

专题六 数列

一、单项选择题

1. (2021 淄博二模 3) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, S_n 为其前 n 项和, 若 $2S_3 = a_2 + a_3 + a_4$, 则公比 $q =$ ().

- A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ C. 1 D. 2

2. (2021 淄博三模 3) 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 a_{2021} 是 a_{2019} , a_{2020} 两项的等差中项, 则 $q =$ ().

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -1

3. (2021 青岛三模 4) 行列式是近代数学中研究线性方程的有力工具, 其中最简单的二阶行列式的运算定义如下:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\begin{vmatrix} 1 & (10-a_7) \\ 1 & a_9 \end{vmatrix} = 0$, 则 $S_{15} =$ ().

- A. $\frac{15}{2}$ B. 45 C. 75 D. 150

4. (2021 省实验中学二模 4) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的项数为奇数, 其中所有奇数项之和为 319, 所有偶数项之和为 290, 则该数列的中间项为 ().

- A. 28 B. 29 C. 30 D. 31

5. (2021 青岛二模 5) 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n + b_n = 1$, $b_{n+1} = \frac{b_n}{1-a_n^2}$, 则 $b_{2021} =$ ().

- A. $\frac{2021}{2020}$ B. $\frac{2020}{2021}$ C. $\frac{2021}{2022}$ D. $\frac{2022}{2021}$

6. (2021 烟台适应性练习一 6) 传说古希腊毕达哥拉斯学派的数学家用沙粒和小石子研究数. 他们根据沙粒和石子所排列的形状把数分成许多类, 如三角形数、正方形数、五边形数、六边形数等. 如图所示, 将所有六边形数、按从小到大的顺序排列成数列, 前三项为 1, 6, 15, 则此数列的第 10 项为 ().



维坊高中数学

- A. 120 B. 153 C. 190 D. 231

7. (2021 聊城二模 8) 已知数列 $\{a_n\}$, $a_n = \frac{1}{f(n)}$, 其中 $f(n)$ 为最接近 $\sqrt{n}$ 的整数, 若 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为 20, 则 $m =$ ().

- A. 15 B. 30 C. 60 D. 110

二、多项选择题

8. (2021 济南二模 11) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_n \cdot a_{n+1}=2^n$, $n \in \mathbb{N}_+$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $a_4=4$ B. $\{a_{2n}\}$ 是等比数列
C. $a_{2n} - a_{2n-1} = 2^{n-1}$ D. $a_{2n-1} + a_{2n} = 2^{n+1}$

9. (2021 潍坊三模 12) 如图所示的数表中, 第 1 行是从 1 开始的正奇数, 从第 2 行开始每个数是它肩上两个数之和. 则下列说法正确的是 ()

1 3 5 7 9 11 ...
4 8 12 16 20 ...
12 20 28 36 ...
...

- A. 第 6 行第 1 个数为 192
B. 第 10 行的数从左到右构成公差为 2^{10} 的等差数列
C. 第 10 行前 10 个数的和为 95×2^9
D. 数表中第 2021 行第 2021 个数为 6061×2^{2020}

10. (2021 滨州二模 10) 已知一组数据的平均数、中位数、众数依次成等差数列, 若这组数据丢失了其中的一个, 剩下的六个数据分别是 2, 2, 4, 2, 5, 10, 则丢失的这个数据可能是 ()

- A. -11 B. 3 C. 9 D. 17

11. (2021 日照三模 10) 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1=a_2=1$, $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$ ($n \geq 3$), 则下列结论正确的是 ()

- A. 数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 为等比数列
B. 数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 为等比数列
C. $a_n = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$
D. $S_{20} = \frac{2}{3}(4^{10}-1)$



12. (2021 省实验中学二模 12) 在数学课堂上, 教师引导学生构造新数列: 在数列的每相邻两项之间插入此两项的和, 形成新的数列, 再把所得数列按照同样的方法不断构造出新的数列, 将数列 1, 2 进行构造, 第 1 次得到数列 1, 3, 2; 第 2 次得到数列 1, 4, 3, 5, 2, ...; 第 n ($n \in \mathbb{N}^*$) 次得到数列 1, x_1 , x_2 , x_3 , ..., x_k , 2; ... 记 $a_n = 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k + 2$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 ()

A. $k+1=2^n$

B. $a_{n+1}=3a_n-3$

C. $a_n=\frac{3}{2}(n^2+3n)$

D. $S_n=\frac{3}{4}(3^{n+1}+2n-3)$

13. (2021 淄博二模 12) 记 $\langle x \rangle$ 表示与实数 x 最接近的整数, 数列 $\{a_n\}$ 通项公式为 $a_n = \frac{1}{\langle \sqrt{n} \rangle} (n \in \mathbb{N}^*)$,

其前 n 项和为 S_n , 设 $k = \langle \sqrt{n} \rangle$, 则下列结论正确的是 ().

A. $\sqrt{n} = k - \frac{1}{2}$

B. $\sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$

C. $n \geq k^2 - k + 1$

D. $S_{2021} = 88$

三、 填空题

14. (2021 滨州二模 13) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_3 = 7$, $S_3 = 21$, 则公比 $q =$ _____.

15. (2021 聊城三模 13) 数列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... 称为斐波那契数列, 是意大利著名数学家斐波那契于 1202 年在他写的《算盘全书》提出的, 该数列的特点是: 从第三起, 每一项都等于它前面两项的和. 在该数列的前 2021 项中, 奇数的个数为 _____.

16. (2021 潍坊四县 5 月联考 15) 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1021$, 其 n 前项和 S_n 满足 $S_n = -S_{n-1} - n^2$, 则 $a_{2021} =$ _____.

17. (2021 泰安二模 15) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $2S_n - na_n = n (n \in \mathbb{N}^*)$, 若 $S_{20} = -360$, 则 $a_2 =$ _____.

18. (2021 潍坊二模 14) 数学史上著名的“冰雹猜想”指的是: 任取一个正整数 m , 若 m 是奇数, 就将该数乘 3 再加上 1; 若 m 是偶数, 就将该数除以 2. 反复进行上述两种运算, 经过有限次步骤后, 必进入循环圈 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. 按照上述猜想可得到一个以 m 为首项的无穷数列记作 $\{a_n\}$, $\{a_n\}$ 满足的递推关系为 $a_1 =$

$$m, a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ 为偶数,} \\ 3a_n + 1, & a_n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

如取 $m=6$, 根据上述运算法则得出 $a_9=1$, $a_{10}=4$, ..., 若 $a_7=1$, 则满

足条件的一个 m 的值为 _____.

19. (2021 烟台适应性练习二 15) 任取一个正整数, 若是奇数, 就将该数乘 3 再加上 1; 若是偶数, 就将该数除以 2. 反复进行上述两种运算, 经过有限次步骤后, 必进入循环圈 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. 这就是数学史上著名的“冰雹猜想”. 例如: 正整数 $m=6$, 根据上述运算法则得出 $6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, 共经过 8 个步骤变成 1 (简称为 8 步“雹程”). “冰雹猜想”可表示为数列 $\{a_n\}$: $a_1 = m (m \text{ 为正整数})$, a_{n+1}

$$= \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ 为偶数} \\ 3a_n + 1, & a_n \text{ 为奇数} \end{cases}, \text{ 若 } a_6 = 2, \text{ 则 } m \text{ 的所有可能取值之和为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

20. (2021 烟台三模 1) 15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \log_2 \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$. 给出定义: 使数列 $\{a_n\}$ 的前 k 项和为正整数的 k ($k \in \mathbf{N}^*$) 叫做“好数”, 则在 $[1, 2021]$ 内的所有“好数”的和为_____.

四、解答题

21. (2021 济南二模 18) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_2=4$, $S_5=30$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{2}{a_n - 1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .



22. (2021 潍坊三模 17) 已知正项等比数列 $\{a_n\}$, 其中 a_1, a_2, a_3 分别是下表第一、二、三行中的某一个数, 令 $b_n = 2\log_2 a_n$.

	第一列	第二列	第三列
第一行	5	3	2
第二行	4	10	9
第三行	18	8	11

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设数列 $\left\{\frac{1}{b_n^2 - 1}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $T_n < \frac{1}{2}$.



23. (2021 枣庄二模 17) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = a_2 = 1$, 且 $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$. 记 $b_n = a_{n+1} + a_n$, 求证:

(1) $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 满足 $\frac{b_n}{T_1 \cdot T_2} + \frac{b_3}{T_2 \cdot T_3} + \cdots + \frac{b_{n+1}}{T_n \cdot T_{n+1}} < \frac{1}{2}$.

24. (2021 烟台适应性练习一 17) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = 1$, $2S_n = na_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$, $b_n b_{n+1} = 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, 按照如下规律构造新数列 $\{c_n\}$: $a_1, b_2, a_3, b_4, a_5, b_6, \cdots$, 求 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.



25. (2021 泰安二模 17) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 满足 $a_1 = b_2 = 2$, $S_5 = 30$, $b_4 + 2$ 是 b_3 与 b_5 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 从数列 $\{a_n\}$ 中去掉数列 $\{b_n\}$ 的项后余下的项按原来的顺序组成数列 $\{c_n\}$, 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_{60} .

26. (2021 潍坊四县 5 月联考 18) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = a_2 = 2$, 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n+1} + S_{n-1} = 2S_n + 1$.

(1) 求证: 当 $n \geq 2$, $a_{n+1} - a_n$ 为定值;

(2) 把数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{2^{a_n}\}$ 中的所有项从小到大排列, 组成新数列 $\{c_n\}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 100 项和 T_{100} .



27. (2021 德州二模 17) 在① $2S_n + 1 = 3^n$; ② $a_1 a_2 \cdots a_n = 3^{\frac{n^2-n}{2}}$; ③ $2S_n - 3a_n + 1 = 0$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中并作答.

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = 1$, 且满足_____, 设数列 $\{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{(n+1) \cdot \log_3 a_{n+1}}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n , 并证明 $T_n < \frac{5}{2}$.

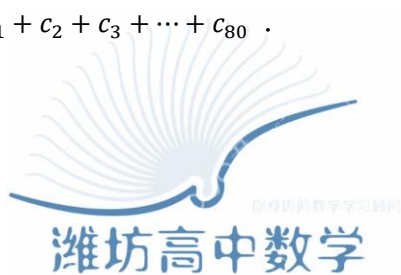
(注: 如果选择多个条件分别解答, 则按第一个解答计分)

28. (2021 聊城三模 18) 在① a_1, a_3, a_{21} 成等比数列② $S_4 = 28$, ③ $S_{n+1} = S_n + a_n + 4$, 这三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并做出解答.

