

专题五 不等式

一、单项选择

- (2021·临沂一模3) 设 a, b, c, d 为实数, 则 “ $a > b, c > d$ ” 是 “ $a + c > b + d$ ” 的 ()
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
- (日照一模5) 函数 $y = a^{3-x} (a > 0, \text{且} a \neq 1)$ 的图象恒过定点 A, 若点 A 在椭圆 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1 (m > 0, n > 0)$ 上, 则 $m+n$ 的最小值为
 A. 12 B. 14 C. 16 D. 18
- (聊城一模6) 若正实数 a, b 满足 $a + b = 1$, 且 $a > b$, 则下列结论正确的是
 A. $\ln(a-b) > 0$ B. $a^b < b^a$ C. $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{2}$ D. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 4$
- (滨州一模6) 已知 $a > 0, b > 0$, 向量 $\vec{m} = (a+2b, -9)$, $\vec{n} = (8, ab)$, 若 $\vec{m} \perp \vec{n}$, 则 $2a+b$ 的最小值为 ()
 A. 9 B. 8 C. $\frac{5}{4}$ D. 5

二、多项选择

- (菏泽一模9) 下列结论正确的是 ()
 A. $\forall x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2$
 B. 若 $a < b < 0$, 则 $(\frac{1}{a})^3 > (\frac{1}{b})^3$
 C. 若 $x(x-2) < 0$, 则 $\log_2 x \in (0, 1)$
 D. 若 $a > 0, b > 0, a+b \leq 1$, 则 $0 < ab \leq \frac{1}{4}$
- (泰安一模9) 设正实数 a, b 满足 $a+b=1$, 则 ()
 A. $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$ B. $ab + \frac{1}{ab} \geq \frac{17}{4}$
 C. $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \leq 3 + 2\sqrt{2}$ D. $2^{a-b} > \frac{1}{2}$
- (烟台一模9) 若 $0 < a < b < 1, c > 1$, 则
 A. $c^a < c^b$ B. $ba^c < ab^c$ C. $\frac{b-a}{c-a} < \frac{b}{c}$ D. $\log_a c < \log_b c$
- (2021·淄博一模11) 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 且 $0 < a < 1 < b$, 则下列结论正确的是 ()

A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. $a^a > b^b$ C. $\lg b^a > \lg a^b$ D. $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 2$

9. (潍坊一模 12) 已知实数 x, y, z 满足 $x+y+z=1$, 且 $x^2+y^2+z^2=1$, 则下列结论正确的是

A. $xy+yz+xz=0$ B. z 的最大值为 $\frac{1}{2}$ C. z 的最小值为 $-\frac{1}{3}$ D. xyz 的最小值为 $-\frac{4}{27}$

三、填空

10. (济南一模 15) 能够说明“若 $a>b$, 则 $\frac{1}{a+\sqrt[3]{a}} < \frac{1}{b+\sqrt[3]{b}}$ ”是假命题的一组非零实数 a, b 的值依次为_____、_____.

专题五 不等式

一、单项选择

1. 【答案】A

【分析】由 $c > d$ ，则 “ $a > b$ ” $\Rightarrow$ “ $a+c > b+d$ ”，反之不成立. 例如取 $c=5$, $d=1$, $a=2$, $b=3$.

【解答】由 $c > d$ ，则 “ $a > b$ ” $\Rightarrow$ “ $a+c > b+d$ ”，反之不成立.

例如取 $c=5$, $d=1$, $a=2$, $b=3$. 满足 $c > d$, “ $a+c > b+d$ ”，但是 $a > b$ 不成立.

$\therefore c > d$ ，则 “ $a > b$, $c > d$ ” 是 “ $a+c > b+d$ ” 的充分不必要条件.

故选: A.

2. 【答案】C

【解析】定点为 A (3,1), 则有 $\frac{9}{m} + \frac{1}{n} = 1$, 所以 $m+n = (m+n)(\frac{9}{m} + \frac{1}{n}) = 10 + \frac{9n}{m} + \frac{m}{n} \geq 10 + 2\sqrt{9} = 16$,

当且仅当 $\frac{9n}{m} = \frac{m}{n}$, 即 $m=3n$ 时取等号. 选 C

3. 【答案】D

4. 【答案】B

【解析】根据题意, 向量 $\vec{m} = (a+2b, -9)$, $\vec{n} = (8, ab)$,

若 $\vec{m} \perp \vec{n}$, 则 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 8(a+2b) - 9ab = 0$, 即 $8(a+2b) = 9ab$, 变形可得 $\frac{1}{b} + \frac{2}{a} = \frac{9}{8}$,

则 $2a+b = \frac{8}{9} \times \frac{9}{8} (2a+b) = \frac{8}{9} \times (\frac{1}{b} + \frac{2}{a}) (2a+b) = \frac{8}{9} \times (5 + \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a})$,

又由 $a > 0$, $b > 0$, 则 $\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} = 2(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) \geq 4$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立,

则 $2a+b = \frac{8}{9} \times (5 + \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}) \geq \frac{8}{9} \times (5+4) = 8$,

则 $2a+b$ 的最小值为 8,

故选: B.

