专题五　不等式

一、　多项选择题

1.（2021 枣庄二模 9）已知 $a>0$，$b>0$，$a+b^2=1$，则

A．$a+b<\frac{5}{4}$　　B．$a-b>-1$　　C．$\sqrt{a}\cdot b\leq\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{a}}{b-2}\geq-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2.（2021 聊城二模 9）已知$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下列结论一定正确的是（　　）

A．$a^2<b^2$　　B．$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$　　C．$lga^2>lgab$　　D．$|a|^a<|a|^b$

3.（2021 烟台适应性练习二 9）下列命题成立的是（　　）

A．若 $a<b<0$，则 $a|a|<b|b|$

B．若 $a>0$，$b>0$，$c>0$，则$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$

C．若 $a>0$，$b>0$，则 $a+\frac{b}{a}+\frac{4}{ab}\geq4$

D．若 $a>0$，$b\in R$，则 $a\geq2b-\frac{b^2}{a}$

4.（2021 潍坊四县 5 月联考 10）a，b 为实数且 $a>b>0$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A．$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B．$2021^{a-1}>2021^{b-1}$

C．$a+b+2>2\sqrt{a}+2\sqrt{b}$　　D．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{4}{a+b}$

5.（2021 烟台三模 10）10. 已知 $a>0$，$b>0$，且 $a-b=1$，则（　　）

A．$e^a-e^b>1$　　B．$a^e-b^e<1$　　C．$\frac{9}{a}-\frac{1}{b}\leq4$　　D．$2\log_2 a-\log_2 b\geq2$

6.（2021 聊城三模 11）已知实数 a、b，下列说法一定正确的是（　　）

A．若 $a<b$，则 $(\frac{2}{7})^b<(\frac{2}{7})^a<(\frac{3}{7})^a$

B．若 $b>a>1$，则 $\log_{ab}a<\frac{1}{2}$

C．若 $a>0$，$b>0$，$a+2b=1$，则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 8

D．若 $b>a>0$，则 $\frac{1+a}{b^2}>\frac{1+b}{a^2}$

7.（2021 潍坊二模 10）已知 $a>0$，$b>0$，$a+2b=1$，下列结论正确的是（　　）

A．$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为 9　　B．a^2+b^2 的最小值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\log_2 a+\log_2 b$的最小值为 - 3　　　D. 2^a+4^b的最小值为$2\sqrt{2}$

8.（2021 烟台适应性练习一 10）下列命题正确的是（　　）

A. 若 $a>b>0$，$c<0$，则$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$

B. 若 $a>0$，$b>0$，$c>0$，则$\frac{a}{b}\le\frac{a+c}{b+c}$

C. 若 $a>b>0$，则$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}<\sqrt{\frac{a+b}{2}}$

D. 若 $a>-1$，$b>0$，$a+2b=2$，则$\frac{1}{a+1}+\frac{2}{b}$的最小值为 3

9.（2021 济宁二模 9）已知 $a>b>0$，$c\in R$，下列不等式恒成立的有（　　　）

A. $(\frac{1}{3})^a<(\frac{1}{3})^b$　　B. $ac^2>bc^2$　　C. $\log_2\frac{1}{a}>\log_2\frac{1}{b}$　　D. $(\frac{a+b}{2})^2<\frac{a^2+b^2}{2}$

10.（2021 青岛二模 11）下列不等式成立的是（　　）

A. $\log_2(\sin 1)>2^{\sin 1}$　　B. $(\frac{1}{\pi})^2<\pi^{\frac{1}{2}}$

C. $\sqrt{7}-\sqrt{5}<\sqrt{6}-2$　　D. $\log_4 3<\log_6 5$

11.（2021 青岛三模 11）在平面直角坐标系中，$A(t,\frac{2}{t})$，$B(8-m,8-\frac{3}{2}m)$，$C(7-m,0)$，O为坐标原点，P为 x 轴上的动点，则下列说法正确的是（　　）

A. $|\overrightarrow{OA}|$的最小值为 2

B. 若 $t=1$，$m=4$，则△ABC 的面积等于 4

C. 若 $t=1$，$m=4$，则 $|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|$的最小值为 5

D. 若 $t=\sin\theta$，$\theta\in(0,\pi)$，且$\overrightarrow{CA}$与$\overrightarrow{CB}$的夹角 $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2})$，则 $m\in(-\infty,5)$

二、　填空题

12.（2021 青岛二模 13）命题“$\exists x\in R$，$e^x<a-e^{-x}$”为假命题，则实数 a 的取值范围为_________.

