专题四　数列

一、单项选择

1.（济宁一模 4） 随着我国新冠疫情防控形势的逐渐好转，某企业开始复工复产. 经统计，2020 年 7 月份到 12 月份的月产量(单位：吨)逐月增加，且各月的产量成等差数列，其中 7 月份的产量为 10 吨，12 月份的产量为 20 吨，则 8 月到 11 月这四个月的产量之和为

A. 48 吨　　B. 54 吨　　C. 60 吨　　D. 66 吨

2.（2021•淄博一模 6） 若等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则“$S_{2020}>0$，$S_{2021}<0$”是“$a_{1010}a_{1011}<0$”的（　　）

A．充分必要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

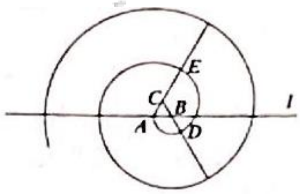
3.（菏泽一模 8） 在等比数列$\{a_n\}$中．$a_1+a_2+a_3+a_4=ln（a_1+a_2+a_3）$．若 $a_1>1$，则（　　）

A．$a_1<a_2$　　B．$a_2<a_3$　　C．$a_3<a_4$　　D．$a_1<a_4$

4.（泰安一模 8） 设 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $a_n>0$，$a_1=\frac{1}{2}$，$S_n<2$，则$\{a_n\}$的公比的取值范围是（　　）

A．$(0,\frac{3}{4}]$　　B．$(0,\frac{2}{3}]$　　C．$(0,\frac{3}{4})$　　D．$(0,\frac{2}{3})$

5.（烟台一模 8） 某校数学兴趣小组设计了一种螺线，作法如下：在水平直线 l 上取长度为 2 的线段 AB，并作等边三角形 ABC，第一次画线：以点 B 为圆心，BA 为半径逆时针画圆弧，交线段 CB 的延长线于点 D；第二次画线：以点 C 为圆心，CD 为半径逆时针画圆弧，交线段 AC 的延长线于点 E；以此类推，得到的螺线如右图所示，则



A.第二次画线的圆弧长度为$\frac{4\pi}{3}$

B.前三次画线的圆弧总长度为4π

C.在螺线与直线 l 恰有 4 个交点（不含 A 点）时停止画线，此时螺线的总长度为 30π

D.在螺线与直线 l 恰有 6 个交点（不含 A 点）时停止画线，此时螺线的总长度为 60π

6.（青岛一模 8） 在抛物线 $x^2=\frac{1}{2}y$ 第一象限内一点(a_n,y_n)处的切线与 x 轴交点的横坐标记为 a_{n-1}，其中 $n\in N^*$，已知 $a_2=32$，S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $m\geq S_n$ 恒成立，则 m 的最小值为（　　）

A.16　　B.32　　C.64　　D.128

7.（德州一模 8） 英国著名物理学家牛顿用“作切线”的方法求函数零点时，给出的“牛顿数列”在航空航

天中应用广泛，若数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，则称数列$\{x_n\}$为牛顿数列．如果函数$f(x)=x^2-x-2$，数列$\{x_n\}$为牛顿数列，设$a_n=\ln\dfrac{x_n-2}{x_n+1}$且$a_1=1$，$x_n>2$，数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，则$S_{2021}=$（　　）

A．$2^{2021}-1$　　　　B．$2^{2021}-2$

C．$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2021}-\dfrac{1}{2}$　　　　D．$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2021}-2$

二、多项选择

8．（2021•临沂一模10）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.（　　）

A．若$S_n=n^2-1$，则$\{a_n\}$是等差数列

B．若$S_n=2^n-1$，则$\{a_n\}$是等比数列

C．若$\{a_n\}$是等差数列，则$S_{99}=99a_{50}$

D．若$\{a_n\}$是等比数列，且$a_1>0$，$q>0$，则$S_{2n-1}•S_{2n+1}>S_{2n}^2$

9.（滨州一模10）已知S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，且$a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$（$n\geqslant3$），则下列结论正确的是（　　）

A．数列$\{a_n+a_{n+1}\}$为等比数列　　　　B．数列$\{a_{n+1}-2a_n\}$为等比数列

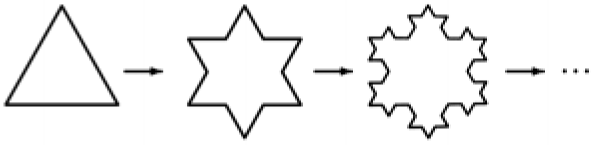
C．$a_n=\dfrac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$　　　　D．$S_{20}=\dfrac{2}{3}(4^{10}-1)$

10.（潍坊一模11）南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法•商功》中出现了如图所示的形状，后人称为“三角垛”．“三角垛”的最上层有1个球，第二层有3个球，第三层有6个球，…，设各层球数构成一个数列$\{a_n\}$，则

第11题

A．$a_4=12$　　　　B．$a_{n+1}=a_n+n+1$　　　　C．$a_{100}=5050$　　　　D．$2a_{n+1}=a_n\cdot a_{n+2}$