已知 $\{a_n\}$ 是公差为零的等差数列, S_n 为其 n 前项和, $a_2 = 5$, _____, $\{b_n\}$ 是等比数列, $b_2 = 9$, $b_1 + b_3 = 30$, 公比 $q > 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的所有项分别构成集合 A , B , 将 $A \cup B$ 的元素按从小到大依次排列构成一个新数列 $\{c_n\}$, 求 $T_{80} = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{80}$.



29. (2021 淄博二模 17) 在① $S_5 = 50$, ② S_1 , S_2 , S_4 成等比数列, ③ $S_6 = 3(a_6 + 2)$. 这三个条件中任选两个, 补充到下面问题中, 并解答本题.

问题: 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d \neq 0)$, 前 n 项和为 S_n , 且满足_____.

(1) 求 a_n ;

(2) 若 $b_n - b_{n-1} = 2a_n (n \geq 2)$, 且 $b_1 - a_1 = 1$, 求数列 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 的前 n 项和 T_n .

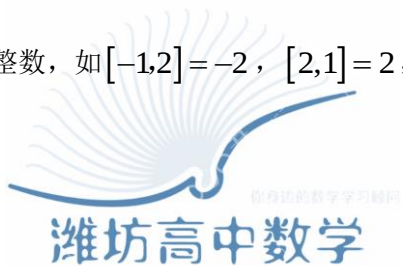
注: 如果选择多种情况分别解答, 按第一种解答计分.

30. (2021 滨州二模 18) 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$,

$$a_n = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} (n \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } n \geq 2).$$

(1) 求证: 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[-1.2] = -2$, $[2.1] = 2$, 求证: $\left[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} \right] = 1$.



31. (2021 烟台三模 17) 在① $a_3^2 = a_2 a_4 + 4$, ② $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是公差为 1 的等差数列, ③ $S_4^2 = S_2 \cdot S_8$, 这三个条件中任选一个, 补充到下面的问题中并作答.

问题: 在递增的等差数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = 1$, _____, 数列 $\{b_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 设 $c_n = a_n \cdot b_n$, T_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 求使 $T_n > 2000$ 成立的最小正整数 n 的值.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

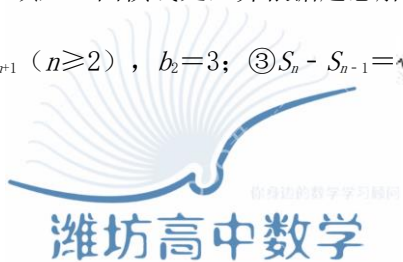
32. (2021 省实验中学二模 18) 已知 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, 前 3 项和为 13, 且 $3a_1, 5a_2, 3a_3$ 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 各项均为正数的数列 $\{b_n\}$ 的首项 $b_1 = 1$, 其前 n 项和为 S_n , 且 _____, 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = a_n b_n$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

在如下三个条件中任意选择一个, 填入上面横线处, 并根据题意解决问题.

① $b_n = 2\sqrt{S_n} - 1$; ② $2b_n = b_{n-1} + b_{n+1}$ ($n \geq 2$), $b_2 = 3$; ③ $S_n - S_{n-1} = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$ ($n \geq 2$).



33. (2021 菏泽二模 18) 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$, 前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_n a_{n+1} + 1 = 4S_n (n \in \mathbb{N}^*)$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式:

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 T_n , 求使得 $T_n < \frac{2n+1}{n^2}$ 成立的 n 的最大值.

34. (2021 日照二模 19) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -9$, 且 $\frac{a_{n+1}}{2}$ 是 2 与 $a_n (n \in \mathbb{N}^*)$ 的等差中项.

(1) 求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 G_n ;

(2) 设 $T_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$, 判断数列 $\{T_n\}$ 是否存在最大项和最小项? 若存在求出, 不存在说明理由.



35. (2021 临沂二模 19) 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 满足 $4S_n = a_{n+1}^2 - 4n - 4$,

且 $a_1 = b_1 + 1 = 2$, $a_4 = b_4$.

(1) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列;

(2) 若从数列 $\{a_n\}$ 中去掉数列 $\{b_n\}$ 的项后余下的项按原来的顺序组成数列 $\{c_n\}$, 求 $c_1 + c_1 + c_3 + \cdots + c_{100}$.

36. (2021 聊城二模 18) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 点 $(n, a_n + a_{n+1})$ 在函数 $y = kx + 1$ 图象上, 其中 k 为常数, 且 $k \neq 0$.

(1) 若 a_1, a_2, a_4 成等比数列, 求 k 的值;

(2) 当 $k = 3$ 时, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .



37. (2021 济宁二模 18) 已知数列 $\{a_n\}$ 是正项等比数列, 满足 a_3 是 $2a_1$ 、 $3a_2$ 的等差中项, $a_4 = 16$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = (-1)^n \log_2 a_{2n+1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

38. (2021 烟台适应性练习二 18) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, $a_1 > 0$, 且 a_4 是 $2a_2$ 和 $a_5 - 2$ 的等比中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} = 2^{n+1}$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .



39. (2021 日照三模 19) 定义: 若无穷数列 $\{c_n\}$ 满足 $\{c_{n+1} - c_n\}$ 是公比为 k 的等比数列, 则称数列 $\{c_n\}$ 为 “ $V(k)$ 数列”.

(1) 若 $\{b_n\}$ 是 $V(k)$ 数列, $b_1=10$, $b_2=8$, $b_3=6$, 求数列 $\{b_n\}$ 前 11 项和 S_{11} .

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 是 $V(2)$ 数列, $a_1=1$, $a_2=3$, 是否存在正整数 m, n , 使得 $\frac{199}{99} < \frac{a_m}{a_n} < \frac{99}{49}$ 成立, 若存在求出所有的正整数 m, n , 不存在说明理由.

40. (2021 青岛二模 19) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 - a_1=8$, 且 $a_2 - 1$ 是 a_1 和 a_3+1 的等比中项, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $b_1=3$, $2S_n=b_{n+1} - 3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 将数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中的公共项按从小到大的顺序依次排成一个新的数列 $\{c_k\}$, $k \in \mathbf{N}^*$, 令 $d_k = \log_3 c_k$, 求数列 $\{\frac{1}{d_k d_{k+1}}\}$ 的前 k 项和 T_k .



41. (2021 青岛三模 22) 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 对于任意 $n \in \mathbb{N}^+$, 只有有限个正整数 m 使得 $a_m < n$ 成立, 则记这样的 m 的个数为 $(a_n)^+$.

(1) 求数列 $\{(\sqrt{n-1})^+\}$ 的通项公式;

(2) 在等比数列 $\{b_n\}$ 中, b_{n+1} 是函数 $f_n(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}[eb_n + (\sqrt{n-1})^+]x^2 + eb_n \cdot (\sqrt{n-1})^+ \cdot x$ 的极小值点, 求 b_1 的取值范围;

(3) 求数列 $\{((n^2)^+)^+\}$ 的通项公式.

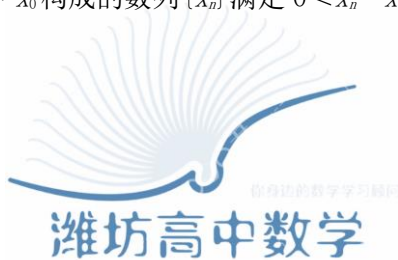
42. (2021 潍坊二模 22) 设 $a_n = x^n$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, S_n 为数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和, 令 $f_n(x) = S_n - 1$, 其中 $x \in \mathbb{R}$,

$n \in \mathbb{N}^+$.

(1) 当 $x=2$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 中是否存在三项, 使其成等差数列? 并说明理由;

(2) 证明: 对 $\forall n \in \mathbb{N}^+$, 关于 x 的方程 $f_n(x) = 0$ 在 $x \in [\frac{2}{3}, 1]$ 上有且仅有一个根 x_n ;

(3) 证明: 对 $\forall p \in \mathbb{N}^+$, 由 (2) 中 x_0 构成的数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_n - x_{n+p} < \frac{1}{n}$.



43. (2021 淄博三模 22) 若存在常数 $m \in \mathbf{R}$, 使得对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_{n+1} \geq ma_n$, 则称数列 $\{a_n\}$ 为 $Z(m)$ 数列.

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 其前 n 项和为 S_n , 若 S_n 为 $Z(1)$ 数列, 求 a_1 的取值范围;

(2) 已知数列 $\{b_n\}$ 的各项均为正数, 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 R_n , 数列 $\{b_n^2\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $3T_n = R_n^2 + 4R_n$,

$n \in \mathbf{N}^*$, 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = b_n + \frac{1}{b_n}$, 且 $\{c_n\}$ 为 $Z(m)$ 数列, 求 m 的最大值;

(3) 已知正项数列 $\{d_n\}$ 满足: $d_n \leq d_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 且数列 $\{d_{2k-1}d_{2k+1}\}$ 为 $Z(r)$ 数列, 数列 $\{\frac{1}{d_{2k}d_{2k+2}}\}$ 为 Z

(s) 数列, 若 $\frac{d_2}{d_1} = rs$, 求证: 数列 $\{d_n\}$ 中必存在无穷多项可以组成等比数列.



专题六 数列

一、单项选择题

1. 【答案】 D

【解析】因为 $2S_3 = a_2 + a_3 + a_4$ ，所以 $2(a_1 + a_2 + a_3) = a_2 + a_3 + a_4$ ，

即 $2a_1 + a_2 + a_3 = a_4$ ，

因为 $a_1 \neq 0$ ，所以 $2 + q + q^2 = q^3$ ，

即 $(q-2)(q^2+q+1)=0$ ，

因为 $q^2+q+1 \neq 0$ ，所以 $q=2$ 。

故答案为：D

2. 【答案】 A

【解析】由题意 $2a_{2021} = a_{2019} + a_{2020}$ ，

设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q>0$)，

$$\therefore 2a_{2020} \cdot q = \frac{a_{2020}}{q} + a_{2020},$$

$$\because a_{2020} \neq 0, \therefore 2q^2 - q - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } q = -\frac{1}{2} \text{ (舍去)}, \text{ 或 } q = 1.$$

故选：A.