13.（2021 日照二模 14）已知点(a,b)在直线 $x+4y=4$ 上，当 $a>0$，$b>0$ 时，$\frac{4}{a}+\frac{9}{b}$的最小值为_______.

专题五　不等式

一、多项选择题

1.【答案】BCD

【解析】首先可得 $0<b<1$，当 $a=\frac{3}{4}$，$b=\frac{1}{2}$ 时，$a+b=\frac{5}{4}$，故 A 错误；经判断，其他选项均正确，故选 BCD．

2.【答案】AB

【解析】因为 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则有 $b<a<0$，

对于 A，因为 $b<a<0$，所以 $a^2<b^2$，故选项 A 正确；

对于 B，因为 $b<a<0$，所以 $\frac{b}{a}>0$，$\frac{a}{b}>0$ 且 $\frac{b}{a}\neq\frac{a}{b}$，故 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$，故选项 B 正确；

对于 C，因为 $b<a<0$，所以 $a^2<ab$，故 $lga^2<lg(ab)$，故选项 C 错误；

对于 D，因为 $|a|$ 与 1 的大小关系不确定，故函数 $y=|a|^x$ 的单调性不确定，故 $|a|^a$ 与 $|a|^b$ 的大小不确定，故选项 D 错误．

故选：AB．

3.【答案】ACD

【解析】A：若 $a<b<0$，则 $|a|>|b|>0$，$-a>-b>0$，$\therefore -a|a|>-b|b|$，$\therefore a|a|<b|b|$，$\therefore A$ 正确，

B：$\because a>0$，$b>0$，$c>0$，$\therefore \frac{a+c}{b+c}-\frac{a}{b}=\frac{b(a+c)-a(b+c)}{b(b+c)}=\frac{c(b-a)}{b(b+c)}$ 不能确定符号，$\therefore B$ 错误，

C：$\because a>0$，$b>0$，$\therefore a+\frac{b}{a}+\frac{4}{ab}=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{a}+\frac{4}{ab}=\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{2}+\frac{4}{ab}\right)\geq2\sqrt{\frac{b}{2}}+2\sqrt{\frac{2}{b}}\geq4\sqrt{1}=4$，

当且仅当 $a=b$ 时取等号，$\therefore a+\frac{b}{a}+\frac{4}{ab}\geq4$．$\therefore C$ 正确，

D：$\because a^2+b^2\geq2ab$，$\therefore a^2\geq2ab-b^2$，$\because a>0$，$\therefore a\geq2b-\frac{b}{a}$，$\therefore D$ 正确．

故选：ACD．

4.【答案】BCD

【解析】A：$\because a>b>0$，$\therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，$\therefore A$ 错误，

B：$\because a>b$，$\therefore a-1>b-1$，又 $\because y=2021^x$ 在 R 上为增函数，$\therefore 2021^{a-1}>2021^{b-1}$，$\therefore B$ 正确，

C：$\because a>b>0$，$\therefore a+b+2-2\sqrt{a}-2\sqrt{b}=a+2\sqrt{a}+1+b+2\sqrt{b}+1=(\sqrt{a}+1)^2+(\sqrt{b}+1)^2>0$，$\therefore C$ 正确，

D：$\because a>b>0$，$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2\sqrt{\frac{1}{ab}}=\frac{2}{\sqrt{ab}}$，$\frac{4}{a+b}<\frac{4}{2\sqrt{ab}}=\frac{2}{\sqrt{ab}}$，$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{4}{a+b}$，$\therefore D$ 正确．

故选：*BCD*.

5.【答案】ACD

【解析】对 A，由 $a>0$，$b>0$，且 $a-b=1$ 可得 $a>b>0$，

则 $e^a-e^b=e^b\left(e^{a-b}-1\right)=e^b\left(e-1\right)$，

$\because b>0$，$\therefore e^b>1$，又 $e-1>1$，$\therefore e^b\left(e-1\right)>1$，即 $e^a-e^b>1$，故 A 正确；

对 B，令 $a=2,b=1$，则 $a^e-b^e=2^e-1>1$，故 B 错误；

对 C，$\frac{9}{a}-\frac{1}{b}=\left(\frac{9}{a}-\frac{1}{b}\right)(a-b)=10-\left(\frac{9b}{a}+\frac{a}{b}\right)\le 10-2\sqrt{\frac{9b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$，当且仅当 $\frac{9b}{a}=\frac{a}{b}$ 时等号成立，

故 C 正确；

对 D，$2\log_2 a-\log_2 b=\log_2\frac{a^2}{b}=\log_2\frac{(b+1)^2}{b}=\log_2\left(b+\frac{1}{b}+2\right)\ge\log_2\left(2\sqrt{b\cdot\frac{1}{b}}+2\right)=2$，当且仅

当 $b=\frac{1}{b}$，即 $b=1$ 时等号成立，故 D 正确.

