专题六　平面向量

一、单项选择题

1.（聊城一模 3）设向量 $a=(1,1), b=(-1,3), c=(2,1)$，且 $(a-\lambda b)//c$，则 $\lambda=$

A．6　　B．$\frac{1}{6}$　　C．7　　D．$\frac{1}{7}$

2.（济南一模 3）已知单位向量 ***a***,***b***,***c*** 满足 ***a***+***b***+***c***=0,则 ***a*** 与 ***b*** 的夹角为

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

3.（滨州一模 3）在△*ABC* 中，*AD* 为 *BC* 边上的中线，*E* 为 *AD* 的中点，则 $\overrightarrow{EB}=$（　　）

A．$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B．$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$　　C．$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D．$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

4.（德州一模 6）已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，则 $\cos<\vec{a},\vec{a}+\vec{b}>=$（　　）

A．$\frac{5}{7}$　　B．$\frac{3}{7}$　　C．$-\frac{2}{7}$　　D．$-\frac{5}{7}$

5.（烟台一模 6）平行四边形 ABCD 中，AB=4，AD=3，∠BAD=60°，Q 为 CD 中点，点 P 在对角线 BD 上，且 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD}$，若 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BQ}$，则 $\lambda=$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

6.（**2021•临沂一模 5**）*A*，*B* 是圆 *O*：$x^2+y^2=1$ 上两个动点，$|\overrightarrow{AB}|=1$，$\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}$，*M* 为线段 *AB* 的中点，则 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的值为（　　）

A．$\frac{3}{2}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{4}$

7.（济宁一模 7）已知 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 均为单位向量，且满足 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值为

A. $\frac{3}{8}$　　B. $\frac{5}{8}$　　C. $\frac{7}{8}$

8.（**2021•淄博一模 7**）已知等边三角形 *ABC* 的边长为 6，点 *P* 满足 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，则 $|\overrightarrow{PA}|=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$3\sqrt{3}$　　D．$4\sqrt{3}$

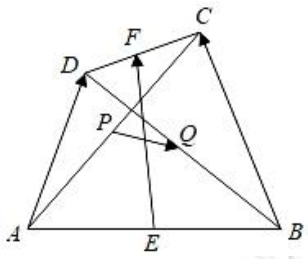
二、填空

9.（潍坊一模 13）已知正方形 ABCD 的边长为 1，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，则 $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=$_______.

10.（菏泽一模 14）设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为单位向量，且 $|\vec{a}-\vec{b}|=1$，则 $|2\vec{a}+\vec{b}|=$____.

11.（青岛一模 14） 已知非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$，且 $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{a}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为________

12.（泰安一模 15） 如图，在平面四边形 *ABCD* 中，已知 *AD*＝3，*BC*＝4，*E*，*F* 为 *AB*，*CD* 的中点，*P*，*Q* 为对角线 *AC*，*BD* 的中点，则 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{EF}$ 的值为____.



专题六 平面向量

一、单项选择题

1.【答案】D

2.【答案】C

【解析】由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$，所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|-\boldsymbol{c}|$，即$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=1$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=-\frac{1}{2}$，得$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\frac{2\pi}{3}$，故选 C。

3.【答案】A

【解析】在△ABC 中，AD 为 BC 边上的中线，E 为 AD 的中点，

$$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

$$=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC},$$

故选：A.

4.【答案】A

【解析】向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，

可得 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{16+8+25}=7$，

$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=16+4=20$，

$\cos<\vec{a},\ \vec{a}+\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{20}{4\times7}=\dfrac{5}{7}$.

故选：A.

5.【答案】A

【解析】因为 Q 为 CD 中点，

所以$\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

又因为$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\lambda\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$，

因为$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BQ}$，所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$，即$\left(\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\left((1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}\right)=0$，

展开得$\left(1-\frac{3}{2}\lambda\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}(1-\lambda)\overrightarrow{AB}^2+\lambda\overrightarrow{AD}^2=0$，将$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=6$，$\overrightarrow{AB}^2=16,\overrightarrow{AD}^2=9$代入得，$\lambda=\frac{1}{4}$，

故选 A

6.【答案】B

【分析】根据题意，分析可得△OAB 为等边三角形且∠AOB＝60°，由向量的加法的运算法则可得$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，进而可得$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM}=(3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB})\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(3\overrightarrow{OA}^2-2\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})$，计算可得答案．

【解答】根据题意，A，B 是圆 O：$x^2+y^2=1$ 上两个动点，$|\overrightarrow{AB}|=1$，

则△OAB 为等边三角形且∠AOB＝60°，则$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OB}|\times\cos60°=\frac{1}{2}$，

M 为线段 AB 的中点，则$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，

则$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM}=(3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB})\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$=\frac{1}{2}(3\overrightarrow{OA}^2-2\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(3-2+\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$；

故选：B．

7.【答案】B

【解析】由题$\overrightarrow{OA}=-2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，

$\therefore|\overrightarrow{OA}|^2=4(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2=4|\overrightarrow{OB}|^2+4|\overrightarrow{OC}|^2+8\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}$

由题$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$，$\therefore\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=-\frac{7}{8}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+|\overrightarrow{OA}|^2$$

$$=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2=-\frac{7}{8}+\frac{3}{2}=\frac{5}{8}$$

8.【答案】C

【分析】由已知结合向量的加法三角形法则整理得$\overrightarrow{PA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，然后结合向量数量积的性质及模长公式可求．

【解答】因为$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，

所以$\overrightarrow{PA}+2(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB})-(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$，

整理得，$\overrightarrow{PA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，

由等边三角形 ABC 的边长为 6，得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\times6\times\frac{1}{2}=18$，

两边平方得，$\overrightarrow{PA}^2=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\times 36+36-18=27$，

则$|\overrightarrow{PA}|=3\sqrt{3}$.

故选：C.

二、填空

9.【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\left|2\vec{c}\right|=2\sqrt{2}$.

10.【答案】$\sqrt{7}$.

【解析】∵ $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$，

∴ $(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，

∴ $2\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，

∴ $|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(2\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{4\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{4+2+1}=\sqrt{7}$.

故答案为：$\sqrt{7}$.

11.【答案】$\frac{2\pi}{3}$

【解析】由$(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{a}$，得$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，因为$|\vec{b}|=2\left|\vec{a}\right|$，所以$\left|\vec{a}\right|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos<\vec{a},\vec{b}>$ $=-\frac{1}{2}$，故$<\vec{a},\vec{b}>=\frac{2\pi}{3}$.

12.【答案】$-\frac{7}{4}$.

【解析】如图，连接 FP，FQ，EP，EQ，

∵E，F 为 AB，CD 的中点，P，Q 为对角线 AC，BD 的中点，

∴四边形 $EPFQ$ 为平行四边形，

∴$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{EQ}-\overrightarrow{EP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC})$，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{EQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$，且 $AD=3$，$BC=4$，

∴$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{BC}^2)=-\frac{7}{4}$.

故答案为：$-\frac{7}{4}$.