3. 【答案】 C

【解析】 $\because S_n$ 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $\begin{vmatrix} 1 & (10 - a_7) \\ 1 & a_9 \end{vmatrix} = 0$,

$$\therefore a_9 - (10 - a_7) = 0, \text{ 解得 } a_9 + a_7 = 10,$$

$$\therefore S_{15} = \frac{15}{2} (a_1 + a_{15}) = \frac{15}{2} (a_9 + a_7) = \frac{15}{2} \times 10 = 75.$$

故选：C.

4. 【答案】 B

【解析】设等差数列共有 $(2n+1)$ 项，

$$\text{由题意得 } S_{\text{奇}} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}, \quad S_{\text{偶}} = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n},$$

$$\text{故 } S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_1 + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{2n+1} - a_{2n}),$$

$$= a_1 + d + \cdots + d = a_1 + nd = a_{n+1} = 319 - 290 = 29.$$

故中间项 a_{n+1} 为 29.

故选: B.

5. 【答案】C

【解析】解: 由数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n + b_n = 1$, $b_{n+1} = \frac{b_n}{1-a_n^2}$,

可得 $b_n = 1 - a_n$ ①, $b_{n+1} = \frac{b_n}{1-a_n^2} = \frac{b_n}{(1-a_n)(1+a_n)} = \frac{b_n}{b_n(1+a_n)} = \frac{1}{2-b_n}$,

则 $b_{n+1} = \frac{1}{2-b_n}$, 两边同时减去 1,

得 $b_{n+1} - 1 = \frac{1}{2-b_n} - 1 = \frac{b_n-1}{2-b_n}$,

则 $\frac{1}{b_{n+1}-1} - \frac{1}{b_n-1} = -1$,

$\therefore \frac{1}{b_1-1} = \frac{1}{-a_1} = -2$,

$\therefore \{\frac{1}{b_n-1}\}$ 是以 -2 为首项, -1 为公差的等差数列.

$\therefore b_n = \frac{n}{n+1}$,

故 $b_{2021} = \frac{2021}{2022}$.

故选: C.

6. 【答案】C

【解析】解: 由第 1 项 $1=1 \times 1$, 第 2 项 $6=2 \times 3$,

第 3 项 $15=3 \times 5$, 第 4 项 $28=4 \times 7$, ...,

归纳得, 第 n 项为 $n(2n-1)$,

$\therefore$ 第 10 项为 $10 \times (20-1) = 190$,

故选: C.

7. 【答案】D

【解析】由题意可得 $f(1)=1$, $f(2)=1$, $f(3)=2$, $f(4)=2$, $f(5)=2$, $f(6)=2$, $f(7)=3$, $f(8)=3$, $f(9)=3$, $f(10)=3$, $f(11)=3$, $f(12)=3$,

..., 可得依次为 2 个 1, 4 个 2, 6 个 3, 8 个 4, 10 个 5, ...,

因此 $a_1+a_2=2 \times 1=2$, $a_3+a_4+a_5+a_6=4 \times \frac{1}{2}=2$, $a_7+a_8+\dots+a_{12}=6 \times \frac{1}{3}=2$, $a_{13}+a_{14}+\dots+a_{20}=8 \times \frac{1}{4}=2$, ...,

由 $20=10 \times 2$, 可得 $m=2+4+6+8+\dots+20=\frac{1}{2} \times 10 \times (2+20)=110$.

故选: D.

二、多项选择题

8. 【答案】ABC

【解析】 $a_1=1$, $a_n \cdot a_{n+1}=2^n$,

$\therefore a_2 \cdot a_1=2$, 即 $a_2=2$,

$\therefore a_n \cdot a_{n+1}=2^n$,

$\therefore a_{n+1} \cdot a_{n+2}=2^{n+1}$,

$$\therefore \frac{a_{n+2}}{a_n}=2,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的奇数列和偶数列, 分别是以 2 为公比的等比数列,

$\therefore a_{2n}=2 \times 2^{n-1}=2^n$, $a_{2n-1}=1 \times 2^{n-1}=2^{n-1}$,

$\therefore a_4=4$, 故 AB 正确;

$\therefore a_{2n} - a_{2n-1}=2^n - 2^{n-1}=2^{n-1}$, 故 C 正确;

$\therefore a_{2n} + a_{2n-1}=2^n + 2^{n-1}=3 \times 2^{n-1}$, 故 D 不正确.

故选: ABC.

9. 【答案】ABD

【解析】数表中, 每行是等差数列, 且第一行的首项是 1, 公差为 2, 第二行的首项是 4, 公差为 4, 第三行的首项是 12, 公差为 8, 每行的第一个数满足数列 $a_n = n \times 2^{n-1}$, 每行的公差构成一个以 2 为首项, 公比为 2 的等比数列, 公差满足数列 $d_n = 2^n$.

对于选项 A: 由题可知, 每行第一个数满足下列关系: $a_n = n \times 2^{n-1}$, 所以第 6 行第 1 个数为

$$a_6 = 6 \times 2^{6-1} = 192, \text{ 故 A 正确;}$$

对于选项 B: 每行的公差构成一个以 2 为首项, 公比为 2 的等比数列, 故第 10 行的数从左到右构成公差为 2^{10} 的等差数列, 选项 B 正确;

对于选项 C: 第 10 行的第一个数为 $a_{10} = 10 \times 2^{10-1} = 10 \times 2^9$, 公差为 2^{10} , 所以前 10 个数的和为:

$$10 \times 10 \times 2^9 + \frac{10 \times 9}{2} \times 2^{10} = 190 \times 2^9, \text{ 故 C 错误;}$$

对于选项 D: 数表中第 2021 行中第一个数为 $a_{2021} = 2021 \times 2^{2021-1} = 2021 \times 2^{2020}$, 第 2021 行的公差为 2^{2021} , 故数表中第 2021 行第 2021 个数为 $2021 \times 2^{2020} + (2021-1) \times 2^{2021} = 6061 \times 2^{2020}$, 选项 D 正确.

故选: ABD.

10. 【答案】 ABD

【解析】解: 设丢失的这个数据为 a , 由题意可得, 众数为 2, 平均数为 $\frac{25+a}{7}$,

①当 $a \leq 2$ 时, 这列数 $a, 2, 2, 2, 4, 5, 10$, 则中位数为 2,

所以 $\frac{25+a}{7}, 2, 2$ 成等差数列, 则 $\frac{25+a}{7} = 2$, 解得 $a = -11 < 2$, 符合题意;

②当 $2 < a < 4$ 时, 这列数 $2, 2, 2, a, 4, 5, 10$, 则中位数为 a ,

所以 $\frac{25+a}{7}, a, 2$ 成等差数列, 则 $2a = \frac{25+a}{7} + 2$, 解得 $a = 3$, 符合题意;

③当 $a \geq 4$ 时, 这列数为 $2, 2, 2, 4, a, 5, 10$, 则中位数为 4,

所以 $\frac{25+a}{7}, 4, 2$ 成等差数列, 则有 $2 \times 4 = \frac{25+a}{7} + 2$, 解得 $a = 17$, 符合题意.

故选: ABD.

11. 【答案】 ABD

【解析】 $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $a_n + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2(a_{n-1} + a_{n-2})$ ($n \geq 3$),

因为 $a_1 = a_2 = 1$, 所以 $a_3 = a_1 + 2a_2 = 3$,

$a_3 + a_2 = 4 = 2(a_2 + a_1)$,

所以数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列,

所以 $a_n + a_{n+1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, 故选项 A 正确;

$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$,

$a_n - 2a_{n-1} = 2a_{n-2} - a_{n-1} = -(a_{n-1} - 2a_{n-2})$,

$a_3 - 2a_2 = 3 - 2 = 1$, $a_2 - 2a_1 = 1 - 2 = -1$,

所以 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是首项为 -1, 公比为 -1 的等比数列,

$a_{n+1} - 2a_n = -1 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n$, 故选项 B 正确;

$\begin{cases} a_{n+1} + a_n = 2^n \\ a_{n+1} - 2a_n = (-1)^n \end{cases}$, 所以 $a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$, 故选项 C 错误;

$S_{20} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$$= \frac{2 - (-1)}{3} + \frac{2^2 - (-1)^2}{3} + \dots + \frac{2^{20} - (-1)^{20}}{3}$$

$$= \frac{(2 + 2^2 + \dots + 2^{20}) - [(-1) + (-1)^2 + \dots + (-1)^{20}]}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \times \left[\frac{2(1 - 2^{20})}{1 - 2} - \frac{(-1) \times [1 - (-1)^{20}]}{1 - (-1)} \right]$$

$$= \frac{2}{3} (2^{20} - 1) = \frac{2}{3} (4^{10} - 1), \text{ 故选项 D 正确.}$$

故选: ABD.

12. 【答案】 ABD

【解析】由 $a_1=3+3$, $a_2=3+3+9$, $a_3=3+3+9+27$, $a_4=3+3+9+27+81$,

$$, \dots, a_n=3+3^1+3^2+3^3+\dots+3^n=3+\frac{3(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^{n+1}+3}{2},$$

由 a_1 有 3 项, a_2 有 5 项, a_3 有 9 项, a_4 有 17 项, $\dots$,

故 a_n 有 2^n+1 项. 故 C 错误;

所以 $k+2=2^n+1$, 即 $k+1=2^n$, 故 A 正确;

$$\text{由 } a_n=\frac{3^{n+1}+3}{2}, \text{ 可得 } a_{n+1}=\frac{3^{n+2}+3}{2}=3a_n-3, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\begin{aligned} \text{由 } S_n=a_1+a_2+\dots+a_n &= \frac{1}{2} (3^2+3^3+3^4+\dots+3^{n+1}) + \frac{3n}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{9(1-3^n)}{1-3} + \frac{3n}{2} = \frac{3}{4} (3^{n+1}+2n-3), \text{ 故 D 正确.} \end{aligned}$$

故选: ABD.

