2})^{10}=2^5=32$，$(\sqrt[5]{5})^{10}=25$，$32>25$，所以 $\sqrt{2}>\sqrt[5]{5}$，则有 $f(2)>f(5)$，A 符合题意；

对于 B：若 $f(x)=m$ 有两个不相等的实根 x_1、x_2，则 $x_1x_2>e^2$，B 不正确；

证明如下：函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，定义域为 $(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $f'(x)>0$ 时，$0<x<e$；当 $f'(x)<0$ 时，$x>e$；，

所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，则 $f(x)_{\max}=\frac{1}{e}$ 且 $x>e$ 时，有 $f(x)>0$，所以 若 $f(x)=m$ 有两个不相等的实根 x_1、x_2，有 $0<m<\frac{1}{e}$，

不妨设 $x_1<x_2$，有 $0<x_1<e<x_2$，要证 $x_1x_2>e^2$，只需证 $x_2>\frac{e^2}{x_1}$，且 $x_2>\frac{e^2}{x_1}>e$，又

$f(x_1)=f(x_2)$ ，所以只需证 $f(x_1)<f(\frac{e^2}{x_1})$ ，令 $F(x)=f(x)-f(\frac{e^2}{x})$ $(0<x<e)$

则有 $F'(x)=f'(x)+f'(\frac{e^2}{x})\cdot\frac{1}{x^2}=(1-\ln x)(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{e^4})$

当 $0<x<e$ 时， $1-\ln x>0$ ， $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{e^4}>0$ ，所以有 $F'(x)>0$ ，即 $F(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，

且 $F(e)=0$ ，所以 $F(x)<0$ 恒成立，即 $f(x_1)<f(\frac{e^2}{x_1})$ ，即 $f(x_2)<f(\frac{e^2}{x_1})$ ，即 $x_1x_2>e^2$.

对于 C：由 B 可知， $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，则有 $f(2)<f(e)$ ，即 $\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln e}{e}$ ，则有 $\ln 2<\frac{2}{e}<\sqrt{\frac{2}{e}}$ ，C 不正确；

对于 D：令 $2^x=3^y=m$ ， x ， y 均为正数，则 $m>1$ ，解得： $x=\log_2 m=\frac{\ln m}{\ln 2}$ ， $y=\log_3 m=\frac{\ln m}{\ln 3}$ ， $2x-3y=\frac{2\ln m}{\ln 2}-\frac{3\ln m}{\ln 3}=\ln m(\frac{2}{\ln 2}-\frac{3}{\ln 3})$ ，

由 B 可知， $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，则有 $f(2)<f(3)$ ，即 $0<\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln 3}{3}$ ，即 $\frac{2}{\ln 2}>\frac{3}{\ln 3}$ ，所以 $2x-3y>0$ ，D 符合题意.

故答案为：AD.

41. 【答案】*ABC*

【解析】$f(-x)=(-x)\cos(-x)+\sin(-x)=-x\cos x-\sin x=-f(x)$，故函数 $f(x)$ 为奇函数，

对于 *A*，由奇函数的性质可知，$b_n=0$，故 *A* 正确；

对于 *B*，$f(x)$ 不是周期函数，令 $f(x)=x\cos x+\sin x=0$，即 $-x=\tan x$，两函数在（﹣π，π）有三个交点（包括原点），

在此基础上，*n* 每取到一个数，交点增加两个，则 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$，故$\sum_{j=1}^{n}a_j=3+5+\cdots\cdots+2n+1=n^2+2n$，故 *B* 正确；

对于 *C*，当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$\tan x>0$，$-x<0$，无交点，当$x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$时，$\tan x<0$，$-x<0$，必有交点，

∴在 $x\in(-\pi,\pi)$ 上相邻零点差比$\frac{\pi}{2}$大，故任意零点距离比$\frac{\pi}{2}$大，故 *C* 正确；

对于 *D*，由 *C* 知差在$\frac{\pi}{2}$与 π 之间，故 *D* 错误.

故选：*ABC*.

三、填空题

42. 【答案】$-\frac{1}{2}$

【解析】因为 $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{6}, & x\leqslant 0\\ \log_3 x, & x>0\end{cases}$，

则 $f(f(\frac{1}{3}))=f(\log_3\frac{1}{3})=f(-1)=\sin(-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$.

故答案为：$-\frac{1}{2}$.

43.【答案】$-\frac{3}{5}$

【解析】解：曲线 $f(x)=\sin 2x$，可得 $f'(x)=2\cos 2x$，$f'(\pi)=2$，

曲线 $f(x)=\sin 2x$ 在 $x=\pi$ 处的切线的倾斜角为 α，

所以 $\tan\alpha=2$，

$\cos 2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5}$.

故答案为：$-\frac{3}{5}$.

44.【答案】$\frac{4}{5}$

【解析】由题得 $y'=f'(x)=e^x+2x-\frac{2}{3}$，所以 $f'(0)=e^0-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，

所以 $\tan\alpha=\frac{1}{3},\therefore\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}),\therefore\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$，

所以 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\frac{9}{10}-1=\frac{4}{5}$.

故答案为：$\frac{4}{5}$

45.【答案】$f(x)=a^{|x|}$（$a>0, a\neq 1$）（答案不唯一）

【解析】若满足①对任意的 $x1, x2\geqslant 0$ 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$ 成立，则独赢的函数为指数函数 $y=a^x$ 的形式；若满足②$f(x)$ 为偶函数，只需要将 x 加绝对值即可.

46.【答案】$\cos\frac{\pi}{2}x$

【解析】性质①：$\forall x\in R$，$f(x)=f(4-x)$，故函数 $f(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称，

性质②：$\forall x\in R$，$f(x+4)=f(x)$，故函数 $f(x)$ 的周期为 4，

考虑同时具有对称性和周期性的函数，常见的是三角函数，

故 $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$（答案不唯一）.

故答案为：$\cos\frac{\pi}{2}x$.

47.【答案】$\sin\frac{\pi}{2}x$（答案不唯一）

【解析】根据题意，要求 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2-x)$，即函数 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，

又由 $f(x)$ 为奇函数，

则 $f(x)$ 可解析式可以为 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$；

故答案为：$\sin\frac{\pi}{2}x$（答案不唯一）.

48.【答案】答案不唯一，开放性试题，符合题意的均给分

【解析】$-\cos\frac{\pi}{2}x$；$\left|\sin\frac{\pi}{4}x\right|$；$|x-4k|$，$x\in[4k-2,4k+2]$，$k\in Z$；$(x-4k)^2$，$x\in[4k-2,4k+2]$，$k\in Z$ 等（符合题意的均给分，注意 $\left|\tan\frac{\pi}{4}x\right|$ 不正确）

49.【答案】$y=x^2+2x$，或 $y=\sin2x$，或 $y=2e^x-2$.

【解析】函数 $f(x)=e^{2x}-1$ 的导数为 $f'(x)=2e^{2x}$，

可得在（0，0）处切线的斜率为 2，

切线的方程为 $y=2x$，

可取 $y=x^2+2x$，其导数为 $y'=2x+2$，满足在（0，0）处的切线的斜率为 2，

$y=\sin2x$，其导数为 $y'=2\cos2x$，满足在（0，0）处的切线的斜率为 2，

$y=2e^x-2$，其导数为 $y'=2e^x$，满足在（0，0）处的切线的斜率为 2，

故答案为：$y=x^2+2x$，或 $y=\sin2x$，或 $y=2e^x-2$.

50.【答案】$(-3,3)$

【解析】由函数解析式知 $f(x)$ 在 R 上单调递增，且 $-f(2)=-2=f(-2)$，

则 $f(1-|x|)+f(2)>0\Rightarrow f(1-|x|)>-f(2)=f(-2)$，

由单调性知 $1-|x|>-2$，解得 $x\in(-3,3)$

故答案为：$(-3,3)$

51.【答案】. $k=\begin{cases}0,0<x\le160,\\ \frac{1}{30}(x-160),160<x<190,\\ 1,x\ge190.\end{cases}$，（只要写出的函数满足在区间 $[160,190]$ 上单调递增，且过

点$(160,0)$和$(190,1)$即可. 答案不唯一）

【解析】由题意可知，函数 $k(x)$是$[160,190]$上的增函数，

设 $k(x)=ax+b$（$a>0$），$x\in[160,190]$，

由$\begin{cases}160a+b=0\\190a+b=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\frac{1}{30}\\b=-\frac{16}{3}\end{cases}$，

所以 $k(x)=\frac{1}{30}x-\frac{16}{3}$，

所以 $k=\begin{cases}0,0<x\le 160\\\frac{1}{30}(x-160),160<x<190\\1,x\ge 190\end{cases}$.

故答案为：$k=\begin{cases}0,0<x\le 160\\\frac{1}{30}(x-160),160<x<190\\1,x\ge 190\end{cases}$.

52. 【答案】11

【解析】由题意，a，b，c 为正整数，$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}>0$，

又$|x_1|<1$，$|x_2|<1$，$\therefore x_1$，$x_2\in(-1,0)$，

$\therefore\begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0\\f(-1)=a-b+c>0\\f(0)=c>0\\-1<-\frac{b}{2a}<0\end{cases}$，即$\begin{cases}b^2-4ac>0\\b<a+c\\b<2a\end{cases}$，①

$\because a$，b，c 为正整数，取 $c=1$，则 $a+1>b$，$\therefore a\geqslant b$，$\therefore a^2\geqslant b^2>4ac=4a$，

$\therefore a>4$，$\therefore a\geqslant 5$，$\therefore b^2>4ac\geqslant 20$，$\therefore b\geqslant 5$，

当 $a=b=5$，$c=1$ 时，符合①式，即符合题意，此时 $a+b+c=11$，

当 $c\geqslant 2$ 时，$\because x_1$，$x_2\in(-1,0)$，$\therefore x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<1$，$\therefore c<a$，$\therefore a\geqslant 3$，

$\therefore b^2>4ac\geqslant 24$，$\therefore b\geqslant 5$，又 $a+c>b\geqslant 5$，$\therefore a+c\geqslant 6$，$\therefore a+b+c\geqslant 11$，

$\therefore a+b+c$ 最小值为 11.