11.（济南一模11）1904年，瑞典数学家科赫构造了一种曲线．如图，取一个边长为1的正三角形，在每个边上以中间的$\dfrac{1}{3}$为一边，向外侧凸出作一个正三角形，再把原来边上中间的$\dfrac{1}{3}$擦掉，得到第2个图形，重复上面的步骤，得到第3个图形．这样无限地作下去，得到的图形的轮廓线称为科赫曲线。云层的边缘，山脉的轮廓，海岸线等自然界里的不规则曲线都可用“科赫曲线”的方式来研究，这门学科叫“分形几何学”。下列说法正确的是



A.第 4 个图形的边长为$\dfrac{1}{81}$

B.记第 n 个图形的边数为 a_n,则 $a_{n+1}=4a_n$

C.记第 n 个图形的周长为 b_n,则 $b_n=3\cdot(\dfrac{4}{3})^{n-1}$

D.记第 n 个图形的面积为 S.,则对任意的 $n\in N_+$,存在正实数 M,使得 $S_n<M$

三、填空

12.（济南一模 14）设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若 $S_7=28$,则 $a_2+a_3+a_7$ 的值为_________.

13.（**日照一模** 14）为了贯彻落实习近平总书记在全国教育大会上的讲话精神，2020 年中办、国办联合印发了《关于全面加强和改进新时代学校体育工作的意见》，为落实该文件精神，某中学对女生立定跳远项目的考核要求为：1.33 米得 5 分，每增加 0.03 米，分值增加 5 分，直到 1.84 米得 90 分后每增加 0.1 米，分值增加 5 分，满分为 120 分，若某女生训练前的成绩为 70 分，经过一段时间的训练后，成绩为 105 分则该女生经过训练后跳远增加加了_____米.

14.（2021•淄博一模 15）已知等比数列$\{a_n\}$中，首项 $a_1=2$，公比 $q>1$，a_2，a_3 是函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-6x^2+32x$ 的两个极值点，则数列$\{a_n\}$的前 9 项和是________.

15.（聊城一模 15）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足 $a_1+a_2=2, a_{n+2}-a_n=1+\cos n\pi$，则数列$\left\{a_n\right\}$的前 100 项的和等于_________.

四、解答

16.（滨州一模 17）已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足 $a_1=2$，$b_2=4$，$a_n=2\log_2 b_n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\{a_n\}$中不在数列$\{b_n\}$中的项按从小到大的顺序构成数列$\{c_n\}$，记数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 S_n，求 S_{100}.

17.（潍坊一模 18）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$a_2=6$，$S_n=\frac{1}{2}a_{n+1}+1$.

（1）证明：数列$\{S_n-1\}$为等比数列，并求出S_n；

18.（德州一模 18）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=(n-1)2^{n+1}+2$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\{\frac{1}{\log_2 a_n \log_2 a_{n+2}}\}$的前 n 项和为 T_n，证明：$T_n<\frac{3}{4}$.

19.（菏泽一模 18）已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_{n+1}=2S_n+2$，数列$\{b_n\}$满足 $b_1=2$，$(n+2)b_n=nb_{n+1}$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

（1）分别求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个数，使这 $n+2$ 个数组成一个公差为 c_n 的等差数列，求数列$\{b_nc_n\}$的前 n 项和 T_n.

20.（2021•淄博一模 18）将 $n^2(n\in N^*)$个正数排成 n 行 n 列：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ & & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

其中每一行的数成等差数列，每一列的数成等比数列，并且各列的公比都相等，

若 $a_{11}=1, a_{13}\times a_{33}=1,\ a_{32}+a_{33}+a_{34}=\dfrac{3}{2}$

(1) 求 a_{1n}；

(2) 设 $S_n=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$，求 S_n。

21.（聊城一模 18）在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{ca_n+1}(c>0)$，且 a_1,a_2,a_5 成等比数列.

(1)证明数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=(4n^2+1)a_na_{n+1}$，其前 n 项和为 S_n， 证明： $S_n<n+1$.

22.（烟台一模 17）在①$a_3+a_5=14$，②$S_4=28$，③a_8 是 a_5 与 a_{13} 的等比中项，三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并给出解答.

问题：已知$\{a_n\}$为公差不为零的等差数列，其前 n 项和为 S_n，$\{b_n\}$为等比数列，其前 n 项和 $T_n=2^n+\lambda$，λ 为常数，$a_1=b_1$，____________.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）令 $c_n=[\lg a_n]$，其中[x]表示不超过 x 的最大整数，求 $c_1+c_2+c_3+\ldots+c_{100}$ 的值.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

23.（泰安一模 17）在①$a_8=2a_4+1$，②4 是 a_1，a_3 的等比中项，③$S_5=4a_1a_2$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并作答.

问题：已知各项均为正数的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$S_3=a_6-a_1$，且_______.

（1）求 a_n；

（2）设数列（$\frac{1}{S_n+n}$}的前 n 项和为 T_n，试比较 T_n 与$\frac{a_n}{a_{n+1}}$的大小，并说明理由.

