

专题七 排列组合与二项式定理

排列组合

1. (日照一模 3) 要将甲、乙、丙、丁 4 名同学分到 A, B, C 三个班中, 要求每个班至少分到一人, 则甲被分到 A 班的分法种数为
- A. 6 B. 12 C. 24 D. 36
2. (潍坊一模 5) 接种疫苗是预防和控制传染病最经济、有效的公共卫生干预措施. 根据实验数据, 人在接种某种病毒疫苗后, 有 80% 不会感染这种病毒, 若有 4 人接种了这种疫苗, 则最多 1 人被感染的概率为
- A. $\frac{512}{625}$ B. $\frac{256}{625}$ C. $\frac{113}{625}$ D. $\frac{1}{625}$
3. (泰安一模 4) 2020 年 11 月, 中国国际进口博览会在上海举行, 本次进博会设置了“云采访”区域, 通过视频连线, 帮助中外记者采访因疫情影响无法来沪参加进博会的跨国企业 CEO 或海外负责人. 某新闻机构安排 4 名记者和 3 名摄影师对本次进博会进行采访, 其中 2 名记者和 1 名摄影师负责“云采访”区域的采访, 另外 2 名记者和 2 名摄影师分两组 (每组记者和摄影师各 1 人), 分别负责“汽车展区”和“技术装备展区”的现场采访. 如果所有记者、摄影师都能承担三个采访区域的相应工作, 则所有不同的安排方案有 ()
- A. 36 种 B. 48 种 C. 72 种 D. 144 种
4. (2021·临沂一模 6) 北京 2022 年冬奥会吉祥物“冰墩墩”和冬残奥会吉祥物“雪容融”一亮相, 好评不断, 这是一次中国文化与奥林匹克精神的完美结合, 是一次现代设计理念的传承与突破. 为了宣传 2022 年北京冬奥会和冬残奥会, 某学校决定派小明和小李等 5 名志愿者将两个吉祥物安装在学校的体育广场, 若小明和小李必须安装同一个吉祥物, 且每个吉祥物都至少由两名志愿者安装, 则不同的安装方案种数为 ()
- A. 8 B. 10 C. 12 D. 14
5. (2021·淄博一模 8) 有 7 名学生参加“学党史知识竞赛”, 咨询比赛成绩, 老师说: “甲的成绩是中间一名, 乙不是 7 人中成绩最好的, 丙不是 7 人中成绩最差的, 而且 7 人的成绩各不相同.” 那么他们 7 人不同的可能位次共有 ()
- A. 120 种 B. 216 种 C. 384 种 D. 504 种

二项式定理

一、单项选择

1. (济宁一模 5) 若 $(\frac{1}{\sqrt{x}} - mx^2)^5$ ($m \in R$) 的展开式中 x^5 的系数是 80, 则实数 $m =$

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

2. (烟台一模 3) $(1 - x^2)(x - 2)^6$ 展开式中含 x^2 项的系数为

- A. 240 B. -240 C. 176 D. -176

3. (潍坊一模 6) 多项式 $(x^2 + 1)(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ 展开式中 x^3 的系数为

- A. 6 B. 8 C. 12 D. 13

二、多项选择

4. (济南一模 9) 在 $(\frac{2}{x} - x)^6$ 的展开式中, 下列说法正确的是

- A. 常数项为 160 B. 第 4 项的二项式系数最大
C. 第 3 项的系数最大 D. 所有项的系数和为 64

三、填空

5. (菏泽一模 13) $(x^2 + x + y)^5$ 的展开式中, x^5y^2 的系数为_____.

6. (青岛一模 13) $(x^2 - \frac{2}{x})^6$ 的展开式中的常数项是_____

7. (滨州一模 14) $(x + y - z)^6$ 的展开式中 xy^2z^3 的系数是_____.

8. (德州一模 13) 若二项式 $(1 + 2x)^n$ ($n \in \mathbf{N}_+$) 的展开式中所有项的二项式系数和为 32, 则该二项式展开式中含有 x^3 项的系数为_____.

专题七 排列组合与二项式定理

排列组合

1. 【答案】B

【解析】由题意可分两类，第一类，甲与另一人同分到 A 班，有 6 种；第二类，甲单独在 A 班，有 6 种，共 12 种，故选 B

2. 【答案】A

【解析】 $P = C_4^1 0.2 \times 0.8^3 + 0.8^4 = \frac{512}{625}$ ，故选 A.

3. 【答案】C

【解析】根据题意，分 3 步进行分析：

①在 4 名记者中任选 2 人，在 3 名摄影师中选出 1 人，安排到“云采访”区域采访，有 $C_4^2 C_3^1 = 18$ 种情况，

②在剩下的外 2 名记者中选出 1 人，在 2 名摄影师中选出 1 人，安排到“汽车展区”采访，有 $C_2^1 C_2^1 = 4$ 种情况，

③将最后的 1 名记者和 1 名摄影师，安排到“技术装备展区”采访，有 1 种情况，

则有 $18 \times 4 = 72$ 种不同的安排方案，

故选：C.