故答案为：11.

53. 【答案】$\gamma<\alpha<\beta$

【解析】$g'(x)=\frac{1}{2}$，$g(\alpha)=\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}$，解得 $\alpha=1$，

$h'(x)=\frac{1}{x}$，由 $h(\beta)=h'(\beta)$，可得 $ln2\beta=\frac{1}{\beta}$，

而 $h(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，$h'(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递减，$h'(1)=1>h(1)=ln2$，

当 $0<\beta<1$ 时，$h'(\beta)>h'(1)>h(1)>h(\beta)$，

此时 $h'(\beta)>h(\beta)$，所以 $\beta>1$，

$\varphi'(x)=\cos x$，则 $\cos\gamma=\sin\gamma$，所以 $\tan\gamma=1$，又 $\gamma\in(0,\pi)$，

所以 $\gamma=\frac{\pi}{4}<1$，所以 $\gamma<\alpha<\beta$.

故答案为：$\gamma<\alpha<\beta$.

54.【答案】$\frac{3}{4}$；2

【解析】$f'(x)=3x^2+1$，设切点为 $(x_n,\ x_n^3+x_n-1)$，

则切线斜率 $k=3x_n^2+1$，

所以切线方程为 $y=(3x_n^2+1)(x-x_n)+x_n^3+x_n-1$，

令 $y=0$，可得 $x_{n+1}=-\frac{x_n^3+x_n-1}{3x_n^2+1}+x_n=\frac{2x_n^3+1}{3x_n^2+1}$，

因为 $x_0=0$，所以 $x_1=1$，$x_2=\frac{3}{4}$，

即 r 的 2 次近似值为$\frac{3}{4}$，

因为 $x_{n+1}=\frac{2x_n^3+1}{3x_n^2+1}$，

所以$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{3x_n^3+x_n}{2x_n^3+1}=a_n$，

所以 $T_n=a_1a_2\cdots a_n=\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{x_1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_{n+1}}$，

因为函数 $f(x)=x^3+x-1\ (x\geqslant 0)$ 为增函数，

$f(\frac{1}{2})=-\frac{3}{8}<0$，$f(1)=1>0$，

由零点存在定理可得 $r\in(\frac{1}{2},\ 1)$，

所以$\frac{1}{x_{n+1}}\to\frac{1}{r}\in(1,\ 2)$，

因为任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$T_n<\lambda$ 恒成立，

所以 $\lambda\geqslant 2$，即 λ 的最小整数为 2.

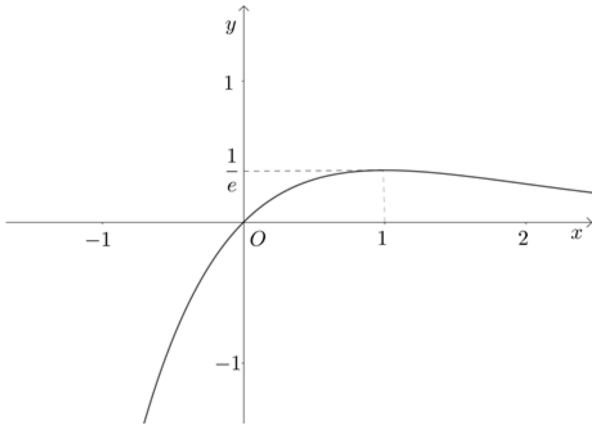
故答案为：$\frac{3}{4}$；2．

55.【答案】 1

【解析】设 $g(x)=\frac{x}{e^x}$ ， $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$ ，当 $x<1$ 时， $g'(x)>0$ ；当 $x>1$ 时， $g'(x)<0$ ，

故 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，且 $x>0$ 时， $g(x)>0$ ； $x<0$ 时， $g(x)<0$ ，

∴ $g(x)_{\max}=g(1)=\frac{1}{e}$ ，作出 $g(x)$ 的图象，如图



要使 $f(x)=(\frac{x}{e^x})^2+(a-2)\frac{x}{e^x}+2-a$ 有三个不同的零点 x_1 ， x_2 ， x_3 其中 $x_1<x_2<x_3$

令 $\frac{x}{e^x}=t$ ，则 $t^2+(a-2)t+2-a=0$ 需要有两个不同的实数根 t_1,t_2 （其中 $t_1<t_2$ ）

则 $\Delta=(a-2)^2-4(2-a)>0$ ，即 $a>2$ 或 $a<-2$ ，且 $\begin{cases}t_1+t_2=2-a\\t_1\cdot t_2=2-a\end{cases}$

若 $a>2$ ，则 $\begin{cases}t_1+t_2=2-a<0\\t_1\cdot t_2=2-a<0\end{cases}$ ，∵ $t_1<t_2$ ，∴ $t_1<0$ ，则 $t_2\in(0,\frac{1}{e})$

∴ $t_1<0<t_2<\frac{1}{e}$ ，则 $x_1<0<x_2<1<x_3$ ，且 $g(x_2)=g(x_3)=t_2$

$$\therefore (1-\frac{x_1}{e^{x_1}})^2(1-\frac{x_2}{e^{x_2}})(1-\frac{x_3}{e^{x_3}}) = =(1-t_1)^2(1-t_2)(1-t_2)=[1-(t_1+t_2)+t_1t_2]^2$$

$$=[1-(2-a)+2-a]^2$$

$$=1$$

若 $a<-2$ ，则 $\begin{cases}t_1+t_2=2-a>4\\t_1\cdot t_2=2-a>4\end{cases}$ ，因为 $g(x)_{\max}=g(1)=\frac{1}{e}$ ，且 $t_2\in(0,\frac{1}{e})$ ，

∴ $(t_1+t_2)_{\max}<4$ ，故不符合题意，舍去

综上 $(1-\frac{x_1}{e^{x_1}})^2(1-\frac{x_2}{e^{x_2}})(1-\frac{x_3}{e^{x_3}})=1$

故答案为：1

56.【答案】（－∞，0]

【解析】由函数 $f(x)=e^x-a-eln(ex+a)$，求得定义域为 $x\in(-\frac{a}{e},+\infty)$，

对函数求导可得：$f'(x)=e^x-\frac{e^2}{ex+a}$，

则存在一个 x_0，使得 $f'(x)=0$，

且 $-\frac{a}{e}<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，

则 $f(x)\geq f(x_0)=e^{x_0}-a-eln(ex_0+a)=\frac{e^2}{ex_0+a}-e\cdot \ln e^{2-x_0}=ex_0+\frac{e^2}{ex_0+a}-2e-a=ex_0+a+\frac{e^2}{ex_0+a}-2e-2a$.

$\because ex_0+a+\frac{e^2}{ex_0+a}\geq 2e$，

$\therefore f(x_0)\geq 2e-2e-a=-2a\geq 0$，则 $a\leq 0$，

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

故答案为：$(-\infty,0]$.

57.【答案】$-\frac{1}{2}$

【解析】设 $F(x)=f(x)-g(x)=e^x-\cos x-2a-x$，

由 $f(x_1)=g(x_2)$ 可得 $x_2=e^{x_1}-\cos x_1-2a$，$\therefore x_2-x_1=e^{x_1}-x_1-\cos x_1-2a$，

$\because x_2-x_1$ 的最小值为 1，即求函数 $F(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的最小值为 1，

$F'(x)=e^x-1+\sin x$ 且 $x\in[0,\pi]$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\sin x\geq 0$，$e^x-1\geq 0$，则 $F'(x)\geq 0$，

所以，函数 $F(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上为增函数，

所以，$F(x)_{\min}=F(0)=-2a=1$，解得 $a=-\frac{1}{2}$.

故答案为：$-\frac{1}{2}$.

四、解答题

58.【解析】（1）由于 $f(x)=\frac{\sin x}{x}(x>0)$，得 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}(x>0)$，

设 $g(x)=x\cos x-\sin x$，其导函数 $g'(x)=-x\sin x$，

在区间 $(0,\pi)$ 上，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，且 $g(0)=0$，

所以在区间 $(0,\pi)$ 上 $g(x)<0$，$f'(x)<0$，从而函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调递减；

（2）证明：由第（1）问，

在区间（π，2π）上，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，且 $g(\pi)=-\pi<0$，$g(2\pi)=2\pi>0$，

所以存在唯一的 $x_0\in(\pi,2\pi)$，使得 $f'(x_0)=0$，

在区间 (π,x_0) 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

在区间 $(x_0,2\pi)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 x_0 为函数 $f(x)$ 在（π，2π）上的唯一极小值，

其中 $f'\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}\pi}{\frac{16}{9}\pi^2}<0$，$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\frac{9}{4}\pi^2}=\dfrac{4}{9\pi^2}>0$，

所以 $x_0\in\left(\frac{4}{3}\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$，且 $f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\dfrac{-3\sqrt{3}}{8\pi}$，$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\dfrac{-2}{3\pi}$，

由于 $f\left(\frac{4}{3}\pi\right)>f\left(\frac{3}{2}\pi\right)$，故 $f(x_0)<-\dfrac{2}{3\pi}$.

59.【解析】（1）当 $a=\frac{e}{2}$ 时，$f(x)=x\ln x-\frac{e}{2}x^2+x$，所以 $f'(x)=\ln x-ex+2$，

令 $p(x)=\ln x-ex+2$，则 $p'(x)=\frac{1}{x}-e=\frac{1-ex}{x}$，

若 $p'(x)>0$，则 $0<x<\frac{1}{e}$；若 $p'(x)<0$，则 $x>\frac{1}{e}$，

所以函数 $p(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上为增函数，在 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 上为减函数，

则 $p(x)\le p(\frac{1}{e})=0$，即 $f'(x)\le 0$，仅在 $x=\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)=0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为减函数.