故选：ACD.

6.【答案】 B, C

【解析】对于 A，当 $a=0$ 时，$(\frac{2}{7})^a=(\frac{3}{7})^a$，A 不符合题意；

对于 B，若 $b>a>1$，则 $1<a<\sqrt{ab}$，两边取对数得 $\log_{ab}a<\log_{ab}\sqrt{ab}=\frac{1}{2}$，B 符合题意；

对于 C，若 $a>0$，$b>0$，$a+2b=1$，则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=(\frac{2}{a}+\frac{1}{b})(a+2b)=4+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}$

$\geq 4+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=8$，当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=2b=\frac{1}{2}$ 时等号成立，C 符合题意；

对于 D，取 $a=1,b=2$，$\frac{1+a}{b^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}<\frac{1+2}{1}=3$，D 不符合题意；

故答案为：BC

7.【答案】AD

【解析】因为 $a>0$，$b>0$，$a+2b=1$，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=$（$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$）（$a+2b$）$=5+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=9$，

当且仅当 $a=b$ 时取等号，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 取得最小值 9，*A* 正确；

$a^2+b^2=b^2+(1-2b)^2=5b^2-4b+1=5(b-\frac{2}{5})^2+\frac{1}{5}$，

根据二次函数的性质可知，当 $b=\frac{2}{5}$时，上式取得最小值$\frac{1}{5}$，B错误；

因为 $1=a+2b\geqslant 2\sqrt{2ab}$，当且仅当 $a=2b=\frac{1}{2}$，即 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$时取等号，

所以 $ab\leqslant\frac{1}{8}$，

$\log_2 a+\log_2 b=\log_2 ab\leqslant -3$，即最大值 -3，C错误；

$2^a+4^b\geqslant 2\sqrt{2^{a+2b}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=2b=\frac{1}{2}$，即 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$时取等号，此时 2^a+4^b取得最小值 $2\sqrt{2}$，

D正确.

故选：AD.

8.【答案】ACD

【解析】解：A. 若 $a>b>0$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，若 $c<0$，则$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$成立，故 A 正确，

B. 若 $a>0$，$b>0$，$c>0$，则$\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{ab+ac-ab-bc}{b(b+c)}=\frac{(a-b)c}{b(b+c)}$，则当 $a>b$ 时，$\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$，故 B 错误，

C. 若 $a>b>0$，则 $(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2})^2-(\sqrt{\frac{a+b}{2}})^2=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4}-\frac{a+b}{2}=\frac{a+b+2\sqrt{ab}-2a-2b}{4}=-\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{4}=-\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{4}$

<0，

则 $(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2})^2<(\sqrt{\frac{a+b}{2}})^2$，即$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}<\sqrt{\frac{a+b}{2}}$成立，故 C 正确，

D. 由 $a+2b=2$ 得 $a+1+2b=3$，即$\frac{1}{a+1}+\frac{2}{b}=(\frac{1}{a+1}+\frac{2}{b})(\frac{a+1+2b}{3})=\frac{1}{3}(1+\frac{2b}{a+1}+4+\frac{2(a+1)}{b}\geq\frac{1}{3}(5+2\sqrt{\frac{2b}{a+1}\cdot\frac{2(a+1)}{b}})$

$=\frac{1}{3}\times(5+4)=3$，

当且仅当$\frac{2b}{a+1}=\frac{2(a+1)}{b}$，即 $b=a+1$ 时取等号，故 D正确，

故选：ACD.

9.【答案】 A, D

【解析】对于 A 选项，函数 $y=(\frac{1}{3})^x$ 为 R 上的减函数，由 $a>b>0$ ，可得 $(\frac{1}{3})^a<(\frac{1}{3})^b$ ，A 选项正确；

对于 B 选项，取 $c=0$ ，则 $ac^2=bc^2$ ，B 选项错误；

对于 C 选项，函数 $y=\log_2 x$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数，因为 $a>b>0$ ，则 $\log_2 a>\log_2 b$ ，

则 $\log_2\frac{1}{a}=-\log_2 a<-\log_2 b=\log_2\frac{1}{b}$ ，C 选项错误；

对于 D 选项，由基本不等式可得 $2ab\leq a^2+b^2$ ，

所以， $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leq 2(a^2+b^2)$ ，即 $(\frac{a+b}{2})^2\leq\frac{a^2+b^2}{2}$ ，

因为 $a>b>0$，所以，$(\frac{a+b}{2})^2<\frac{a^2+b^2}{2}$，D 选项正确.