13. 【答案】 B, C

【解析】由题意, 记 $\langle x \rangle$ 表示与实数 x 最接近的整数, 且 $k = \langle \sqrt{n} \rangle$,

当 $n=1$ 时, 可得 $\sqrt{n}=1, \langle \sqrt{n} \rangle=1$, 所以 A 不正确;

$$\text{由 } |\sqrt{n} - \langle \sqrt{n} \rangle| < \frac{1}{2}, \text{ 即 } |\sqrt{n} - k| < \frac{1}{2}, \text{ 可得 } -\frac{1}{2} < \sqrt{n} - k < \frac{1}{2},$$

可得 $\sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$ 成立, 所以 B 符合题意;

$$\text{由 } -\frac{1}{2} < \sqrt{n} - k < \frac{1}{2}, \text{ 可得 } k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}, \text{ 平方可得 } k^2 - k + \frac{1}{4} < n < k^2 + k + \frac{1}{4},$$

因为 $n \in \mathbb{N}^*$, 且 $k^2 - k + \frac{1}{4}$ 不是整数,

其中 $k^2 - k + 1$ 是 $k^2 - k + \frac{1}{4}$ 右侧的最接近的整数,

所以 $n \geq k^2 - k + 1$ 成立, 所以 C 符合题意;

当 $n=1, 2$ 时, $\langle \sqrt{n} \rangle=1$, 此时 $a_1=a_2=1$;

当 $n=3, 4, 5, 6$ 时, $\langle \sqrt{n} \rangle=2$, 此时 $a_3=a_4=a_5=a_6=\frac{1}{2}$;

当 $n=7, 8, 9, 10, 11, 12$ 时, $\langle \sqrt{n} \rangle=3$, 此时 $a_7=a_8=\dots=a_{12}=\frac{1}{3}$;

当 $n=13, 14, \dots, 20$ 时, $\langle \sqrt{n} \rangle=4$, 此时 $a_{13}=a_{14}=\dots=a_{20}=\frac{1}{4}$;

.....

归纳可得数列 $\{a_n\}$ 中, 有 2 个 1, 4 个 $\frac{1}{2}$, 6 个 $\frac{1}{3}$, 8 个 $\frac{1}{4}$,

又由 2, 4, 6, 8, ... 构成首项为 2, 公差为 2 的等差数列, 可得 $S_n = \frac{n(2+2n)}{2} = n(n+1)$,

令 $n(n+1) \leq 2021, n \in \mathbb{N}^*$, 解得 $n = 44$,

所以 $S_{2021} = 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{3} \times 6 + \cdots + \frac{1}{22} \times 44 + \frac{1}{23} \times 41 = 88 + \frac{41}{23}$, 所以 D 不正确.

故答案为: BC.

三、填空题

14. 【答案】1 或 $-\frac{1}{2}$

15. 【答案】1348

【解析】由斐波那契数列的特点知: 从第一项起, 每 3 个数中前两个为奇数后一个偶数,

$\therefore \frac{2021}{3}$ 的整数部分为 673, 余数为 2,

$\therefore$ 该数列的前 2021 项中共有 673 个偶数, 奇数的个数为 $2021 - 673 = 1348$.

故答案为: 1348

16. 【答案】-999

【解析】由题知, $S_n - S_{n-1} = -n^2$, 则 $S_{n-1} + S_n = -(n+1)^2$.

两式作差得:

$$a_{n+1} + a_n = (-n+1)^2 - (-n^2) = -2n-1.$$

整理得 $a_{n+1} + (n+1) = -(a_n + n)$.

所以 $\{a_n + n\}$ 是以 $a_1 + 1 = 1022$ 为首项, -1 为公比的等比数列.

$\therefore a_{2021} + 2021 = 1022 \times (-1)^{2020} = 1022$. 则 $a_{2021} = -999$,

故答案为: -999.

17. 【答案】-1

【解析】解: $\because 2S_n - na_n = n (n \in \mathbb{N}^*)$,

$$\therefore S_n = \frac{n(a_n + 1)}{2},$$

$$\therefore S_1 = a_1 = \frac{a_1 + 1}{2}, \text{ 解得 } a_1 = 1,$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n), \therefore \{a_n\} \text{ 是等差数列},$$

$$\because S_{20} = -360, \therefore S_{20} = \frac{20(1 + a_{20})}{2} = -360,$$

$$\text{解得 } a_{20} + 1 = -36, \text{ 即 } a_{20} = -37,$$

$$\therefore 19d = a_{20} - a_1 = -38, \text{ 解得 } d = -2,$$

$$\therefore a_2 = a_1 + d = 1 - 2 = -1.$$

故答案为: -1.

18. 【答案】1 或 8 或 10 或 64 (只需填一个)

【解析】若 $a_1 = 1$, 则 $a_6 = 2$, $a_5 = 4$, $a_4 = 8$ 或 1,

①当 $a_4 = 8$ 时, $a_3 = 16$, $a_2 = 32$ 或 5,

若 $a_2 = 32$, 则 $a_1 = 64$; 若 $a_2 = 5$, 则 $a_1 = 10$,

②若 $a_4 = 1$ 时, $a_3 = 2$, $a_2 = 4$, $a_1 = 8$ 或 1,

综上所述, m 的值为 1 或 8 或 10 或 64,

故答案为: 1 或 8 或 10 或 64 (只需填一个).

19. 【答案】83

$$\text{【解析】} \because a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ 为偶数} \\ 3a_n + 1, & a_n \text{ 为奇数} \end{cases},$$

$\therefore$ 当 $a_6 = 2$ 时, 则 $a_5 = 4$,

①当 $a_5 = 4$ 时, $a_4 = 1$ 或 $a_4 = 8$,

②若 $a_4 = 1$ 时, 则 $a_3 = 2$, 若 $a_4 = 8$ 时, $a_3 = 16$,

③若 $a_3 = 2$ 时, 则 $a_2 = 4$, 若 $a_3 = 16$ 时, $a_2 = 32$ 或 $a_2 = 5$,

④若 $a_2 = 4$ 时, 则 $a_1 = 8$ 或 $a_1 = 1$, 若 $a_2 = 32$ 时, 则 $a_1 = 64$, 若 $a_2 = 5$ 时, 则 $a_1 = 10$,

$\therefore m$ 的值为 1 或 8 或 10 或 64,

$\therefore m$ 的所有取值之和为 $1 + 8 + 10 + 64 = 83$.

故答案为: 83.

20. 【答案】2026

【解析】由题， $S_n = \log_2 \left(\frac{1+2}{1+1} \right) + \log_2 \left(\frac{2+2}{2+1} \right) + \cdots + \log_2 \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$

$$= \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \cdots + \log_2 \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$$

$$= \log_2 \frac{n+2}{2} = \log_2 (n+2) - \log_2 2 = \log_2 (n+2) - 1.$$

所以， $S_k = \log_2 (k+2) - 1.$

因为 S_k 为正整数，所以 $\log_2 (k+2) - 1 > 0$ ，即 $k+2 > 2 \Rightarrow k > 0.$

令 $m = \log_2 (k+2)$ ，则 $k = 2^m - 2.$

因为 $k \in [1, 2021]$ ，所以 $2^m \in [3, 2023].$

因为 $y = 2^x$ 为增函数，且 $2^1 = 2, 2^2 = 4, \cdots, 2^{10} = 1024, 2^{11} = 2048$

所以 $m \in [2, 10].$

所以所有“好数”的和为 $2^2 - 2 + 2^3 - 2 + \cdots + 2^{10} - 2 = \frac{2^2 - 2^{10} \times 2}{1 - 2} - 2 \times 9 = 2026.$

故答案为：2026.

四、解答题

21. 【解析】(1) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $a_2 = 4$ ， $S_5 = 30$ ，

设首项为 a_1 ，公差为 d ，

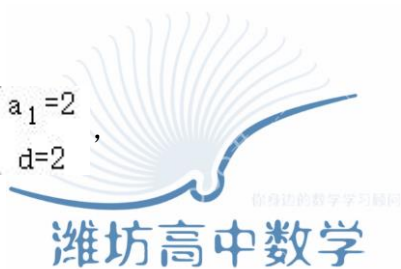
所以 $\begin{cases} a_1 + d = 4 \\ 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = 30 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 2 \end{cases}$ ，

故 $a_n = 2n$ ；

(2) 由于 $b_n = \frac{2}{a_n^2 - 1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$ ，

所以 $T_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}.$

22. 【解析】(1) 由题意得： $a_1 = 2$ ， $a_2 = 4$ ， $a_3 = 8$ ，



$\therefore$ 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = \frac{4}{2} = 2$, $\therefore a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.

又 $b_n = 2 \log_2 a_n = 2 \log_2 2^n = 2n$, $\therefore b_n = 2n$.

$$(2) \text{ 由 (1) 知: } \frac{1}{b_n^2 - 1} = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\because n \in \mathbb{N}^*, \therefore \frac{1}{2n+1} > 0, \therefore 1 - \frac{1}{2n+1} < 1, \therefore T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) < \frac{1}{2}.$$

23. 【解析】(1) 证明: 由 $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, 得 $b_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n) = 2b_n$,

又 $b_1 = a_1 + a_2 = 2 \neq 0$, 所以 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列,

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } T_n = \frac{2 - 2^n \times 2}{1 - 2} = 2(2^n - 1),$$

$$\text{于是 } \frac{b_{n+1}}{T_n \cdot T_{n+1}} = \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n \cdot T_{n+1}} = \frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right),$$

$$\begin{aligned} & \frac{b_2}{T_1 \cdot T_2} + \frac{b_3}{T_2 \cdot T_3} + \cdots + \frac{b_{n+1}}{T_n \cdot T_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2^1 - 1} - \frac{1}{2^2 - 1} \right) + \left(\frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{2^3 - 1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right). \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \frac{1}{2^{n+1} - 1} > 0, \text{ 所以 } \frac{b_2}{T_1 \cdot T_2} + \frac{b_3}{T_2 \cdot T_3} + \cdots + \frac{b_{n+1}}{T_n \cdot T_{n+1}} < \frac{1}{2}.$$

24. 【解析】解: (1) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = 1$, $2S_n = na_{n+1}$, ①

当 $n=1$ 时, 解得 $a_2 = 2$,

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = (n-1)a_n$, ②

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得: } \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n},$$

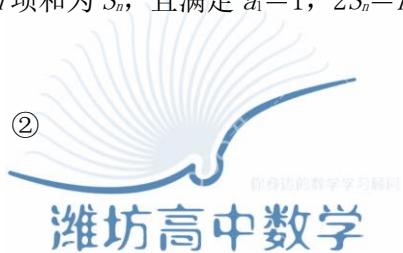
$$\text{故 } \frac{a_n}{n} = \frac{a_2}{2} = 1,$$

所以 $a_n = n$ (首项符合通项),

故 $a_n = n$.