（2）因为 $f(x)=x\ln x-ax^2+x$，$g(x)=(1-a)x\ln x-e^{x-1}$，$a>0$，

若 $f(x)\ge g(x)+x$ 恒成立，即对任意的 $x>0$，$e^{x-1}-ax(x-\ln x)\ge 0$ 恒成立，

即对任意的 $x>0$，$\frac{e^{x-1}}{x}-a(x-\ln x)\ge 0$ 恒成立，即 $e^x-\ln x-1\ge a(x-\ln x)$，

令 $t=t(x)=x-\ln x$，则 $t'=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$t'(x)<0$，$t(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$t'(x)>0$，$t(x)$ 单调递增，

所以 $t=t(x)\ge t(1)=1$，

若 $e^x\ln x-1\ge a(x-\ln x)$ 对任意 $x>0$ 恒成立，则 $a\le\frac{e^x-\ln x-1}{x-\ln x}-\frac{e^{t-1}}{t}$ 恒成立.

设 $q(t)=\frac{e^{t-1}}{t}$，$t\ge 1$，则 $q'(t)=\frac{e^{t-1}(t-1)}{t^2}\ge 0$，

所以，当 $t\in[1,+\infty)$ 时，$q(t)$ 单调递增，所以 $\frac{e^{t-1}}{t}\geq q(1)=1$，

所以若 $f(x)\geq g(x)+x$ 恒成立，则实数 a 的取值范围 $(0,1]$．

60.【解析】（1）∵$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{e^x}$，

∴$f'(x)=\frac{-ax^2+(2a-b)x+b-c}{e^x}$，

∵$f(x)$ 的递增区间是$[0,1]$，

∴$-ax^2+(2a-b)x+b-c=0$ 的根是 0 和 1，

故$\begin{cases}b-c=0\\-a+2a-b+b-c=0\end{cases}$，故 $a=b=c$，

又 $f(x)$ 的极大值是$\frac{3}{e}$，故 $f(1)=\frac{a+b+c}{e}=\frac{3}{e}$，

故 $a=b=c=1$，

故 $f(x)=\frac{x^2+x+1}{e^x}$，$f'(x)=\frac{-x^2+x}{e^x}$，

故 $f(-1)=e$，$f'(-1)=-2e$，

则 $f(x)$ 在点$(-1,f(-1))$处的切线方程是：$y=-2ex-e$．

（2）$f(x)$ 在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

且 $f(0)=1$，当 $x\in(-\infty,0]$时，$f(x)_{min}=f(0)=1$，

若存在非零实数 x_0，使得 $f(x_0)=1$，则 $x_0>0$，

①$0<m\leq x_0$时，$f(x)$ 在$(-\infty,0]$递减，在$(0,m]$递增，

故 $f(x)$ 在区间$(-\infty,m]$上的最小值是 $f(0)=1$，

②$m>x_0$时，$f(x)$ 在$(-\infty,0]$递减，在$(0,1)$递增，在$(1,m]$递减，

故 $f(x)_{min}=f(m)=\frac{m^2+m+1}{e^m}$．

61.【解析】（1）由题意知，$f'(x)=1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-x-2}{x^2}=\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=2$ 或 $x=-1$（舍），

∴当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在$(0,2)$上单调递减；

当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在$(2,+\infty)$上单调递增；

∴$f_{min}(x)=f(2)=3-\ln 2$．

（2）由题意知，$g(x)=xf(x)=x^2-x\ln x+2$，

$g'(x)=2x-\ln x-1$，

当 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立，∴$g(x)$ 在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 单调递增，

∴$\begin{cases}g(a)=k(a+2)\\g(b)=k(b+2)\end{cases}$，

∴方程 $g(x)=k(x+2)$ 有两个不同的实数根，

即 $k=\frac{x^2-x\ln x+2}{x+2}$ 在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 有两个不同的解，

设 $H(x)=\frac{x^2-x\ln x+2}{x+2}$，

∴$H'(x)=\frac{(2x-\ln x-1)(x+2)-(x^2-x\ln x+2)}{(x+2)^2}=\frac{x^2+3x-2\ln x-4}{(x+2)^2}$，

设 $G(x)=x^2+3x-2\ln x-4$，

∴$G'(x)=2x+3-\frac{2}{x}=\frac{(x+2)(2x-1)}{x}$，

∴当 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$G'(x)>0$，∴$G(x)$ 在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 单调递增，

而 $G(\frac{1}{2})=\ln 4-\frac{9}{4}<0$，$G(1)=0$，

∴$H(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

而 $H(x)=\frac{9}{10}+\frac{1}{5}\ln 2$，$H(1)=1$，

∴$k\in(1,\frac{9+2\ln 2}{10}]$.

62.【解析】（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{2}x^2+a\ln x-\frac{1}{2}$，

令 $g(x)=\frac{1}{2}x^2+a\ln x-\frac{1}{2}$，$g'(x)=x+\frac{a}{x}=\frac{x^2+a}{x}$，

因为 $a\geqslant0$，所以 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

（2）①当 $a\geqslant0$ 时，由（1）可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一极小值 $f(1)$，

所以极值点个数为 1 个.

②当 $-1\leqslant a<0$ 时，令 $g'(x)=\frac{x^{2}+a}{x}=0$，得 $x=\sqrt{-a}$，

当 $x\in(0,\sqrt{-a})$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x\in(\sqrt{-a},+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)_{min}=g(\sqrt{-a})=-\frac{a}{2}+a\ln(\sqrt{-a})-\frac{1}{2}$，

令 $h(a)=-\frac{a}{2}+a\ln(\sqrt{-a})-\frac{1}{2}$，$h'(a)=\frac{1}{2}\ln(-a)$，

因为 $-1\leqslant a<0$，所以 $h'(a)\leqslant 0$，即 $h(a)$ 在 $[-1,0)$ 上单调递减，所以 $h(a)_{max}=h(-1)=0$，

（ⅰ）当 $a=-1$ 时，$g(x)_{min}=h(-1)=0$，在 $(0,+\infty)$ 上，$g(x)\geqslant 0$ 恒成立，

即 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 无极值点；

（ⅱ）当 $-1<a<0$ 时，$0<-a<1$，$h(a)<0$，即 $g(x)_{min}<0$，

易知 $0<e^{\frac{2}{a}}<\sqrt{-a}$，$g(e^{\frac{2}{a}})=\frac{1}{2}e^{\frac{4}{a}}+a\ln e^{\frac{2}{a}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{\frac{4}{a}}+\frac{3}{2}>0$，

所以存在唯一 $x_0\in(e^{\frac{2}{a}},\sqrt{-a})$ 使得 $g(x_0)=0$，

且当 $0<x<x_0$ 时，$g(x)>0$，当 $x_0<x<\sqrt{-a}$ 时，$g(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值；

又 $g(1)=0$，所以当 $\sqrt{-a}\leqslant x<1$ 时，$g(x)<0$，当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，

故此时极值点个数为 2.

综上所述，当 $a=-1$ 时，$f(x)$ 的极值点个数为 0；当 $-1<a<0$ 时，$f(x)$ 的极值点个数为 2；当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 的极值点个数为 1.

63.【解析】（1）证明：$f_3(x)=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}$，$f_3'(x)=1+x+\frac{x^{2}}{2}=\frac{1}{2}(x+1)^{2}+\frac{3}{4}$，

所以 $f_3'(x)>0$，所以 $f_3(x)$ 在 R 上单调递增，

又 $f_3(-3)=-2<0$，$f(0)=1>0$，

所以 $f_3(x)$ 单调递增且有唯一零点.

（2）因为 $f_{2n}(x)=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，

所以 $f_{2n}'(x)=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=f_{2n-1}(x)$，

因为 $f_{2n-1}(x)$ 单调递增且有唯一零点，设 $f_{2n-1}(x_0)=0$，

所以 $f_{2n}(x)$ 在（-∞，x_0）上为减函数，在（x_0，+∞）上为增函数，

又 $f_{2n}(x_0)=f_{2n-1}(x_0)+\dfrac{x_0^{2n}}{(2n)!}=\dfrac{x_0^{2n}}{(2n)!}>0$，

所以 $f_{2n}(x)\geqslant f_{2n}(x_0)>0$，

即 $f_{2n}(x)>0$ 恒成立，故 $f_{2n}(x)$ 无零点．

64.【解析】解：（1）由题知，$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2a-\sqrt{x}}{2x}$，

若 $a\leqslant0$，则 $f'(x)\leqslant0$，$f(x)$ 在（0，+∞）上单减；

若 $a>0$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=4a^2$，

当 $x\in(0,4a^2)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(4a^2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

∴$f(x)$ 在 $(0,4a^2)$ 单增，在 $(4a^2,+\infty)$ 单减；

（2）由（1）知，若 $a\leqslant0$，则 $f(x)$ 在（0，+∞）上单减，且 $f(1)=0$，

∴当 $0<x<1$ 时，$f(x)>0$，不合题意；

若 $a>0$，则 $f(x)\leqslant f(4a^2)=aln4a^2-2a+1=2aln2a-2a+1$，

令 $g(t)=tlnt-t+1$，$t>0$，$g'(t)=lnt$，

∴当 $t\in(0,1)$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单减，当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单增，

∴$g(t)\geqslant g(1)=0$，

为满足题意，必有 $g(2a)=0$，即 $2a=1$，解得$a=\frac{1}{2}$；

（3）证明：由题意知，$p=0.81^{10}$，由（2）知，$\frac{lnx}{2}-\sqrt{x}+1\leq0$，即$lnx\leq2(\sqrt{x}-1)$，

∴$ln(0.81)^{10}=10ln(0.81)<20\times(\sqrt{0.81}-1)=-2$，

∴$p=(0.81)^{10}<e^{-2}$，即得证．

65.【解析】 （1）解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

由 $f(x)=|\ln x|+ax=\begin{cases}\ln x+ax, x\geq1\\-\ln x+ax, 0<x<1\end{cases}$，

得 $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}+a, x\geq1\\-\frac{1}{x}+a, 0<x<1\end{cases}$．

由于 $a<0$，则 $-\frac{1}{x}+a<0$，即在区间 $(0,1)$ 上 $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $-1<a<0$ 时，

x	$(1,-\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	增		减

当 $a\le -1$ 时，$\frac{1}{x}+a\le 0$，即在区间 $[1,+\infty)$ 上 $f'(x)\le 0$，函数 $f(x)$ 单调递减.