4. 【答案】A

【分析】根据题意，分 2 种情况讨论：①小明和小李两个人安装同一个吉祥物，②小明和小李和另外一人安装同一个吉祥物，由加法原理计算可得答案.

【解析】根据题意，分 2 种情况讨论：

①小明和小李两个人安装同一个吉祥物，则剩下 3 人安装另外 1 个，有 2 种安装方案，

②小明和小李和另外一人安装同一个吉祥物，则剩下 2 人安装另外 1 个，有 $C_3^1 \times 2 = 6$ 种安装方案，

则有 $2 + 6 = 8$ 种不同的安装方案，

故选：A.

5. 【答案】D

【分析】由题意，可分两类，若乙的成绩是最差的，若乙的成绩不是最差的，根据分类分步计数原理可得.

【解析】若乙的成绩是最差的，则有 $A_5^5 = 120$ 种，

若乙的成绩不是最差的，从甲乙丙之外的 4 人中选 1 人为成绩最差，再选一人为成绩最优秀的，其它任

意排，故有 $A_4^1 A_4^1 A_4^4 = 384$ 种，

故共有 $120 + 384 = 504$ 种，

故选：D.

二项式定理

一、单项选择

1. 【答案】A

【解析】因为二项式展开式通项为 $T_{r+1} = C_5^r (x^{\frac{1}{2}})^{5-r} (-mx^2)^r = (-m)^r C_5^r x^{\frac{5r-5}{2}}$ ，令 $\frac{5r-5}{2} = 5$ ，

得 $r = 3$ ，所以由题系数 $(-m)^3 C_5^3 = 80$ ，解得 $m = -2$

2. 【答案】C

【解析】 $(1-x^2)(x-2)^2 = (x-2)^2 - x^2(x-2)^6$ ，

因为 $(x-2)^6$ 展开式 x^2 的系数为 $C_6^4 (-2)^4 = 15 \times 16 = 240$ ，常数项为 $C_6^6 (-2)^6 = 64$ ，

所以展开式中含 x^2 项的系数为 $240 - 64 = 176$ ，故选 C

3. 【答案】C

【解析】 $2 \times 3 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 1 = 12$ ，选 C.

二、多项选择

4. 【答案】BC

【解析】展开式的通项为 $T_{r+1} = \left(\frac{2}{x}\right)^{6-r} (-x)^r = 2^{6-r} (-1)^r C_6^r x^{2r-6}$ ，由 $2r-6=0$ ，得 $r=3$ ，所以常数项为 $2^3 (-1)^3 C_6^3 = -160$ ，A 错误；展开式共有 7 项，所以第 4 项二项式系数最大，B 正确；第 3 项得系数最大，C 正确；令 $x=1$ ，得 $\left(\frac{2}{x} - x\right)^6 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 1$ ，所有项的系数和为 1，D 错误；故选 BC.

三、填空

5. 【答案】30

【解析】解法一： $(x^2+x+y)^5$ 可看作 5 个 (x^2+x+y) 相乘，

从中选 2 个 y ，有 C_5^2 种选法；

再从剩余的三个括号里边选出 2 个 x^2 ，最后一个括号选出 x ，有 $C_3^2 \cdot C_1^1$ 种选法；

$\therefore x^5 y^2$ 的系数为 $C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 = 30$ ；

解法二： $\because (x^2+x+y)^5 = [(x^2+x) + y]^5$,

其展开式的通项公式为

$$T_{r+1} = C_5^r \cdot (x^2+x)^{5-r} \cdot y^r,$$

令 $r=2$, 得 $(x^2+x)^3$ 的通项公式为

$$C_3^m \cdot (x^2)^{3-m} \cdot x^m = C_3^m \cdot x^{6-m},$$

再令 $6-m=5$, 得 $m=1$,

$\therefore (x^2+x+y)^5$ 的展开式中, x^5y^2 的系数为

$$C_5^2 \cdot C_3^1 = 30.$$

故答案为: 30.

6. 【答案】 240

【解析】 $(x^2 - \frac{2}{x})^6$ 得展开式得通项为 $T_{r+1} = C_6^r (x^2)^{6-r} \cdot (-2)^r x^{-r} = (-2)^r C_6^r x^{12-3r}$, 由 $12-3r=0$ 得, $r=4$, 因此常数项为 $(-2)^4 C_6^4 = 240$.

7. 【答案】 -60

【解析】 $(x+y-z)^6$ 表示 6 个因式 $(x+y-z)$ 的乘积, 故其中有一个因式取 x , 其中 2 个因式取 y , 其余的因式都取 $-z$,

即可得到展开式中 xy^2z^3 的项, 故该项的系数为 $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 \cdot (-1)^3 = -60$,

故答案为: -60.

8. 【答案】 80

【解析】 $\because (1+2x)^n (n \in \mathbb{N}_+)$ 的展开式中所有项的二项式系数和为 32,

$$\therefore 2^n = 32,$$

解得 $n=5$,

$\therefore$ 该二项式展开式中含有 x^3 项的系数为 $C_5^3 \cdot 2^3 = 80$,

故答案为: 80.