(2) 由于 $b_n b_{n+1} = 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$,

所以 $b_{n+1} b_{n+2} = 2^{n+1}$,



所以 $\frac{b_{n+2}}{b_n} = 2$ (常数),

由于 $b_1=1$, 所以 $b_2=2$,

所以数列 $\{b_n\}$ 的偶数项为以 2 为首项, 2 为公比的等比数列;

所以构造新数列 $\{c_n\}$: $a_1, b_2, a_3, b_4, a_5, b_6, \dots$,

$\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项的和:

$$T_{2n} = (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) + (b_2 + b_4 + \dots + b_{2n}) = \frac{n(1+2n-1)}{2} + \frac{2 \times (2^n - 1)}{2-1} = 2^{n+1} + n^2 - 2.$$

25. 【解析】解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

由 $a_1=b_2=2$, $S_5=30$, b_4+2 是 b_3 与 b_5 的等差中项,

可得 $b_1q=2$, $5 \times 2 + 10d=30$, $2(b_4+2) = b_3+b_5$, 即 $2(b_1q^3+2) = b_1q^2+b_1q^4$, 解得 $d=2$, $b_1=1$, $q=2$,

则 $a_n=2+2(n-1)=2n$; $b_n=2^{n-1}$;

(2) $a_{60}=120$, 所以数列 $\{a_n\}$ 前 60 项中与数列 $\{b_n\}$ 的公共项共有 6 项, 且最大公共项为 $b_7=2^6=64$,

又 $a_{66}=132$, $b_8=2^7=128$,

$$\text{所以 } T_{60} = S_{67} - (2+2^2+\dots+2^7) = 134 + \frac{1}{2} \times 67 \times 66 \times 2 - \frac{2(1-2^7)}{1-2}$$

$$= 4556 - 254 = 4302.$$

26. 【解析】证明: (1) 当 $n=2$ 时, $S_3+S_1=2S_2+1$,

即 $a_1+a_2+a_3+a_1=2(a_1+a_2)+1$, 得 $a_3=3$,

当 $n \geq 2$ 时, 因为 $S_{n+1}+S_{n-1}=2S_n+1$, 所以 $S_{n+2}+S_n=2S_{n+1}+1$,

两式相减得 $a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$,

所以 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$,

所以 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 a_3-a_2 为首项, 以 1 为公比的等比数列;

$$a_3-a_2=1,$$

所以 $a_{n+1}-a_n=1$,

$$\text{所以 } a_n = \begin{cases} 2, & n=1, \\ n, & n \geq 2. \end{cases}$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ 前 100 项为 2, 2, 3, 4, 5, $\dots$, 100,

数列 $\{2^{a_n}\}$ 为 $2^2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^n$,

所以数列 $\{c_n\}$ 前 100 项含有数列 $\{2^{a_n}\}$ 的项为 $2^2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$ 共六项,



$$\text{所以 } T_n = 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 94 = 128 + 2 + \frac{(2+94) \times 93}{2} = 4594.$$

27. 【解析】解：选①： $\because 2S_n + 1 = 3^n$ ，当 $n \geq 2$ 时， $2S_{n-1} + 1 = 3^{n-1}$ ，

$$\text{两式相减得 } 2a_n = 2 \cdot 3^{n-1}, \therefore a_n = 3^{n-1} (n \geq 2),$$

又 $\because a_1 = 1$ 满足上式，

$$\text{故 } a_n = 3^{n-1},$$

$$\text{令 } b_n = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{(n+1)\log_3 a_{n+1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{(n+1)\log_3 3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\therefore T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

$$\text{因为 } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} > 0, \frac{1}{n+1} > 0, \text{ 所以 } T_n < \frac{5}{2}.$$

$$\text{选②: } \because a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n = 3^{\frac{n^2-n}{2}}, \therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_1 a_2 \cdots a_{n-1} = 3^{\frac{(n-1)^2 - (n-1)}{2}}, \text{ 两式相除得 } a_n = 3^{\frac{n^2-n}{2} - \frac{(n-1)^2 - (n-1)}{2}} = 3^{n-1} (n \geq 2),$$

当 $n = 1$ 时， $a_1 = 1$ 满足上式，故 $a_n = 3^{n-1}$ ，以下同选①。

$$\text{选③: } \because 2S_n - 3a_n + 1 = 0, \therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 2S_{n-1} - 3a_{n-1} + 1 = 0,$$

$$\text{两式相减得 } 2a_n - 3a_n + 3a_{n-1} = 0,$$

$$\text{所以 } a_n = 3a_{n-1}, \text{ 又 } a_1 = 1, \text{ 所以 } a_n \neq 0,$$

$$\text{所以 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = 3, \text{ 即 } \{a_n\} \text{ 是以 } 1 \text{ 为首项, } 3 \text{ 为公比的等比数列, 故 } a_n = 3^{n-1}, \text{ 以下同选①.}$$

28. 【解析】(1) 解：选①， $\because \{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，设公差为 d ，

$$\text{由 } a_1, a_3, a_{21} \text{ 成等比数列, 可得 } (a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 20d), \text{ 又 } d \neq 0,$$

$$\therefore 4a_1 = d, \text{ 又 } a_2 = 5, \text{ 即 } a_1 + d = 5, \text{ 解得 } a_1 = 1, d = 4,$$

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3.$$

$$\text{选②, 由 } S_4 = 28, a_2 = 5, \text{ 有 } 4a_1 + 6d = 28, a_1 + d = 5, \text{ 可得 } a_1 = 1, d = 4,$$

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3. \quad \text{潍坊高中数学}$$

$$\text{选③, 由 } S_{n+1} = S_n + a_n + 4, \text{ 可得 } a_{n+1} - a_n = d = 4, \text{ 又 } a_2 = 5, \text{ 即 } a_1 + d = 5,$$

$$\therefore a_1 = 1, \text{ 故 } a_n = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3.$$

$$\because \{b_n\} \text{ 是等比数列, 由 } b_2 = 9, b_1 + b_3 = 30, q > 1,$$

$$\therefore b_1 q = 9, b_1 + b_1 q^2 = 30, \text{ 解得 } q = 3, b_1 = 3, \text{ 即 } b_n = 3^n$$

$$(2) \text{ 解: } a_{80} = 317, 3^5 = 243 < 317 < 3^6 = 729,$$

$\therefore \{c_n\}$ 的前 80 项中, 数列 $\{b_n\}$ 的项最多有 5 项, 其中 $b_2 = 9 = a_3$, $b_4 = 81 = a_{21}$ 为公共项, 又 $a_{77} = 305 > 243 = b_5$,

$\therefore \{c_n\}$ 的前 80 项是由 $\{a_n\}$ 的前 77 项及 b_1 , b_3 , b_5 构成.

$$T_{20} = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{80} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{77} + b_1 + b_3 + b_5 = 11781 + 3 + 27 + 243 = 12054$$

29. 【解析】 (1) 解: 选择条件①②

由 $S_5 = 50$, 得 $5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = 5(a_1 + 2d) = 50$, 即 $a_1 + 2d = 10$,

由 S_1 , S_2 , S_4 成等比数列, 得 $S_2^2 = S_1 S_4$,

即 $4a_1^2 + 4a_1 d + d^2 = 4a_1^2 + 6a_1 d$, 即 $d = 2a_1$,

解得 $a_1 = 2$, $d = 4$, 因此 $a_n = 4n - 2$.

选择条件①③

由 $S_5 = 50$, 得 $5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = 5(a_1 + 2d) = 50$, 即 $a_1 + 2d = 10$;

由 $S_6 = 3(a_6 + 2)$, 得 $\frac{6(a_1 + a_6)}{2} = 3a_1 + 3a_6 = 3a_6 + 6$, 即 $a_1 = 2$;

解得 $d = 4$, 因此 $a_n = 4n - 2$.

选择条件②③

由 S_1 , S_2 , S_4 成等比数列, 得 $S_2^2 = S_1 S_4$, $4a_1^2 + 4a_1 d + d^2 = 4a_1^2 + 6a_1 d$,

即 $d = 2a_1$,

由 $S_6 = 3(a_6 + 2)$, 得 $\frac{6(a_1 + a_6)}{2} = 3a_1 + 3a_6 = 3a_6 + 6$, 即 $a_1 = 2$,

解得 $d = 4$, 因此 $a_n = 4n - 2$.

(2) 解: 由 $a_1 = 2$, $a_n = 4n - 2$ 可得

$b_1 = 3$, $b_n - b_{n-1} = 2a_n = 8n - 4$,

当 $n \geq 2$ 时, $(b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \cdots + (b_2 - b_1)$

$$= (8n - 4) + (8n - 12) + \cdots + 12 = \frac{[(8n - 4) + 12](n - 1)}{2} = 4n^2 - 4,$$

即 $b_n - b_1 = 4n^2 - 4$, 则 $b_n = 4n^2 - 1$,

当 $n = 1$ 时, $b_1 = 3$, 符合 $b_n = 4n^2 - 1$,

所以当 $n \in N^*$ 时, $b_n = 4n^2 - 1$,

$$\text{则 } \frac{1}{b_n} = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right),$$

$$\text{因此 } T_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n + 1} \right) = \frac{n}{2n + 1}.$$

30. 【解析】(1) 因为 $a_n = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$,

所以当 $n \geq 2$ 时, $S_n - S_{n-1} = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$.

所以 $(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}) = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$.

又因为 $a_n > 0$, 所以 $\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} > 0$.

所以 $\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = 1 (n \geq 2)$.

所以数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是以 $\sqrt{S_1} = \sqrt{a_1} = 1$ 为首项, 公差为 1 的等差数列.

所以 $\sqrt{S_n} = 1 + (n-1) \times 1 = n$, 所以 $S_n = n^2$.

所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} = n + n - 1 = 2n - 1$.

又因为 $a_1 = 1$ 满足上式,

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$.