综上，当 $-1<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，

在区间 $(1,-\frac{1}{a})$ 上单调递增，在区间 $(-\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减；

当 $a\le -1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

（2）解：结合第（1）问答案，只有当 $-1<a<0$ 时函数 $f(x)$ 才可能存在三个零点：

当 $-1<a<0$ 时，$f(1)=a<0$，

$f(e^a)=-\ln(e^a)+a\cdot e^a=a(e^a-1)>0(0<e^a<1)$，

在区间 $(0,1)$ 上恰好存在一个零点；

在区间 $[1,+\infty)$ 上存在两个零点，需要保证 $f(-\frac{1}{a})=\ln(-\frac{1}{a})-1>0$，即 $-\frac{1}{e}<a<0$，

且此时 $f(1)=a<0$，$f(-\frac{1}{a})>0$，

在区间 $(1,-\frac{1}{a})$ 上存在一个零点，

同时 $\frac{1}{a^2}>-\frac{1}{a}$，$f(\frac{1}{a^2})=2\ln(-\frac{1}{a})+\frac{1}{a}$，

设 $t=-\frac{1}{a}>e$，对于函数 $y=2\ln t-t$，$y'=\frac{2-t}{t}<0$，$y<2\ln e-e=2-e<0$，

故 $f(\frac{1}{a^2})<0$，且 $f(-\frac{1}{a})>0$，在区间 $(-\frac{1}{a},+\infty)$ 上存在一个零点.

总之，当 $-\frac{1}{e}<a<0$ 时，在区间 $(0,1)$、$(1,-\frac{1}{a})$、$(-\frac{1}{a},+\infty)$ 上各存在一个零点.

66.【解析】（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f'(x)=-a\sin x+e^{\frac{\pi}{2}-x}$.

所以 $f'(\frac{\pi}{2})=-a\sin\frac{\pi}{2}+e^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}=1-a$，由题意，$1-a=0$，即 $a=1$.

于是，$f'(x)=-\sin x+e^{\frac{\pi}{2}-x}$.

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)=-\sin x+e^{\frac{\pi}{2}-x}>e^0-\sin x=1-\sin x>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增；

（2）$f(x)=\cos x+1-e^{\frac{\pi}{2}-x}$. 因为 $e^{x-\frac{\pi}{2}}\ne 0$，所以 $g(x)=e^{x-\frac{\pi}{2}}f(x)=(1+\cos x)e^{x-\frac{\pi}{2}}-1$ 与 $f(x)$ 在

$[2k\pi+\frac{\pi}{2}，\ 2k\pi+\pi]$（$k\in\mathbf{N}$）上有相同的零点，

$g'(x)=(1+\cos x-\sin x)e^{x-\frac{\pi}{2}}=[1+\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})]e^{x-\frac{\pi}{2}}$.

当 $x\in(2k\pi+\frac{\pi}{2}，\ 2k\pi+\pi)$ 时，$x+\frac{\pi}{4}\in(2k\pi+\frac{3\pi}{4}，\ 2k\pi+\frac{5\pi}{4})$，$\cos(x+\frac{\pi}{4})\in[-1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$，

$\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})\in[-\sqrt{2},-1)$，$1+\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})<0$.

又 $e^{x-\frac{\pi}{2}}>0$，所以 $g'(x)=[1+\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})]e^{x-\frac{\pi}{2}}<0$，

所以，当 $x\in[2k\pi+\frac{\pi}{2}，\ 2k\pi+\pi]$ 时，$g(x)$ 单调递减，

又 $g(2k\pi+\frac{\pi}{2})=e^{2k\pi}-1>e^{0}-1=0$，$g(2k\pi+\pi)=-1<0$，

由零点存在性定理及 $g(x)$ 的单调性，知 $g(x)$ 在 $[2k\pi+\frac{\pi}{2}，\ 2k\pi+\pi]$（$k\in\mathbf{N}$）上有且仅有一个零点，

所以 $f(x)$ 在 $[2k\pi+\frac{\pi}{2}，\ 2k\pi+\pi]$（$k\in\mathbf{N}$）上恰有一个零点．

67.【解析】（1）$f(x)=e^{x}-ax$，其定义域为 R，$f'(x)=e^{x}-a$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，因为 $f'(x)>0$．所以 $f(x)$ 在 R 上单调递增；

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$ 得 $x>\ln a$．令 $f'(x)<0$ 得 $x<\ln a$.

所以 $f(x)$ 在（$-\infty$，$\ln a$）上单调递减，（$\ln a$，$+\infty$）上单调递增，

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递增，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在（$-\infty$，$\ln a$）上单调递减，（$\ln a$，$+\infty$）上单调递增.

（2）当 $a=2$ 时，$g(x)=e^{x}-2x-\cos x$，$x\in(-\frac{\pi}{2}，\ +\infty)$，$g'(x)=e^{x}+\sin x-2$，

①当 $x\in(-\frac{\pi}{2}，\ 0)$ 时，因为 $g'(x)=(e^{x}-1)+(\sin x-1)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}，\ 0)$ 单调递减.

所以 $g(x)>g(0)=0$，

斤以 $g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}，\ 0)$ 上无零点；

②当 $x\in[0，\ \frac{\pi}{2}]$ 时，因为 $g'(x)$ 单调递增，且 $g'(0)=-1<0$，$g'(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}-1>0$.

所以存在 $x_0\in(0，\ \frac{\pi}{2})$，使 $g'(x_0)=0$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $[0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，且 $g(0)=0$，所以 $g(x_0)<0$，

又因为 $g(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}-\pi>0$，所以 $g(x_0)\cdot g(\frac{\pi}{2})<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 上存在一个零点，

所以 $g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上有两个零点.

③当 $x\in(\frac{\pi}{2},+\infty)$ 时，$g'(x)=e^x+\sin x-2>e^{\frac{\pi}{2}}-3>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},+\infty)$ 上单调递增，

因为 $g(\frac{\pi}{2})>0$，所以 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},+\infty)$ 上无零点.

综上所述，$g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},+\infty)$ 上的零点个数为 2.

68.【解析】（1）因为 $f(x)=\frac{1}{2}mx^2-2ax+\ln x$，$x>0$，所以 $f'(x)=mx-2a+\frac{1}{x}$，

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线斜率为 $2-2a$，

所以 $f'(1)=m-2a+1=2-2a$，即 $m=1$，

所以 $f'(x)=x-2a+\frac{1}{x}=\frac{x^2-2ax+1}{x}$，

令 $h(x)=x^2-2ax+1$，$\triangle=4a^2-4$，

当 $\triangle\leqslant 0$，即 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 时，$h(x)\geqslant 0$ 恒成立，即 $f'(x)\geqslant 0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $\triangle>0$，即 $a<-1$ 或 $a>1$ 时，令 $h(x)=0$，可得 $x=a\pm\sqrt{a^2-1}$，

当 $a<-1$ 时，$a-\sqrt{a^2-1}<0$，$a+\sqrt{a^2-1}<0$，$h(0)=1>0$，

此时 $h(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>1$ 时，$a-\sqrt{a^2-1}>0$，$a+\sqrt{a^2-1}>0$，

当 $x\in(0,a-\sqrt{a^2-1})\cup(a+\sqrt{a^2-1},+\infty)$ 时，$h(x)>0$，即 $f'(x)>0$，

当 $x\in(a-\sqrt{a^2-1},a+\sqrt{a^2-1})$ 时，$h(x)<0$，即 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在（$a-\sqrt{a^2-1}$，$a+\sqrt{a^2-1}$）上单调递减，在（0，$a-\sqrt{a^2-1}$）和（$a+\sqrt{a^2-1}$，$+\infty$）上单调递增.

综上所述，当 $a\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 在（0，$+\infty$）上单调递增；

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在（$a-\sqrt{a^2-1}$，$a+\sqrt{a^2-1}$）上单调递减，在（0，$a-\sqrt{a^2-1}$）和（$a+\sqrt{a^2-1}$，$+\infty$）上单调递增.

（2）证明：$g(x)=xf(x)-\frac{1}{2}x^3+2x=\frac{1}{2}mx^3-2ax^2+x\ln x-\frac{1}{2}x^3+2x$，

由（1）得 $m=1$，即 $g(x)=x\ln x-2ax^2+2x$，

因为 $g(x)$ 有两个不同零点 x_1，x_2，

所以 $\begin{cases} x_1\ln x_1-2ax_1^2+2x_1 \\ x_2\ln x_2-2ax_2^2+2x_2 \end{cases}$，即 $\begin{cases} \ln x_1-2ax_1+2=0 \\ \ln x_2-2ax_2+2=0 \end{cases}$，

$\ln x_1-2ax_1+2+\ln x_2-2ax_2+2=0$，即 $2a(x_1+x_2)=\ln x_1x_2+4$，

$\ln x_1-2ax_1+2-(\ln x_2-2ax_2+2)=0$，即 $\ln\frac{x_2}{x_1}=2a(x_2-x_1)$，$2a=\frac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}$，

所以 $2a(x_1+x_2)=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\cdot\ln\frac{x_2}{x_1}=\frac{\frac{x_2}{x_1}+1}{\frac{x_2}{x_1}-1}\cdot\ln\frac{x_2}{x_1}$，

因为 $x_2-3x_1\geqslant 0$，所以 $\frac{x_2}{x_1}\geqslant 3$，

设 $t=\frac{x_2}{x_1}$，$k(t)=\frac{t+1}{t-1}\ln t$，

所以 $k'(t)=\frac{(t-1)\ln t+\frac{t^2-1}{t}-(t+1)\ln t}{(t-1)^2}=\frac{-2\ln t+t-\frac{1}{t}}{(t-1)^2}$，

令 $m(t)=-2\ln t+t-\frac{1}{t}$，

所以 $m'(t)=-\frac{2}{t}+1+\frac{1}{t^2}=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0$，

所以 $m(t)$ 为增函数，$m(t)\geqslant m(3)=-2\ln 3+\frac{8}{3}>0$，

即 $k'(t)>0$，所以 $k(t)\geqslant k(3)=2ln3$，

所以 $lnx_1x_2+4\geqslant 2ln3$，即 $lnx_1x_2\geqslant 2ln3-4=2(ln3-2)=2ln\frac{3}{e^2}=ln\frac{9}{e^4}$，

所以 $x_1x_2\geqslant\frac{9}{e^4}$，所以$\sqrt{x_1x_2}\geqslant\frac{3}{e^2}$，

因为 $x_1\neq x_2$，所以 $x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}\geqslant\frac{6}{e^2}$，

所以 $x_1+x_2>\frac{6}{e^2}$，得证.