故答案为：AD.

10.【答案】BCD

【解析】解：A：∵$\sin 1\in(0,1)$，∴$2^{\sin 1}>2^0=1$，$\log_2(\sin 1)<\log_2 1=0$，∴$\log_2(\sin 1)<2^{\sin 1}$，∴$A$ 错误，

B：∵$\pi^{-2}<\pi^{\frac{1}{2}}$，∴$(\frac{1}{\pi})^2<\pi^{\frac{1}{2}}$，∴$B$ 正确，

C：$(\sqrt{7}+2)^2=11+4\sqrt{7}$，$(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2=11+2\sqrt{30}$，∵$4\sqrt{7}<2\sqrt{30}$，

∴$(\sqrt{7}+2)^2<(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2$，∴$\sqrt{7}+2<\sqrt{6}+\sqrt{5}$，∴$\sqrt{7}-\sqrt{5}<\sqrt{6}-2$，∴$C$ 正确，

D：$\log_3 4=1+\log_3\frac{4}{3}$，$\log_5 6=1+\log_5\frac{6}{5}$，

∵$\log_3\frac{4}{3}>\log_3\frac{6}{5}>\log_5\frac{6}{5}$，∴$\log_3 4>\log_5 6$，∴$\log_4 3<\log_6 5$，∴$D$ 正确.

故选：BCD.

11.【答案】ACD

【解析】$|\overrightarrow{OA}|^2=t^2+\frac{4}{t^2}\geqslant 2\sqrt{t^2\cdot\frac{4}{t^2}}=4$，当且仅当 $t^2=\frac{4}{t^2}$，即 $t=\pm\sqrt{2}$时，取“＝”，∴$|\overrightarrow{OA}|$的最小值是 2，∴A 对；

当 $t=1$，$m=4$ 时，$A(1,2)$，$B(4,2)$，$C(3,0)$，可知 $AB\parallel x$ 轴且 $AB=3$，点 C 到 AB 的距离为 2，

∴△ABC 的面积为$\frac{1}{2}\times3\times2=3$，∴$B$ 错；

点 A 关于 x 轴的对称点 A_1 坐标为（1，－2），则 $|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|$的最小值为 $A_1B=\sqrt{(1-4)^2+(-2-2)^2}=5$，∴$C$ 对；

∵$\theta\in(0,\pi)$，∴$t=\sin\theta\in(0,1]$，∵$\overrightarrow{CA}$与$\overrightarrow{CB}$的夹角 $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2})$，∴$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=t-7+m+\frac{16-3m}{t}>0$，

得：$m<\frac{t^2-7t+16}{3-t}=\frac{(3-t)^2+(3-t)+4}{3-t}=(3-t)+\frac{4}{3-t}+1$.

$2\leqslant 3-t<3$，令 $3-t=s\in[2,3)$，则 $(3-t)+\frac{4}{3-t}+1=s+\frac{4}{s}+1\geqslant 2\sqrt{s\cdot\frac{4}{s}}+1=5$，当且仅当 $s=\frac{4}{s}$，即 $s=2$ 时取“＝”，∴$m<5$，∴D 对.

故选：ACD.

二、填空题

12.【答案】$(-\infty, 2]$

【解析】解：∵命题"$\exists x\in R$，$e^{x}<a-e^{-x}$"为假命题，

∴$\forall x\in R$，$e^{x}+e^{-x}\geqslant a$ 恒成立，

∵$e^{x}+e^{-x}\geqslant 2\sqrt{e^{x}\cdot e^{-x}}=2$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，

故实数 a 的取值范围为：$(-\infty, 2]$.

故答案为：$(-\infty, 2]$.

13.【答案】16

【解析】由题意得 $a+4b=4$，$a>0$，$b>0$，

则 $\frac{4}{a}+\frac{9}{b}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{a}+\frac{9}{b}\right)(a+4b)=\frac{1}{4}\left(40+\frac{16b}{a}+\frac{9a}{b}\right)\geqslant\frac{1}{4}\left(40+2\sqrt{\frac{16b}{a}\cdot\frac{9a}{b}}\right)=16$，

当且仅当 $\frac{16b}{a}=\frac{9a}{b}$ 且 $a+4b=4$，即 $a=1$，$b=\frac{3}{4}$ 时取等号，此时 $\frac{4}{a}+\frac{9}{b}$ 的最小值 16.

故答案为：16.