另解:

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$,

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 1$, 满足上式,

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$.

$$(2) \frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4n^2 - 4n + 1}.$$

当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{a_n^2} < \frac{1}{4n^2 - 4n} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$,

故 $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} < 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) < 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$,

当 $n = 1$ 时, $\frac{1}{a_1^2} = 1 < \frac{5}{4}$,

所以对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} < \frac{5}{4}$.

$$\text{又 } \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} \geq \frac{1}{a_1^2} = 1.$$

$$\text{所以 } 1 \leq \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} < \frac{5}{4}.$$

$$\text{所以 } \left[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} \right] = 1.$$

31. 【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d > 0$,

若选条件①:

$$\because a_3^2 = a_2 a_4 + 4, \therefore (1+2d)^2 = (1+d)(1+3d) + 4, \text{ 解得 } d = \pm 2 \text{ (舍负)},$$

$$\text{故 } a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1;$$

若选条件②:

$$\because \left\{ \frac{S_n}{n} \right\} \text{ 是公差为 } 1 \text{ 的等差数列}, \therefore \frac{S_n}{n} = \frac{S_1}{1} + (n-1) \times 1 = n, \text{ 则 } S_n = n^2,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = 2n-1, \text{ 满足 } a_1 = 1,$$

$$\therefore a_n = 2n-1;$$

若选条件③:

$$\because S_4^2 = S_2 \cdot S_8, \therefore (4+6d)^2 = (2+d)(8+28d), \text{ 解得 } d = 0 \text{ (舍去) 或 } d = 2,$$

$$\text{故 } a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1.$$

$$\text{由已知可得 } b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n, \text{ 则 } c_n = a_n b_n = (2n-1) \cdot 2^n,$$

$$\text{则 } T_n = 1 \times 2 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \cdots + (2n-1) \times 2^n,$$

$$2T_n = 1 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 5 \times 2^4 + \cdots + (2n-1) \times 2^{n+1},$$

$$\text{两式相减可得 } -T_n = 2 + 2(2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - (2n-1) \times 2^{n+1}$$

$$= \frac{2(1-2^{n+1})}{1-2} - 4 - (2n-1)2^{n+1} = (3-2n)2^{n+1} - 6,$$

$$\text{所以 } T_n = (2n-3) \times 2^{n+1} + 6,$$

$$T_n - T_{n-1} = (2n-3) \times 2^{n+1} + 6 - (2n-5) \times 2^n - 6 = (2n-1) \times 2^n,$$

显然, 当 $n \geq 2$ 时, $T_n - T_{n-1} > 0$, 即 $T_n > T_{n-1}$,

$$\text{又 } T_6 = 9 \times 2^7 + 6 = 1158, T_7 = 11 \times 2^8 + 6 = 2822,$$

所以最小正整数 n 的值为 7.

32. 【解析】(1) 数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, 前 3 项和为 13, 且 $3a_1, 5a_2, 3a_3$ 成等差数列.

$$\text{所以 } \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 13 \\ 10a_2 = 3a_1 + 3a_3 \end{cases},$$

$$\text{整理得 } \begin{cases} a_1 + a_3 = 10 \\ a_2 = 3 \end{cases}, \text{ 所以 } \frac{3}{q} + 3q = 10,$$

$$\text{解得 } q = 3 \text{ 或 } \frac{1}{3},$$

由于 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列,

所以 $q = 3$.

$$\text{故 } a_n = 3^{n-1}.$$

$$(2) \text{ 选条件①时, } b_n = 2\sqrt{S_n} - 1;$$

$$\text{整理得 } 4S_n = b_n^2 + 2b_n + 1 \text{①},$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 4S_{n-1} = b_{n-1}^2 + 2b_{n-1} + 1 \text{②},$$

所以两式相减得: $b_n - b_{n-1} = 2$ (常数),

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列,

$$\text{故 } b_n = 2n - 1,$$

$$\text{所以 } c_n = a_n b_n = (2n-1) \cdot 3^{n-1},$$

$$\text{则 } T_n = 1 \times 3^0 + 3 \times 3^1 + \dots + (2n-1) \cdot 3^{n-1} \text{③},$$

$$3T_n = 1 \times 3^1 + 3 \times 3^2 + \dots + (2n-1) \cdot 3^n \text{④},$$

$$\text{③} - \text{④得: } -2T_n = 1 + 2(3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) - (2n-1) \times 3^n,$$

$$\text{整理得: } T_n = 1 + (n-1) \cdot 3^n.$$

$$\text{选条件②时, } 2b_n = b_{n-1} + b_{n+1} \ (n \geq 2), \ b_2 = 3;$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列

$$\text{故 } b_n = 2n - 1,$$

$$\text{所以 } c_n = a_n b_n = (2n-1) \cdot 3^{n-1},$$

$$\text{则 } T_n = 1 \times 3^0 + 3 \times 3^1 + \dots + (2n-1) \cdot 3^{n-1} \text{ ①},$$

$$3T_n = 1 \times 3^1 + 3 \times 3^2 + \dots + (2n-1) \cdot 3^n \text{ ②},$$

$$\text{①} - \text{②} \text{得: } -2T_n = 1 + 2(3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) - (2n-1) \times 3^n,$$

$$\text{整理得: } T_n = 1 + (n-1) \cdot 3^n.$$

$$\text{选条件③时, } S_n - S_{n-1} = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

$$\text{整理得: } \sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = 1 \text{ (常数)},$$

所以数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列;

$$\text{所以 } S_n = n^2,$$

$$\text{故 } b_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 1,$$

$$\text{所以 } c_n = a_n b_n = (2n-1) \cdot 3^{n-1},$$

$$\text{则 } T_n = 1 \times 3^0 + 3 \times 3^1 + \dots + (2n-1) \cdot 3^{n-1} \text{ ①},$$

$$3T_n = 1 \times 3^1 + 3 \times 3^2 + \dots + (2n-1) \cdot 3^n \text{ ②},$$

$$\text{①} - \text{②} \text{得: } -2T_n = 1 + 2(3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) - (2n-1) \times 3^n,$$

$$\text{整理得: } T_n = 1 + (n-1) \cdot 3^n.$$

33. 【解析】(1) 由 $a_n a_{n+1} + 1 = 4S_n$ ①

$$\text{得 } a_{n+1} a_{n+2} + 1 = 4S_{n+1} \text{ ②}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{得 } a_{n+1} a_{n+2} - a_n a_{n+1} = 4a_{n+1},$$

$$\text{因为 } a_{n+1} > 0, \text{ 所以 } a_{n+2} - a_n = 4$$

由此可知 $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots, a_{2n-1}, \dots$ 是公差为 2 的等差数列,

$$\text{其通项公式为 } a_{2n-1} = 4n - 3 = 2(2n-1) - 1;$$

$$\text{故 } n \in \mathbb{N}^+ \text{ 时, } a_n = 2n - 1$$



$$(2) \text{ 由 (1) 可知 } b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$T_n = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right] = \frac{n}{2n+1}$$

$$\text{要使 } T_n < \frac{2n+1}{n^2}, \text{ 即 } \frac{n}{2n+1} < \frac{2n+1}{n^2},$$

$$\text{由 } \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} \text{ 可知数列 } \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \cdots, \frac{n}{2n+1} \text{ 为递增数列,}$$

$$\text{由 } \frac{2n+1}{n^2} \text{ 知数列 } \frac{3}{1}, \frac{5}{4}, \frac{7}{9}, \frac{9}{16}, \frac{11}{25}, \cdots, \frac{2n+1}{n^2} \text{ 为递减数列,}$$

$$\text{因为 } \frac{1}{3} < \frac{3}{1}, \frac{2}{5} < \frac{5}{4}, \frac{3}{7} < \frac{7}{9}, \frac{4}{9} < \frac{9}{16}, \frac{5}{11} > \frac{11}{25}, \cdots,$$

$$\text{所以当 } n \leq 4 \text{ 时, } T_n < \frac{2n+1}{n^2},$$

$$\text{当 } n > 4 \text{ 时, } T_n > \frac{2n+1}{n^2}$$

故满足条件的 n 的最大值为 4.

【另解】

$$\text{要使 } T_n < \frac{2n+1}{n^2}, \text{ 有 } \frac{n}{2n+1} < \frac{2n+1}{n^2}, \text{ 即 } n^3 - 4n^2 - 4n - 1 < 0;$$

$$\text{令 } f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 1 (x \geq 1), f'(x) = 3x^2 - 8x - 4 = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{28}{3},$$

由 $f'(3) = -1 < 0, f'(4) = 12 > 0$, 可知当 $x \geq 4$ 时 $f(x)$ 是增函数, 当 $x \in [1, 3]$ 时 $f(x)$ 是减函数由 $f(4) = -17 < 0$, $f(5) = 4 > 0$, 可知 $x \geq 5$ 时 $f(x) > 0, 1 \leq x \leq 4$ 时 $f(x) < 0$, 10 分

所以当 $n = 1, 2, 3, 4$ 时 $f(n) < 0$, 当 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n > 4$ 时 $f(n) > 0$,

所以 $n > 4$ 时 $T_n > \frac{2n+1}{n^2}$, 故满足条件的 n 的最大值为 4. 12 分

34. **【解析】** (1) 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -9$, 且 $\frac{a_{n+1}}{2}$ 是 2 与 a_n ($n \in \mathbb{N}^*$) 的等差中项.

整理得 $a_{n+1} - a_n = 2$ (常数),

故数列 $\{a_n\}$ 是以 -9 为首项, 2 为公差的等差数列;

$$\text{所以 } a_n = -9 + 2(n-1) = 2n - 11.$$

当 $n \geq 6$ 时, $a_n > 0$,

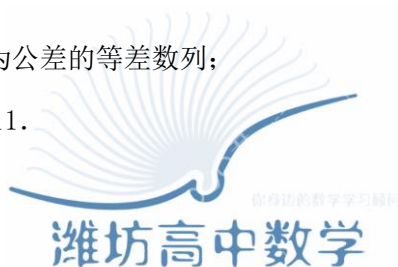
当 $n \leq 5$ 时, $a_n < 0$,

$$\text{所以当 } n \leq 5 \text{ 时, } G_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = -(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \frac{n(9+11-2n)}{2} = 10n - n^2,$$

$$\text{当 } n \geq 6 \text{ 时, } G_n = |a_1| + |a_2| + |a_5| + |a_6| + \cdots + |a_n| = -2(a_1 + a_2 + \cdots + a_5) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 25 + (n-5)^2.$$

$$\text{故 } G_n = \begin{cases} 10n - n^2 & (n \leq 5) \\ 25 + (n-5)^2 & (n \geq 6) \end{cases}.$$

(2) 根据数列的通项公式 $a_n = 2n - 11$,



可知: $a_1, \dots, a_5$ 各项都为负值, 当 $n \geq 6$ 时, $a_n > 0$,

所以 $T_2 > 0$, $T_4 > 0$,

故 $\{T_n\}_{\max} = \{T_2, T_4\}_{\max}$, $\{T_n\}_{\min} = \{T_1, T_3, T_5, T_n\}_{\min}$,

由于 $T_2 = 63$, $T_4 = 945$,

所以最大项为第 4 项, 最大值为 945.