69.【解析】(1) 因为 $f(x)=e^x(mx^2+x)$，所以 $f'(x)=e^x(mx^2+x+2mx+1)$，

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极大值，所以 $f'(1)=0$，所以 $e^1(m+1+2m+1)=0$，所以 $m=-\frac{2}{3}$

当 $m=-\frac{2}{3}$ 时，$f'(x)=-\frac{1}{3}e^x(2x+3)(x-1)$，

x	$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$	$-\frac{3}{2}$	$\left(-\frac{3}{2},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+	0	$-$
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极大值，符合题意；

(2) 当 $m=1$ 时，$f(x)=e^x(x^2+x)$，$g(x)=e^xx^2+ax+a\ln x+1$.

又因为对 $\forall x>0$，不等式 $f(x)\geq g(x)$，所以 $x>0$ 时，$e^x(x^2+x)\geq e^xx^2+ax+a\ln x+1$，

所以 $x>0$ 时，$e^{x+\ln x}\geq a(x+\ln x)+1$，

令 $t=x+\ln x$，因为 $h(x)=x+\ln x$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数，且 $h(x)$ 的值域为 R，所以 $t\in R$，

故问题转化为“$\forall t\in R,e^t-at-1\geq 0$ 恒成立”，不妨设 $F(t)=e^t-at-1$，所以 $F'(t)=e^t-a$，

当 $a\leq 0$ 时，$F'(t)=e^t-a>0$，所以 $F(t)$ 在 R 上单调递增，且 $F(0)=e^0-1=0$，

所以当 $t\in(-\infty,0)$ 时，$F(t)<F(0)=0$，这与题意不符；

当 $a>0$ 时，令 $F'(t)=0$，解得 $x=\ln a$，

当 $t\in(-\infty,\ln a)$ 时，$F'(t)<0$，$F(t)$ 单调递减，当 $t\in(\ln a,+\infty)$ 时，$F'(t)>0$，$F(t)$ 单调递增，

所以 $F(t)_{\min}=F(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a-1=a-a\ln a-1\geq 0$，

所以 $1-\ln a-\dfrac{1}{a}\geq 0$，所以 $\ln a+\dfrac{1}{a}-1\leq 0$，

记 $\varphi(a)=\ln a+\dfrac{1}{a}-1,\varphi'(a)=\dfrac{a-1}{a^2}$，

当 $a\in(0,1)$ 时，$\varphi'(a)<0$，$\varphi(a)$ 单调递减，当 $a\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(a)>0$，$\varphi(a)$ 单调递增，

所以 $\varphi(a)_{\min}=\varphi(1)=0$，

又因为 $\ln a+\dfrac{1}{a}-1\leq 0$，即 $\varphi(a)\leq 0$，所以 $a=1$.

70.【解析】（1）∵ $f(x)=e^x-ax^2-bx-1$，∴ $g(x)=f'(x)=e^x-2ax-b$，

又 $g'(x)=e^x-2a$，$x\in[0,1]$，∴ $1\leqslant e^x\leqslant e$，

∴①当 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，则 $2a\leqslant 1$，$g'(x)=e^x-2a\geqslant 0$，

∴函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递增，$g(x)_{min}=g(0)=1-b$；

②当 $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{e}{2}$，则 $1<2a<e$，

∴当 $0<x<ln(2a)$ 时，$g'(x)=e^x-2a<0$，当 $ln(2a)<x<1$ 时，$g'(x)=e^x-2a>0$，

∴函数 $g(x)$ 在区间 $[0,ln(2a)]$ 上单调递减，在区间 $[ln(2a),1]$ 上单调递增，

$g(x)_{min}=g[ln(2a)]=2a-2aln(2a)-b$；

③当 $a\geqslant\dfrac{e}{2}$ 时，则 $2a\geqslant e$，$g'(x)=e^x-2a\leqslant 0$，

∴函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递减，$g(x)_{min}=g(1)=e-2a-b$，

综上：函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值为 $g_{min}(x)=\begin{cases}1-b & \left(a\leqslant\dfrac{1}{2}\right)\\ 2a-2aln(2a)-b & \left(\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{e}{2}\right)\\ e-2a-b & \left(a\geqslant\dfrac{e}{2}\right)\end{cases}$；

（2）由 $f(1)=0$，$\Rightarrow e-a-b-1=0\Rightarrow b=e-a-1$，又 $f(0)=0$，

若函数 $f(x)$ 在区间（0，1）内有零点，则函数 $f(x)$ 在区间（0，1）内至少有三个单调区间，

由（1）知当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $a\geqslant\frac{e}{2}$ 时，函数 $g(x)$ 在区间[0，1]上单调，不可能满足“函数 $f(x)$ 在区间（0，1）内至少有三个单调区间”这一要求.

若 $\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$，则 $g_{min}(x)=2a-2a\ln(2a)-b=3a-2a\ln(2a)-e+1$

令 $h(x)=\frac{3}{2}x-x\ln x-e+1$ $(1<x<e)$

则 $h'(x)=\frac{3}{2}-(\ln x+x\cdot\frac{1}{x})=\frac{1}{2}-\ln x$，$\therefore h'(x)=\frac{1}{2}-\ln x$．由 $h'(x)=\frac{1}{2}-\ln x>0\Rightarrow x<\sqrt{e}$

$\therefore h(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e})$ 上单调递增，在区间 $(\sqrt{e},e)$ 上单调递减，

$h(x)_{max}=h(\sqrt{e})=\frac{3}{2}\sqrt{e}-\sqrt{e}\ln\sqrt{e}-e+1=\sqrt{e}-e+1<0$，即 $g_{min}(x)<0$ 恒成立，

∴函数 $f(x)$ 在区间（0，1）内至少有三个单调区间 $\Leftrightarrow\begin{cases}g(0)=2-e+a>0\\g(1)=-a+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>e-2\\a<1\end{cases}$，

又 $\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$，所以 $e-2<a<1$，

综上得：$e-2<a<1$.

另解：由 $g(0)>0$，$g(1)>0$ 解出 $e-2<a<1$，

再证明此时 $f(x)_{min}<0$ 由于 $f(x)$ 最小时，$f'(x)=g(x)=e^x-2ax-b=0$，

故有 $e^x=2ax+b$ 且 $f(1)=0$ 知 $e-1=a+b$，

则 $f(x)_{min}=2ax+b-ax^2-(e-1-a)x-1=-ax^2+(3a+1-e)x+e-a-2$，

开口向下，最大值 $\frac{1}{4a}(5a^2-(2e+2)a+e^2-2e)$，分母为正，

只需看分子正负，分子 $<5-(2e+2)+e^2-2e$（$a=1$ 时取最大）$=e^2-4e+3<0$，

故 $f(x)_{min}<0$，

故 $e-2<a<1$.

71.【解析】（1）设 $g(x)=f'(x)=e^x-2ax-b$，所以 $g'(x)=e^x-2a$

$\because g(x)$ 在（0，2）上单调，$e^x\in(1,e^2)$，$\therefore 2a\leq 1$ 或 $2a$ 大于等于 e^2，

$\therefore a\leq\frac{1}{2}$ 或 $a\geq\frac{e^2}{2}$

（2）∵f（x）在 $(0,2)$ 上有零点，∴存在 $x_0\in(0,2)$，使 $f(x_0)=0$

又 $f(0)=0$，$f(2)=0$，∴$f(x)$ 在 $(0,x_0)$，$(x_0,2)$ 上不单调，

∴$g(x)=f'(x)$ 上至少有两个零点，

由(1)知，当 $a\leq\frac{1}{2}$ 或 $a\geq\frac{e^2}{2}$ 时，$g(x)$ 单调，不可能有两个零点，

$\therefore \frac{1}{2} \le a \le \frac{e^2}{2}$,

由 $g'(x)<0$ 得 $0<x<\ln(2a)$，由 $g'(x)>0$ 得 $\ln(2a)<x<2$，

$\therefore g(x)$在$(0,\ln(2a))$上单调递减，在$(\ln(2a),2)$上单调递减，…………………… 6 分

$\therefore g(x)$在$(0,2)$上有两个零点 x_1,x_2，且 $x_1\in(0,\ln(2a))$，$x_2\in(\ln(2a),2)$，$\begin{cases}\frac{1}{2}<a<\frac{e^2}{2},\\ g(0)>0,\\ g(\ln(2a))<0,\\ g(2)>0,\end{cases}$

又 $f(2)=0$，即 $b=\frac{e^2-4a-1}{2}$，带入上式整理得：$\begin{cases}\frac{1}{2}<a<\frac{e^2}{2},\\ 1-\frac{e^2-4a-1}{2}>0,\\ 2a-2a\ln(2a)-\frac{e^2-4a-1}{2}<0,\\ e^2-4a-\frac{e^2-4a-1}{2}>0,\end{cases}$ …………………… 8 分

$2a-2a\ln(2a)-\frac{e^2-4a-1}{2}=4a-2a\ln(2a)-\frac{e^2-1}{2}\left(\frac{1}{2}<a<\frac{e^2}{2}\right)$，

令 $t=2a$，$\varphi(t)=2t-t\ln t-\frac{e^2-1}{2}(1<t<e^2)$，

$\varphi'(t)=1-\ln t$，由 $\varphi'(t)>0$ 得 $1<t<e$，由 $\varphi'(t)<0$ 得 $e<t<e^2$，

$\therefore \varphi(t)$在$(1,e)$上单调递增，在(e,e^2)上单调递减，

$\therefore \varphi(t)\leqslant\varphi(e)=\frac{2e+1-e^2}{2}<0$. …………………… 10 分

$\therefore$不等式组的解为：$\frac{e^2-3}{4}<a<\frac{e^2+1}{4}$.