二、多项选择

5. 【答案】BD

【解析】对于 A, 当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x} \leq -2$, 故错;

对于 B, 当 $a < b < 0$ 时, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 则 $(\frac{1}{a})^3 > (\frac{1}{b})^3$, 故正确;

对于 C, 若 $x(x-2) < 0$, 则 $0 < x < 2$, 则 $\log_2 x \in (-\infty, 1)$, 故错;

对于 D , 若 $a > 0, b > 0, a+b \leq 1$, 则有 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$, 即 $0 < ab \leq \frac{1}{4}$, 故正确.

故选: BD .

6. 【答案】 BD

【解析】因为正实数 a, b 满足 $a+b=1$,

所以 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号,

$\log_2 a + \log_2 b = \log_2(ab) \leq \log_2 \frac{1}{4} = -2$, A 错误;

令 $t = ab \in (0, \frac{1}{4}]$, $ab + \frac{1}{ab} = t + \frac{1}{t}$ 在 $(0, \frac{1}{4}]$ 上单调递减,

当 $t = \frac{1}{4}$ 时取得最小值 $\frac{17}{4}$, B 成立;

$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2(a+b)}{a} + \frac{a+b}{b} = 3 + \frac{2b}{a} + \frac{a}{b} \geq 3 + 2\sqrt{2}$, C 不成立;

$\because$ 正实数 a, b 满足 $a+b=1$,

$a-b = a - (1-a) = 2a-1 > -1$, 则 $2^{a-b} > 2^{-1} = \frac{1}{2}$, D 成立.

故选: BD .

7. 【答案】 ABC

【解析】 A 选项, 由 $y = c^x (c > 1)$ 的单调性知, A 正确;

B 选项: $\frac{ba^c}{ab^c} = \left(\frac{b}{a}\right)^{c-1}$, $\because 0 < \frac{b}{a} < 1, c-1 > 0$, $\therefore \left(\frac{b}{a}\right)^{c-1} < 1$, B 正确

C 选项: $\frac{b-a}{c-a} - \frac{b}{c} = \frac{bc-ac-bc+ab}{c(c-a)} = \frac{a(b-c)}{c(c-a)} < 0$, C 正确

D 选项: $\log_a c = \frac{\lg c}{\lg a}$, $\log_b c = \frac{\lg c}{\lg b}$, $\because a < b < 1$, $\therefore \lg a < \lg b < 0$, $\therefore \frac{1}{\lg a} > \frac{1}{\lg b}$ 且 $\lg c > 0$

$\therefore \frac{\lg c}{\lg a} > \frac{\lg c}{\lg b}$, 即 $\log_a c > \log_b c$, D 错误

8. 【答案】 AC

【分析】利用不等式的性质判断 AC , 举反例判断 BD .

【解答】由 $a, b \in \mathbb{R}$, 且 $0 < a < 1 < b$, 得:

对于 A , 由同号不等式取倒数法则得 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 故 A 正确;

对于 B , $a^a > b^b$ 不成立, 例如 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < 3^3$, 故 B 错误;

对于 C , $\because b^a > a^b$, $\therefore \lg b^a > \lg a^b$, 故 C 正确;

对于 D , $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 2$ 不一定成立, 例如 $\sqrt{\frac{1}{16}} + \sqrt{2} < 2$, 故 D 错误.

故选：AC.

9. 【答案】ACD

【解析】 $\because x+y+z=1$, $\therefore (x+y+z)^2=1$, 又 $\because x^2+y^2+z^2=1$, $\therefore xy+yz+xz=0$, A 正确;

$\because x+y=1-z$, $x^2+y^2=1-z^2$, 又 $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2 \Rightarrow 2-2z^2 \geq (1-z)^2$, $\therefore -\frac{1}{3} \leq z \leq 1$, 故 B 错误,

C 正确;

根据选项 A 得 $z = \frac{-xy}{x+y}$, 又 $z=1-(x+y)$, 故 $\frac{-xy}{x+y} = 1-(x+y)$,

$\therefore xy = (x+y)^2 - (x+y) \leq (\frac{x+y}{2})^2$, $\therefore 0 \leq x+y \leq \frac{4}{3}$,

$xyz = [(x+y)^2 - (x+y)][1-(x+y)]$, 令 $x+y=t$, $0 \leq t \leq \frac{4}{3}$,

$\therefore xyz = -t^3 + 2t^2 - t$, 求导后发现 $t = \frac{1}{3}$ 或 $\frac{4}{3}$ 时, xyz 的最小值为 $-\frac{4}{27}$, D 正确.

综上选 ACD.

三、填空

10. 【答案】1, -1 (答案不唯一)

【解析】答案不唯一, 只需要第 1 个数大于 0, 第 2 个数小于 0 即可, 即 $a>0, b<0$, 用反比例函数在各自象限具有单调性, 而不是定义域内具有单调性。