由于 $T_5 = -945$, $T_6 = -945$,

当 $n \geq 7$ 时, $a_n > 1$, 所以 T_n 没有最小值,

35. 【解析】(1) 证明: 由题意, 当 $n=1$ 时, $8=4a_1=4S_1=a_1^2-4-4$, 解得 $a_1=4$,

当 $n \geq 2$ 时, 由 $4S_n = a_{n+1}^2 - 4n - 4$,

可得 $4S_{n-1} = a_n^2 - 4(n-1) - 4$,

两式相减, 可得 $4a_n = a_{n+1}^2 - a_n^2 - 4$,

化简整理, 得 $(a_{n+1} + a_n + 2)(a_{n+1} - a_n - 2) = 0$,

$\because a_{n+1} + a_n + 2 > 0$,

$\therefore a_{n+1} - a_n - 2 = 0$, 即 $a_{n+1} - a_n = 2$,

$\because a_2 - a_1 = 2$ 也满足上式,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公差等差数列.

(2) 解: 由 (1) 知, $a_n = 2 + 2(n-1) = 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$b_1 = 1$, $b_4 = a_4 = 8$,

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

则 $q^3 = \frac{b_4}{b_1} = 8$, 解得 $q = 2$,

$\therefore b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$\therefore b_1 = 1$, $b_2 = 2 = a_1$, $b_3 = 4 = a_2$, $b_4 = 8 = a_4$,

$b_5 = 16 = a_8$, $b_6 = 32 = a_{16}$, $b_7 = 64 = a_{32}$,

$b_8 = 128 = a_{64}$, $b_9 = 256 = a_{128}$,

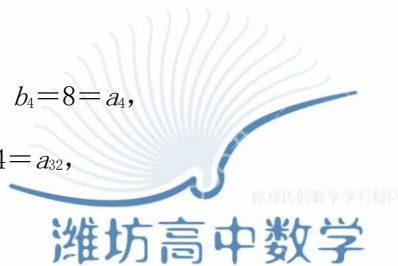
$\therefore c_1 + c_1 + c_3 + \dots + c_{100}$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{107}) - (b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_8)$

$= \frac{107 \times (2 + 214)}{2} - \frac{2(1 - 2^7)}{1 - 2}$

$= 11302$.

36. 【解析】(1) 由 $a_n + a_{n+1} = kn + 1$, 可得 $a_1 + a_2 = k + 1$, $a_2 + a_3 = 2k + 1$, $a_3 + a_4 = 3k + 1$,



因为 $a_1=1$,

所以 $a_2=k$, $a_3=k+1$, $a_4=2k$.

又 a_1, a_2, a_4 成等比数列, 所以 $a_2^2 = a_1 a_4$, 则 $k^2=2k$,

又 $k \neq 0$, 故 $k=2$.

(2) 当 $k=3$ 时, $a_n+a_{n+1}=3n+1$.

当 n 为偶数时, $S_n = (a_1+a_2) + (a_3+a_4) + (a_5+a_6) + \cdots + (a_{n-1}+a_n)$

$$= 4+10+16+\cdots+(3n-2) = \frac{(2+3n) \times \frac{n}{2}}{2} = \frac{3n^2+2n}{4};$$

当 n 为奇数时, $S_n = a_1 + (a_2+a_3) + (a_4+a_5) + (a_6+a_7) + \cdots + (a_{n-1}+a_n)$

$$= 1+7+13+19+\cdots+(3n-2) = \frac{(3n-1) \times \frac{n+1}{2}}{2} = \frac{3n^2+2n-1}{4}.$$

综上所述, $S_n = \begin{cases} \frac{3n^2+2n}{4}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{3n^2+2n-1}{4}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}.$

37. 【解析】 (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

因为 a_3 是 $2a_1$ 、 $3a_2$ 的等差中项, 所以 $2a_3 = 2a_1 + 3a_2$, 即 $2a_1q^2 = 2a_1 + 3a_1q$,

因为 $a_1 \neq 0$, 所以 $2q^2 - 3q - 2 = 0$, 解得 $q = 2$ 或 $q = -\frac{1}{2}$,

因为数列 $\{a_n\}$ 是正项等比数列, 所以 $q = 2$.

因为 $a_4 = 16$, 即 $a_4 = a_1q^3 = 8a_1 = 16$, 解得 $a_1 = 2$, 所以 $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$;

(2) 解法一: (分奇偶、并项求和)

由 (1) 可知, $a_{2n+1} = 2^{2n+1}$,

所以, $b_n = (-1)^n \cdot \log_2 a_{2n+1} = (-1)^n \cdot \log_2 2^{2n+1} = (-1)^n \cdot (2n+1)$,

①若 n 为偶数, $T_n = -3 + 5 - 7 + 9 - \cdots - (2n-1) + (2n+1)$

$$= (-3+5) + (-7+9) + \cdots + [-(2n-1) + (2n+1)] = 2 \times \frac{n}{2} = n;$$

②若 n 为奇数, 当 $n \geq 3$ 时, $T_n = T_{n-1} + b_n = n-1 - (2n+1) = -n-2$,

当 $n=1$ 时, $T_1 = -3$ 适合上式,

综上得 $T_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为偶数} \\ -n-2, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$ (或 $T_n = (n+1)(-1)^n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$);

解法二：(错位相减法)

由 (1) 可知, $a_{2n+1} = 2^{2n+1}$,

所以, $b_n = (-1)^n \cdot \log_2 a_{2n+1} = (-1)^n \cdot \log_2 2^{2n+1} = (-1)^n \cdot (2n+1)$,

$T_n = (-1)^1 \times 3 + (-1)^2 \times 5 + (-1)^3 \times 7 + \cdots + (-1)^n (2n+1)$,

所以 $-T_n = (-1)^2 \times 3 + (-1)^3 \times 5 + (-1)^4 \times 7 + \cdots + (-1)^{n+1} (2n+1)$

所以 $2T_n = -3 + 2[(-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^n] - (-1)^{n+1} (2n+1)$

$$= -3 + 2 \times \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} + (-1)^n (2n+1) = -3 + 1 - (-1)^{n+1} + (-1)^n (2n+1)$$

$$= -2 + (2n+2)(-1)^n,$$

所以 $T_n = (n+1)(-1)^n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

38. 【解析】(1) $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, $a_1 > 0$, 且 a_4 是 $2a_2$ 和 $a_5 - 2$ 的等比中项,

可得 $a_4^2 = 2a_2(a_5 - 2)$, 即为 $(a_1 + 6)^2 = 2(a_1 + 2)(a_1 + 8 - 2)$,

解得 $a_1 = 2$ (负值舍去),

则 $a_n = 2 + 2(n-1) = 2n$;

(2) 数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} = 2^{n+1}$,

可得 $n=1$ 时, $b_1 = 4a_1 = 8$,

$n \geq 2$ 时, $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} = 2^n$, 两式相减可得 $\frac{b_n}{a_n} = 2^n$,

则 $b_n = 2^n a_n = n \cdot 2^{n+1}$,

$$\text{即 } b_n = \begin{cases} 8, & n=1 \\ n \cdot 2^{n+1}, & n \geq 2 \end{cases}$$

所以 $T_n = 4 + 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n+1}$,

$2T_n = 1 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^{n+2}$,

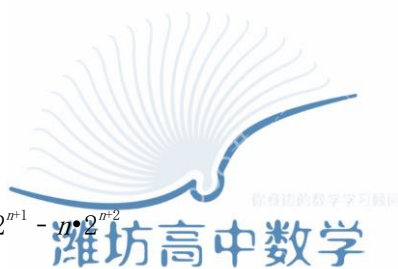
两式相减可得 $-T_n = 4 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1} - n \cdot 2^{n+2}$

$$= 4 + \frac{4(1-2^n)}{1-2} - n \cdot 2^{n+2},$$

化简可得 $T_n = 8 + (n-1) \cdot 2^{n+2}$.

39. 【解析】(1) $\{b_n\}$ 是 $V(k)$ 数列, $b_1 = 10$, $b_2 = 8$, $b_3 = 6$,

则有 $\frac{b_3 - b_2}{b_2 - b_1} = \frac{6-8}{8-10} = 1$, 所以 $\frac{b_{n+1} - b_n}{b_n - b_{n-1}} = 1$, 则有 $b_{n+1} - b_n = b_n - b_{n-1}$,



所以数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 公差为 $d=b_2-b_1=-2$,

故数列 $\{b_n\}$ 的通项公式求 $b_n=-2n+12$,

$$\text{所以 } S_{11} = \frac{11 \times (10-10)}{2} = 0;$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ 是 $V(2)$ 数列, 则有 $a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1) \cdot 2^{n-1}$,

又 $a_2-a_1=2$, 所以 $a_{n+1}-a_n=2^n$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1=2^n-1$,

当 $n=1$ 时, 上式也成立,

所以 $a_n=2^n-1$,

假设存在正整数 m, n , 使得 $\frac{199}{99} < \frac{a_m}{a_n} < \frac{99}{49}$ 成立,

$$\text{则 } \frac{199}{99} < \frac{2^m-1}{2^n-1} < \frac{99}{49},$$

由 $\frac{2^m-1}{2^n-1} > 2$, 可知 $2^m-1 > 2^n-1$,

所以 $m > n$, 又 m, n 为正整数,

所以 $m-n \geq 1$,

$$\text{又 } \frac{2^m-1}{2^n-1} = \frac{2^{m-n}(2^n-1)+2^{m-n}-1}{2^n-1} = 2^{m-n} + \frac{2^{m-n}-1}{2^n-1} < \frac{99}{49},$$

所以 $2^{m-n} < \frac{99}{49} < 3$, 则 $2^{m-n}=2$,

所以 $m-n=1$,

$$\text{所以 } \frac{2^m-1}{2^n-1} = 2 + \frac{1}{2^n-1}, \text{ 故 } \frac{199}{99} < 2 + \frac{1}{2^n-1} < \frac{99}{49},$$

则 $50 < 2^n < 100$, 所以 $n=6, m=7$,

故存在满足条件的正整数 $m=7, n=6$.