$\therefore a$ 的取值范围是$\frac{e^2-3}{4}<a<\frac{e^2+1}{4}$. …………………… 12 分

72.【解析】（1）$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-2$，$f'(x)=x-\sin x$.

令 $h(x)=x-\sin x$，则 $h'(x)=1-\cos x$.

$\because h'(x)\geqslant 0$ 在 R 上恒成立，$\therefore h(x)$ 在 R 上单调递增.

又$\because h(0)=0$，$\therefore$当 $x<0$ 时，$h(x)<0$；当 $x>0$ 时，$h(x)>0$.

即 $f'(0)=0$，当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在$(-\infty,0]$上单调递减，在$[0,+\infty)$上单调递增，

因此，$f(x)$ 的最小值为 $f(0)=-1$；

（2）不等式 $f(x)\geqslant g(x)$，即 $\cos x+\frac{1}{2}x^2-2\geqslant\frac{1}{2}x^2+\sin x-e^{bx}$，

等价于 $e^{bx}-\sin x+\cos x-2\geqslant 0$.

设 $p(x)=e^{bx}-\sin x+\cos x-2$，则由题意得 $p(x)\geqslant 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 内恒成立.

$p'(x)=be^{bx}-\cos x-\sin x$，$p'(0)=b-1$.

①当 $b<1$ 时，$p'(0)<0$，这时$\exists x_0>0$，使当 $x\in(0,x_0)$ 时，$p'(x)<0$，

从而 $p(x)$ 在$[0,x_0]$上单调递减，

又∵$p(0)=0$，∴当 $x\in(0,x_0)$ 时，$p(x)<0$，这与 $p(x)\geqslant0$ 在$[0,+\infty)$内恒成立不符.

②当 $b\geqslant1$ 时，对于任意的 $x\geqslant0$，$bx\geqslant x$，从而 $e^{bx}\geqslant e^x$，这时 $p(x)\geqslant e^x-\sin x+\cos x-2$.

设 $q(x)=e^x-\sin x+\cos x-2$，则 $q'(x)=e^x-\cos x-\sin x$，

设 $\phi(x)=e^x-x-1$，则 $\phi'(x)=e^x-1$.

当 $x\geqslant0$ 时，$\phi'(x)\geqslant0$，∴$\phi(x)$ 在$[0,+\infty)$上单调递增.

又∵$\phi(0)=0$，∴当 $x\geqslant0$ 时，$\phi(x)\geqslant0$，即 $e^x\geqslant x+1$.

因此，$q'(x)\geqslant1-\cos x+x-\sin x\geqslant0$，∴$q(x)$ 在$[0,+\infty)$上单调递增.

又∵$q(0)=0$，∴当 $x\geqslant0$ 时，$q(x)\geqslant0$，从而 $p(x)\geqslant0$.

综上，实数 b 的取值范围为$[1,+\infty)$.

73.【解析】解：(1) 函数 $f(x)=xe^x-a\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

因为 $f'(x)=(x+1)e^x-\frac{a}{x}$，所以 $f'(1)=2e-a$，

又 $f(1)=e$，所以切点坐标为 $(1,e)$，切线的斜率为 $2e-a$，

故切线的方程为 $y-e=(2e-a)(x-1)$，

因为切线过原点 $(0,0)$，则有 $-e=-(2e-a)$，解得 $a=e$；

(2) 由 (1) 可知，$a=e$，则 $f(x)\geqslant b(x-1)^2+a(\ln x+1)$ 恒成立，

等价于 $xe^x-2e\ln x-b(x-1)^2-e\geqslant0$ 恒成立 (*)，

令 $m(x)=xe^x-2e\ln x-b(x-1)^2-e$，

则 $m(1)=0$，且 $m'(x)=(x+1)e^x-\frac{2e}{x}-2b(x-1)$，$m'(1)=0$，

又 $m''(x)=(x+2)e^x+\frac{2e}{x^2}-2b$，

令 $\phi(x)=(x+2)e^x+\frac{2e}{x^2}-2b$，

则 $\phi'(x)=(x+3)e^x-\frac{4e}{x^3}$在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $\phi'(1)=0$，

当 $0<x<1$ 时，$\phi'(x)<0$，则 $m''(x)$ 为单调递减函数，

当 $x>1$ 时，$\phi'(x)>0$，则 $m''(x)$ 为单调递增函数，

所以当 $x=1$ 时，$m''(x)$ 取得最小值 $m''(1)=5e-2b$，

①当 $5e-2b\geqslant0$，即$b\leq\frac{5}{2}e$时，$m''(x)\geqslant m''(1)\geqslant0$，

则 $m'(x)$ 单调递增，又 $m'(1)=0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$m'(x)<0$，则 $m(x)$ 单调递减，

当 $x>1$ 时，$m'(x)>0$，则 $m(x)$ 单调递增，

所以 $m(x)\geq m(1)=0$，故（*）式恒成立；

②当$b>\frac{5}{2}e$时，$m''(1)<0$，又当 $x\to+\infty$时，$m''(x)\to+\infty$，

存在 $x_0>1$，使得 $m''(x_0)=0$，

当 $1<x<x_0$时，有 $m''(x)<0$，即 $m'(x)$ 单调递减，

所以 $m'(x)<m'(1)=0$，此时 $m(x)$ 单调递减，

故当 $x\in(1,x_0)$ 时，$m(x)<m(1)=0$，故（*）式不成立.

综上所述，b 的取值范围为$(-\infty,\frac{5}{2}e]$.

74.【解析】解：（1）$f(x)=m\ln x+kx+1$（$m>0$），$f(x)$ 的定义域是（0，+∞），

$f'(x)=\frac{m}{x}+k=\frac{kx+m}{x}$，

当 $k\geq0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在（0，+∞）上单调递增，

当 $k<0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得：$x=-\frac{m}{k}$，

当 $x\in(0,-\frac{m}{k})$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(-\frac{m}{k},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

∴$f(x)$ 在 $(0,-\frac{m}{k})$ 上单调递增，在 $(-\frac{m}{k},+\infty)$ 上单调递减；

综上：当 $k\geq0$ 时，$f(x)$ 在（0，+∞）上单调递增，

当 $k<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,-\frac{m}{k})$ 上单调递增，在 $(-\frac{m}{k},+\infty)$ 上单调递减；

（2）$xf'(x)\leq e^{mx}$恒成立，即 $e^{mx}-kx-m\geq0$ 恒成立，

令 $g(x)=e^{mx}-kx-m$，则 $g'(x)=me^{mx}-k$，

①当 $k\leq0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

要使 $g(x)\geq0$ 在（0，+∞）上恒成立，

只需 $g(0)=1-m\geq0$，

∴$0<m\leq1$，此时 m 不唯一，不合题意；

②当 $0<k\leq m$时，令 $g'(x)=0$，解得：$x=\frac{\ln k-\ln m}{m}\leq0$，

$g(x)$ 在（0，+∞）上单调递增，

要使 $g(x)\geq0$ 在（0，+∞）上恒成立，只需 $g(0)=1-m\geq0$，

∴$0<m\leq1$，此时 m 不唯一，不合题意；

③当 $k>m$时，令 $g'(x)=0$，解得：$x=\frac{\ln k-\ln m}{m}>0$，

当 $x\in(0,\frac{\ln k-\ln m}{m})$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(\frac{\ln k-\ln m}{m},+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

$\therefore g(x)_{min}=g(\frac{\ln k-\ln m}{m})=e^{\ln k-\ln m}-\frac{k}{m}(\ln k-\ln m)-m$，

要使 $g(x)\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，且 m 的值唯一，只需 $g(\frac{\ln k-\ln m}{m})=0$，

整理得 $\ln m-\ln k+1-\frac{m^2}{k}=0$，

令 $h(m)=\ln m-\ln k+1-\frac{m^2}{k}$，则 $h'(m)=\frac{k-2m^2}{mk}$，

令 $h'(m)=0$，解得：$m=\sqrt{\frac{k}{2}}$，

当 $m\in(0,\sqrt{\frac{k}{2}})$ 时，$h'(m)>0$，$h(m)$ 单调递增，

当 $m\in(\sqrt{\frac{k}{2}},+\infty)$ 时，$h'(m)<0$，$h(m)$ 单调递减，

$\therefore h(m)_{min}=h(\sqrt{\frac{k}{2}})=\ln\sqrt{\frac{1}{2k}}+\frac{1}{2}$，

要使 m 的值唯一，只需 $h(m)_{max}=\ln\sqrt{\frac{1}{2k}}+\frac{1}{2}=0$，

解得：$k=\frac{e}{2}$，$m=\frac{\sqrt{e}}{2}$，

$\therefore k+m=\frac{e+\sqrt{e}}{2}$.

75.【解析】解：（1）函数的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=a(2x-1)-\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-ax-1}{x}$，

令 $g(x)=2ax^2-ax-1$，

（i）当 $a=0$ 时，$g(x)=-1<0$，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}<0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

（ii）当 $a\neq0$ 时，$g(x)$ 为二次函数，$\triangle=a^2+8a$，

①若 $\triangle\leqslant0$，即 $-8\leqslant a<0$ 时，$g(x)$ 的图象为开口向下的抛物线且 $g(x)\leqslant0$，则 $f'(x)=\frac{g(x)}{x}\leq0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上 5 单调递减；

②当 $\triangle>0$，即 $a<-8$ 或 $a>0$ 时，令 $g(x)=0$，解得 $x_1=\frac{a-\sqrt{a^2+8a}}{4a}$，$x_2=\frac{a+\sqrt{a^2+8a}}{4a}$，

当 $a<-8$ 时，$g(x)$ 的图象为开口向下的抛物线，$0<x_2<x_1$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_2)$，$x\in(x_1,+\infty)$ 时，$g(x)\leqslant0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(x_2,x_1)$ 时，$g(x)>0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $a>0$ 时，$g(x)$ 的图象为开口向上的抛物线，$x_1<0<x_2$，

当 $x\in(0, x_2)$，$g(x)\leqslant 0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(x_2, +\infty)$，$g(x)>0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

综上，当 $a<-8$ 时，$f(x)$ 在$(0, \frac{a+\sqrt{a^2+8}}{4a})$，$(\frac{a-\sqrt{a^2+8}}{4a}$)上单调递减，在$(\frac{a+\sqrt{a^2+8a}}{4a}, \frac{a-\sqrt{a^2+8a}}{4a})$上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在$(0, \frac{a+\sqrt{a^2+8a}}{4a})$上单调递减，在$(\frac{a+\sqrt{a^2+8a}}{4a}, +\infty)$上单调递增；

当 $-8\leqslant a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

（2）证明：由（1）知，当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，

因此对任意 $x>1$ 恒有 $f(x)>f(1)$，即 $x^2-x>\ln x$，

又 $0<\ln x<x^2-x$，要证$\frac{2e^{x-1}}{\ln x}\geq\frac{x^2+1}{x^2-x}$，只需证 $2e^{x-1}\geqslant x^2+1$，

令$m(x)=e^{x-1}-\frac{1}{2}(x^2+1)$，$x\geq 1$，则 $m'(x)=e^{x-1}-x$，$m''(x)=e^{x-1}-1$，

$\because x\geqslant 1$，

$\therefore m''(x)\geqslant 0$，则 $m'(x)$ 在$[1, +\infty)$ 上单调递增，又 $m'(1)=0$，

$\therefore$当 $x\geqslant 1$ 时，$m'(x)\geqslant 0$ 恒成立，则 $m(x)$ 在$[1, +\infty)$ 上单调递增，又 $m(1)=0$，

$\therefore$对任意 $x>1$ 恒有 $m(x)>m(1)$，即 $2e^{x-1}\geqslant x^2+1$，即得证.

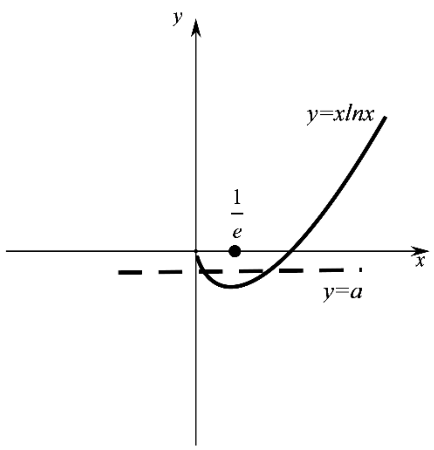
76.【解析】解：（1）由于 $f\left(e^{-2}\right)=-2e^{-2}$，又 $f'(x)=1+\ln x$，

故在点$(e^{-2}, f(e^{-2}))$的切线斜率 $k=f'\left(e^{-2}\right)=-1$，

因此所求切线方程 $y+2e^{-2}=-\left(x-e^{-2}\right)$，

即 $y=-x-e^{-2}$.

（2）由于 $f'(x)=1+\ln x$，



故 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时，$f'(x)<0$，$f'(x)$单调递减，

$x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f'(x)$单调递增，

由图易知，$x_1\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，$x_2\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，

由（1）可知，在$\left(e^{-2},-2e^{-2}\right)$点的切线方程为$y=-x-e^{-2}$，

设$y=-x-e^{-2}$与$y=a$的交点横坐标为x_3，且$x_3\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$

即$x_3=-e^{-2}-a$，下证$x_3<x_1$.

由于$f\left(x\right)$在$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$单调递减，故只需证明$f\left(x_3\right)-f\left(x_1\right)>0$即可.

设$y=f\left(x_3\right)-f\left(x_1\right)=x_3\ln x_3-a=x_3\ln x_3+e^{-2}+x_3$（$x_3\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$）.

$y'=1+\ln x_3+1=2+\ln x_3$，

故$x_3\in\left(0,e^{-2}\right)$，$y'<0$，函数单调递减，

$x_3\in\left(e^{-2},e^{-1}\right)$，$y'>0$，函数单调递增，

因此$y>y|_{x_3=e^{-2}}=0$，

即$x_3<x_1$.

又$f\left(x\right)$在$\left(1,0\right)$处的切线方程为$y=x-1$，

设$y=x-1$与$y=a$的交点横坐标为x_4,，即$x_4=a+1$，下证$x_4>x_2$.

由于$f\left(x\right)$在$\left(\dfrac{1}{e},1\right)$单调递增，故只需证明$f\left(x_4\right)-f\left(x_2\right)>0$即可，

设$y=f\left(x_4\right)-f\left(x_2\right)=x_4\ln x_4-a=x_4\ln x_4-x_4+1$，

$y'=1+\ln x_4-1=\ln x_4<0$，函数在$x_4\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$单调递减，$y>y|_{x_4=1}=0$，

即$x_4>x_2$.

综上易知，$x_2-x_1<x_4-x_3=a+1+e^{-2}+a$，

即$x_2-x_1<1+2a+e^{-2}$.

77.【解析】（1）解：由题意，$f'(x)=\ln x+1+m$，所以$f'(1)=1+m=1$，所以$m=0$；

（2）解：由（1）知$f(x)=x\ln x$，

所以 $g(x)=a\ln x+x^2-8x$ ， $g'(x)=\frac{a}{x}+2x-8=\frac{2x^2-8x+a}{x}(x>0)$ ，

令 $u(x)=2x^2-8x+a(x>0)$ ，函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个极值点，

则 $u(x)=2x^2-8x+a$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不相等的实根 x_1 、 x_2 ，

所以 $\begin{cases}\Delta=64-8a>0\\ x=2>0\\ u(0)=a>0\end{cases}$ ，解得 $0<a<8$ ；

（3）解：由（2）知 $x_1+x_2=4$ ， $x_1x_2=\frac{a}{2}$ ， $0<x_1<x_2$ ，

所以 $x_2=4-x_1>x_1$ 得 $0<x_1<2$ ， $a=2x_1x_2=2x_1(4-x_1)$ ，

所以 $(t-2)(4+3x_1-x_1^2)<\frac{a\ln x_1}{1-x_1}$ 成立，即 $(t-2)(4+3x_1-x_1^2)<\frac{2x_1(4-x_1)\ln x_1}{1-x_1}$ ，

即 $(t-2)(x_1+1)<\frac{2x_1\ln x_1}{1-x_1}$ ，即 $\frac{x_1}{1-x_1}[2\ln x_1+\frac{(t-2)(x_1^2-1)}{x_1}]>0$ 成立，

且 $0<x_1<1$ 时， $\frac{x_1}{1-x_1}>0$ ， $1<x_1<2$ 时， $\frac{x_1}{1-x_1}<0$ ，

令 $h(x)=2\ln x+\frac{(t-2)(x^2-1)}{x}(0<x<2)$ ， $h'(x)=\frac{(t-2)x^2+2x+(t-2)}{x^2}(0<x<2)$ ，

① $t\geq 2$ 时， $h'(x)>0$ ，所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上为增函数，且 $h(1)=0$ ，

所以 $x\in(1,2)$ 时， $h(x)>0$ ，不符合题意.

② $t<2$ 时，令 $p(x)=(t-2)x^2+2x+t-2$ ， $\Delta=4-4(t-2)^2$ ，

（ⅰ）当 $\Delta\leq 0$ ，即 $t\leq 1$ 时， $h'(x)\leq 0$ ，所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上为减函数，且 $h(1)=0$ ，

可得：当 $0<x<1$ 时， $h(x)>0$ ， $\frac{x}{1-x}>0$ ，则 $\frac{x}{1-x}[2\ln x+\frac{(t-2)(x^2-1)}{x}]>0$ ；

当 $1<x<2$ 时， $h(x)<0$ ， $\frac{x}{1-x}<0$ ，则 $\frac{x}{1-x}[2\ln x+\frac{(t-2)(x^2-1)}{x}]>0$.

所以 $\frac{x}{1-x}[2\ln x+\frac{(t-2)(x^2-1)}{x}]>0$ 对任意的 $x\in(0,1)\cup(1,2)$ 恒成立；

（ⅱ）当 $\Delta>0$ ，即 $1<t<2$ 时，二次函数 $p(x)$ 图象的对称轴 $x=\frac{1}{2-t}>1$ ，

且 $p(1)=2t-2>0$ ，令 $x_0=\min\{\frac{1}{2-t},2\}$ ，

则当 $x\in(1,x_0)$ 时， $p(x)>0$ ，即 $h'(x)>0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 为增函数，且 $h(1)=0$ ，所以 $h(x)>0$ ，不符合题意.

综上， $t\leq 1$.

78.【解析】（1）由题意得， $f'(x)=e^x-2a$.

①当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

所以函数 $f(x)$ 为 R 上的增函数，没有极值.

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln(2a)$.

当 $x\in(-\infty,\ln(2a))$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(2a))$ 上单调递减；

当 $x\in(\ln(2a),+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(\ln(2a),+\infty)$ 上单调递增；

所以当 $x=\ln(2a)$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值，极小值为 $f(\ln(2a))=2a-2a\ln(2a)$，没有极大值.

综上所述，当 $a\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 没有极值；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $2a-2a\ln(2a)$，没有极大值.

（2）解法 1：

首先证明：$2\ln(2a)\le 4a-2$. 设 $g(a)=2\ln(2a)-4a+2$，则 $g'(a)=\dfrac{2}{a}-4=\dfrac{2(1-2a)}{a}$.