40. 【解答】解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

由 $a_3-a_1=8$, 可得 $2d=8$, 即 $d=4$,

由 a_2-1 是 a_1 和 a_3+1 的等比中项, 可得 $(a_2-1)^2=a_1(a_3+1)$,

即有 $(a_1+3)^2=a_1(a_1+9)$,

解得 $a_1=3$,

则 $a_n=3+4(n-1)=4n-1$;

由 $b_1=3, 2S_n=b_{n+1}-3$, 可得 $b_2=2S_1+3=2b_1+3=9$,

$n \geq 2$ 时, $2S_{n-1}=b_n-3$, 又 $2S_n=b_{n+1}-3$, 可得 $2S_n-2S_{n-1}=b_{n+1}-3-b_n+3=2b_n$,

即为 $b_{n+1}=3b_n$, 满足 $n=1$,

所以 $\{b_n\}$ 是首项和公比均为 3 的等比数列,

则 $b_n=3^n$;

(2) 由 $c_1=3$, $c_2=27$, $c_3=243$, 猜想 $c_k=3^{2k-1}$,

证明: 因为 $b_{n+2}-b_n=3^{n+2}-3^n=8\cdot 3^n=4(2\cdot 3^n)$ 是数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 的正整数倍,

由 $c_2\neq b_2$, 所以 $b_2, b_4, b_6, \dots, b_{2k}, \dots$ 不是 $\{a_n\}$ 中的项,

由于 $c_1=b_1=a_1=3$, 所以 $b_1, b_3, \dots, b_{2k-1}, \dots$ 是 $\{a_n\}$ 中的项,

所以 $c_k=3^{2k-1}$, $d_k=\log_3 c_k=2k-1$,

$$\frac{1}{d_k d_{k+1}} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right),$$

$$\text{所以 } T_k = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{k}{2k+1}.$$

41. 【解析】(1) 由 $\sqrt{m-1} < n$, 可得 $1 \leq m < n^2+1$, $m \in \mathbb{N}^*$,

$\therefore$ 数列 $\{(\sqrt{n-1})^+\}$ 的通项公式为 $(\sqrt{n-1})^+ = n^2$;

$$(2) \because f_n'(x) = x^2 - (eb_n + n^2)x + eb_n n^2 = (x - eb_n)(x - n^2),$$

若 $eb_n > n^2$ 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立,

当 $x \in (-\infty, n^2)$ 时, $f_n'(x) > 0$, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, n^2)$ 上单调递增;

当 $x \in (n^2, eb_n)$ 时, $f_n'(x) < 0$, $f_n(x)$ 在 (n^2, eb_n) 上单调递减;

当 $x \in (eb_n, +\infty)$ 时, $f_n'(x) > 0$, $f_n(x)$ 在 $(eb_n, +\infty)$ 上单调递增;

$$\therefore b_{n+1} = eb_n, \text{ 即 } b_{n+1} = e^n b_1 > n^2, \text{ 则 } b_1 > \frac{n^2}{e^n},$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{x^2}{e^x} (x \geq 1), \text{ 则 } g'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x} = \frac{x(2-x)}{e^x},$$

当 $x \in (1, 2)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增,

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore g(x) \leq g(2) = \frac{4}{e^2},$$

$$\therefore b_1 > \frac{4}{e^2} \text{ 符合题意};$$

则有 $2^m + 2^t = 2^{n+1}$, $\therefore 1 + 2^{t-m} = 2^{n+1-m}$,

易知等式左边为奇数, 右边为偶数,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 中不存在三项, 使其成等差数列;

(2) 证明: 由题意, $f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2}$,

$$\therefore f'_n(x) = 1 + \frac{x}{2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n},$$

当 $x \in [\frac{2}{3}, 1]$ 时, $f'_n(x) > 0$ 恒成立, $\therefore f_n(x)$ 单调递增,

$$\text{此时 } f_n(1) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 0,$$

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{2}{3}\right) &= -\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2^2} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{3^2} + \cdots + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n^2} < -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} < 0, \end{aligned}$$

$\therefore$ 存在唯一的实数 $x_n \in [\frac{2}{3}, 1]$, 使得 $f_n(x) = 0$,

$\therefore$ 得证;

(3) 证明: 当 $x > 0$ 时, $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} > f_n(x)$,

$$\therefore f_{n+1}(x_n) > f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0,$$

$\therefore f_{n+1}(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore x_{n+1} < x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调递减,

故对 $\forall$ 正整数 p , 都有 $x_n - x_{n+p} > 0$,

$$\text{又 } f_n(x_n) = -1 + x_n + \frac{x_n^2}{2^2} + \cdots + \frac{(x_n)^n}{n^2} = 0,$$

$$f_{n+p}(x_{n+p}) = -1 + x_{n+p} + \frac{(x_{n+p})^2}{2^2} + \cdots + \frac{(x_{n+p})^{n+p}}{(n+p)^2} = 0,$$

两式相减, 得,

$$x_n - x_{n+p} = \frac{(x_{n+p})^2 - (x_n)^2}{2^2} + \cdots + \frac{(x_{n+p})^n - (x_n)^n}{n^2} + \frac{(x_{n+p})^{n+1}}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{(x_{n+p})^{n+p}}{(n+p)^2}$$

$$< \frac{(x_{n+p})^{n+1}}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{(x_{n+p})^{n+p}}{(n+p)^2},$$

$$\begin{aligned} \because x_{n+p} \in \left[\frac{2}{3}, 1\right], \therefore x_n - x_{n+p} &< \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

即数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_n - x_{n+p} < \frac{1}{n}$,

$\therefore$ 得证.

43. 【解析】(1) 因为数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 其前 n 项和为 S_n ,

$$\text{所以 } S_n = na_1 + \frac{n(n-1) \times 2}{2} = n^2 + (a_1 - 1)n,$$

因为 S_n 为 $Z(1)$ 数列, 所以 $S_{n+1} \geq S_n$, 则 $(n+1)^2 + (a_1 - 1)(n+1) \geq n^2 + (a_1 - 1)n$;

所以 $a_1 \geq -2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 即 $a_1 \geq -2$;

(2) 令 $3T_n = R_n^2 + 4R_n$ 中 $n=1$ 得, $3T_1 = R_1^2 + 4R_1$, 即 $3b_1^2 = b_1^2 + 4b_1$, 而数列 $\{b_n\}$ 的各项均为正数, 所以 $b_1 = 2$,

由 $3T_n = R_n^2 + 4R_n$, 可得 $3T_{n+1} = R_{n+1}^2 + 4R_{n+1}$, 即 $3b_{n+1}^2 = R_{n+1}^2 - R_n^2 + 4b_{n+1} = (R_{n+1} - R_n)(R_{n+1} + R_n) + 4b_{n+1}$,

由 $b_{n+1} > 0$ 可得 $3b_{n+1} = R_{n+1} + R_n + 4$, 则 $3b_{n+2} = R_{n+2} + R_{n+1} + 4$,

两式相减得 $3b_{n+2} - 3b_{n+1} = b_{n+2} + b_{n+1}$, 即 $b_{n+2} = 2b_{n+1}$,

当 $n \geq 2$ 时, $b_{n+1} = 2b_n$,

而 $3T_2 = R_2^2 + 4R_2$, 则 $3(4 + b_2^2) = (2 + b_2)^2 + 4(2 + b_2)$, 即 $b_2^2 - 4b_2 = 0$, 而 $b_2 > 0$, 则 $b_2 = 4$, $\frac{b_2}{b_1} = 2$,

所以 $\{b_n\}$ 为首项为 2, 公比为 2 的等比数列, $b_n = 2^n$,

所以 $c_n = b_n + \frac{1}{b_n} = 2^n + 2^{-n}$, 而数列 $\{c_n\}$ 为 $Z(m)$ 数列, 则 $c_{n+1} \geq mc_n$, 即 $2^{n+1} + 2^{-(n+1)} \geq m(2^n + 2^{-n})$,

$$\text{所以 } m \leq \frac{2^{n+1} + 2^{-n-1}}{2^n + 2^{-n}} = 2 - \frac{\frac{3}{2}}{2^{2n+1}}, \text{ 则 } m \leq \frac{17}{10},$$

所以 m 的最大值为 $\frac{17}{10}$;

(3) 证明: 因为数列 $\{d_{2k-1}d_{2k+1}\}$ 为 $Z(r)$ 数列, 所以 $rd_{2k-1}d_{2k+1} \leq d_{2k+1}d_{2k+3}$, 即 $rd_{2k-1} \leq d_{2k+3}$;

而数列 $\{\frac{1}{d_{2k}d_{2k+2}}\}$ 为 $Z(s)$ 数列, $s\frac{1}{d_{2k}d_{2k+2}} \leq \frac{1}{d_{2k+2} \cdot d_{2k+4}}$, 即 $sd_{2k+4} \leq d_{2k}$;

而 $\frac{d_2}{d_1} = rs$, $rd_1 \leq d_3$, $d_3 \leq d_5$, 所以 $sd_5 \leq d_2 = d_1rs \leq sd_3$,

则 $d_3 = d_5$ 且中间每个等号都需取等, 即 $sd_5 = d_2 = d_1rs = sd_3$,

而 $\frac{d_2}{d_1} = rs$, $d_1 \leq d_3$, 所以 $rs \geq 1$, 又因 $rd_3 \leq d_5$, $sd_{10} \leq d_6$,

所以 $rsd_{10} \leq rd_5 = rd_3 \leq d_5 \leq d_{10}$, 则 $rs \leq 1$, 所以 $rs = 1$,

即 $d_{10} \leq rd_5 = rd_3 \leq d_5 \leq d_{10}$, $d_5 = d_{10}$, 且中间每个等号都需取等,

递推得
$$\begin{cases} d_{4k+1} = d_{4k+2} \\ d_{4k+1} = rd_{4k-3} \\ d_{4k+2} = rd_{4k-2} \end{cases}$$
, 证明完毕.