当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时 $g'(a)>0$，$g(a)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上是增函数；

当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，$g'(a)<0$，$g(a)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上是减函数；

所以 $g(a)\le g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，即 $2\ln(2a)-4a+2\le 0$，

即 $2\ln(2a)\le 4a-2$.

所以要证 $x_1+x_2<4a-2$，只需证 $x_1+x_2<2\ln(2a)$.

不妨设 $x_1<x_2$，由（1）知 $x_1<\ln(2a)$，$x_2>\ln(2a)$.

要证 $x_1+x_2<2\ln(2a)$，即证 $x_1<2\ln(2a)-x_2$.

因为 $x_2>\ln(2a)$，所以 $2\ln(2a)-x_2<\ln(2a)$.

又 $x_1<\ln(2a)$，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(2a))$ 上单调递减，

故只需证明 $f(x_1)>f(2\ln(2a)-x_2)$，

即证 $f\left(x_1\right)-f\left(2\ln(2a)-x_2\right)>0$.

又 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，所以只需证明 $f\left(x_2\right)-f\left(2\ln(2a)-x_2\right)>0$.

令 $G\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(2\ln\left(2a\right)-x\right)=e^x-4ax-\frac{4a^2}{e^x}+4a\ln\left(2a\right),\left(x>\ln\left(2a\right)\right)$.

则 $G'\left(x\right)=e^x+\frac{4a^2}{e^x}-4a\geq 2\sqrt{e^x\cdot\frac{4a^2}{e^x}}-4a=0$，

当且仅当 $e^x=2a$，即 $x=\ln\left(2a\right)$ 时，等号成立.

所以 $G\left(x\right)$ 在 $\left(\ln\left(2a\right),+\infty\right)$ 上单调递增.

所以 $G\left(x\right)>G\left(\ln\left(2a\right)\right)=0$.

因为 $x_2>\ln\left(2a\right)$，所以 $G\left(x_2\right)>0$，即 $f\left(x_2\right)>f\left(2\ln\left(2a\right)-x_2\right)$，问题得证.

故 $x_1+x_2<2\ln\left(2a\right)$，

所以 $x_1+x_2<4a-2$.

解法 2：

首先证明：$2\ln\left(2a\right)\leq 4a-2$.

设 $g\left(a\right)=2\ln\left(2a\right)-4a+2$，则 $g'\left(a\right)=\frac{2}{a}-4=\frac{2\left(1-2a\right)}{a}$.

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$g'\left(a\right)>0$，$g\left(a\right)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上是增函数；

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$g'\left(a\right)<0$，$g\left(a\right)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上是减函数；

所以 $g\left(a\right)\leq g\left(\frac{1}{2}\right)=0$，即 $2\ln\left(2a\right)-4a+2\leq 0$，

即 $2\ln\left(2a\right)\leq 4a-2$

所以要证 $x_1+x_2<4a-2$，只需证 $x_1+x_2<2\ln\left(2a\right)$.

不妨设 $x_1<x_2$，由（1）知 $x_1<\ln\left(2a\right)$，$x_2>\ln\left(2a\right)$.

令 $G(x)=f(x)-f\left(2\ln(2a)-x\right)=e^x-4ax-\dfrac{4a^2}{e^x}+4a\ln(2a),\left(x>\ln(2a)\right)$

则 $G'(x)=e^x+\dfrac{4a^2}{e^x}-4a\geq 2\sqrt{e^x\cdot\dfrac{4a^2}{e^x}}-4a=0$，

当且仅当 $e^x=2a$，即 $x=\ln(2a)$ 时，等号成立.

所以 $G(x)$ 在 $\left(\ln(2a),+\infty\right)$ 上单调递增.

所以 $G(x)>G\left(\ln(2a)\right)=0$.

因为 $x_2>\ln(2a)$，所以 $G(x_2)>0$，

即 $f(x_2)>f\left(2\ln(2a)-x_2\right)$.

又 $f(x_1)=f(x_2)$，所以 $f(x_1)>f\left(2\ln(2a)-x_2\right)$.

因为 $x_2>\ln(2a)$，所以 $2\ln(2a)-x_2<\ln(2a)$.

又 $x_1<\ln(2a)$，函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln(2a)\right)$ 上单调递减，所以 $x_1<2\ln(2a)-x_2$，

即 $x_1+x_2<2\ln(2a)$.

所以 $x_1+x_2<4a-2$.

79. **【解析】**（1）$f'(x)=e^x-ax-1$，$f''(x)=e^x-a$，由题意知，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f''(x)>0$，则 $f'(x)$ 单调递增，又 $f'(0)=0$，则当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，即 $a\leqslant 0$ 不符合题意；

当 $a>0$ 时，$f''(x)=0$. 解得 $x=\ln a$. 可知，$f'(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a.+\infty)$ 上单调递增，

$f'(x)_{min}=f'(\ln a)=a-a\ln a-1\ (a>0)$，

设 $g(a)=a-a\ln a-1\ (a>0)$，$g'(a)=-\ln a$，$g(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f'(\ln a)=g(a)\leqslant g(1)=0$.

若 $\ln a=0$，即 $a=1$ 时，$f'(x)\geqslant f'(0)=0$，符合题意；

若 $\ln a\neq 0$，即 $a\neq 1$ 时，$f'(\ln a)<f'(0)=0$，不符合题意.

综上，$a=1$.

（2）证明：①$a>1$ 时，$\ln a>0$，由（1）知，$f'(x)_{min}=f'(\ln a)<0$，且 $f'(0)=0$，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(0.\ \ln a)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $x_1=0$ 为极大值点，

由（1）有 $e^x\geqslant x+1>x$，则当 $x>1$ 时，$e^x=e^{\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}}>\frac{x^2}{4}$，

所以 $f'(x)>\frac{x^2}{4}-(a+1)x$，所以当 $x>4(a+1)$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x\in(\ln a,x_2)$ 时，$f'(x)<0$．当 $x\in(x_2,4(a+1))$ 时，$f'(x)>0$．所以 $x=x_2$ 为极小值点，

所以 $f(x)$ 有两个极值点，

因为 $f'(x_2)=0$，所以 $a=\frac{e^{x_2}-1}{x_2}$，

设 $h(x)=\frac{e^x-1}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{e^x(e^{-x}+x-1)}{x^2}$，

由（1）可知，$e^{-x}\geqslant-x+1$，所以 $h'(x)\geqslant0$，$h(x)$ 单调递增，所以 x_2 随着 a 的增大而增大，且 $x_2-x_1=x_2$，所以 x_2-x_1 随着 a 的增大而增大．

②由 $a=\frac{e^{x_2}-1}{x_2}$，可得 $f(x_2)=(1-\frac{x_2}{2})e^{x_2}-\frac{x_2}{2}$，

要证 $f(x_2)<1+\frac{sinx_2-x_2}{2}$，即证 $(1-\frac{x_2}{2})e^{x_2}<1+\frac{sinx_2}{2}$，

即证 $2-x_2-\frac{2+sinx_2}{e^{x_2}}<0$，

设 $\phi(x)=2-x-\frac{2+sinx}{e^x}$，$x>0$，

$\phi'(x)=\frac{2+sinx-cosx}{e^x}-1$，$\phi''(x)=\frac{2(cosx-1)}{e^x}\leq0$，.

所以 $\phi'(x)$ 单调递减，所以 $\phi'(x)<\phi'(0)=0$，

所以 $\phi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\phi(x)<\phi(0)=0$，

所以命题得证．

80.【解析】（1）解：当 $a=\frac{e}{2}$ 时，$f(x)=e^x-\frac{e}{2}x^2-x-1$，

所以 $f'(x)=e^x-ex-1$，$f''(x)=e^x-e$，

所以当 $x<1$ 时，$f''(x)<0$，$f'(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减；

当 $x>1$ 时，$f''(x)>0$，$f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f'(0)=0$，$f'(1)=-1$，$f'(2)=e^2-2e-1>0$，

所以存在 $x_0\in(1,2)$，使 $f'(x_0)=0$，所以，$x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)>0$；$x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<$

0； $x\in(x_0,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$ ，所以 0 和 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，

所以 $f(x)$ 有两个极值点

（2）解： $f(x)=e^x-ax^2-x-1$ ， $f'(x)=\mathrm{e}^x-2ax-1$ ，

设 $h(x)=f'(x)=e^x-2ax-1(x\geq 0)$ ，则 $h'(x)=e^x-2a$ 单调递增，

又 $h'(0)=1-2a$ ，

所以当 $a\leq\frac{1}{2}$ 时， $h'(x)\geq 0$ ， $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)\geq h(0)=0$ ，即 $f'(x)\geq 0$ ， $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)\geq f(0)=0$ ，符合题意.

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，令 $h'(x)=0$ ，解得 $x=\ln 2a$ ，

当 $x\in[0,\ln 2a)$ 时， $h'(x)<0$ ， $h(x)$ 在 $[0,\ln 2a)$ 上单调递减， $f'(x)=h(x)\leq h(0)=0$ ，
$f(x)$ 在 $(0,\ln 2a)$ ）上单调递减，

所以 $x\in(0,\ln 2a)$ 时， $f(x)<f(0)=0$ ，不符合题意，

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,\frac{1}{2}]$

（3）证明：由（2）可知 $a=\frac{1}{2}$ 时， $f(x)\geq 0$ ， $x\in[0,+\infty)$ ，即 $2e^x-1\geq x^2+2x+1(x\geq 0)$ ，

所以 $2\mathrm{e}^n-1\geq n^2+2n+1>n^2+2n$ ， $\frac{2}{2\mathrm{e}^n-1}<\frac{2}{n(n+2)}$ ，

所 以 $\frac{2}{2e-1}+\frac{2}{2e^2-1}+\cdots+\frac{2}{2e^n-1}<\frac{2}{1\times 3}+\frac{2}{2\times 4}+\cdots+\frac{2}{n(n+2)}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}<\frac{3}{2}$