24.（青岛一模 17）从“① $S_n=n(n+\frac{a_1}{2})$; ② $S_2=a_3,a_4=a_1a_2$ ③ $a_1=2,a_4$是a_2,a_8的等比中项”，三个条件任选一个，补充到下面的横线处，并解答。

已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，公差 d 不等于 0，________，$n\in N^*$。

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（2）若$b_n=S_{2^{n+1}}-S_{2^n}$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为W_n,求W_n。

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个条件计分。

25.（济宁一模 18）在①$S_n=2a_n-3$；②$S_n=3\cdot2^n-3$，③$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$，$a_1=3$，$a_4=24$．这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并解决该问题．已知数列$\{a_n\}$满足______（$n\in\mathbf{N}^*$），若 $b_n=a_n\cdot\log_2\frac{a_{n+1}}{3}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

26.（2021•临沂一模 18）在①$\frac{S_n}{n}=\frac{a_{n+1}}{2}$ ②$a_n a_{n+1}=2S_n$，③$a_n^2+a_n=2S_n$这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答该问题

已知正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n,a_1=1,满足_____.

(1)求a_n;

(2)若$b_n=(a_n+1)2^{a_n}$·,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和T_n

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分

27.（日照一模 18）在①已知数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}-2a_n=0$，$a_3=8$ ②等比数列$\{a_n\}$中，公比 q=2, 前 5 项和为 62，这两个条件中任选一个，并解答下列问题，(若选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分）.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设$b_n=\dfrac{n}{a_n}$数列$\{b_n\}$的前 n 项和为T_n, 若$2T_n>m-2022$对$n\in N^*$恒成立，求正整数 m 的最大值.

28.（济南一模 22）已知正项数列$\{a_n\}$,a_1=1,$a_{n+1}=\frac{1}{2}\ln(a_n+1)$,n∈ N_+.

证明：（1)$a_{n+1}<a_n$;　　(2)$a_n-2a_{n+1}<a_n\cdot a_{n+1}$;　　(3) $\frac{1}{2^n}<a_n\le\frac{1}{2^{n-1}}$.

答案解析

一、单项选择

1.【答案】C

【解析】设 7 月份产量为 a_1，8 月份产量为 a_2，……则 12 月份产量为 a_6，由题 $a_1=10$，$a_6=20$，∴

$a_2+a_3+a_4+a_5=2(a_1+a_6)=60$　故选 C

2.【答案】B

【解析】因为 $S_{2020}>0$，$S_{2021}<0$，等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，

所以$\dfrac{(a_1+a_{2020})\times 2020}{2}>0$，$\dfrac{(a_1+a_{2021})\times 2021}{2}<0$，

即 $a_1+a_{2020}=a_{1010}+a_{1011}>0$，$a_1+a_{2021}=2a_{1011}<0$，

所以 $a_{1010}>0$，$a_{1011}<0$，且 $a_{1010}>|a_{1011}|$，

所以 $a_{1010}a_{1011}<0$，

当 $a_{1010}a_{1011}<0$ 时，得 $a_{1010}>0$，$a_{1011}<0$，或 $a_{1010}<0$，$a_{1011}>0$；

故“$S_{2020}>0$，$S_{2021}<0$”可以推出“$a_{1010}a_{1011}<0$”，

但“$a_{1010}a_{1011}<0$”不能推出“$S_{2020}>0$，$S_{2021}<0$”，

所以“$S_{2020}>0$，$S_{2021}<0$”是“$a_{1010}a_{1011}<0$”的充分不必要条件．

故选：B．

3.【答案】B

【解析】当 $q>0$ 时，$a_1+a_2+a_3+a_4>a_1+a_2+a_3>\ln(a_1+a_2+a_3)$，不符合题意；

当 $q<-1$ 时，$a_1+a_2+a_3+a_4<0$，$a_1+a_2+a_3>a_1$，所以 $\ln(a_1+a_2+a_3)>\ln a_1>0$，不符合题意；

故 $-1<q<0$，所以 $a_2<a_3$．

故选：B．

4.【答案】A

【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，则 $q\neq 1$．

∵ $a_n>0$，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$S_n<2$，

∴$\dfrac{1}{2}\times q^{n-1}>0$，$\dfrac{\frac{1}{2}(1-q^n)}{1-q}<2$，

∴$1>q>0$．

∴$1\leqslant 4-4q$，解得 $q\leqslant\frac{3}{4}$.

综上可得：$\{a_n\}$的公比的取值范围是：$(0,\ \frac{3}{4}]$.

故选：A.

5.【答案】 D

【解析】第二次画线时，半径为 CB+BD=4，圆心角为$\frac{2\pi}{3}$，∴圆弧长度为 $4\times\frac{2\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}$;

第三次画线时，以 A 为圆心，AE 为半径，AE=6，圆心角为$\frac{2\pi}{3}$，∴圆弧长度为 $6\times\frac{2\pi}{3}=4\pi$

所以前三次画线的圆弧总长度为 8π，

螺线与直线 l 恰有四个交点时，一共画了 6 段圆弧，这 6 段圆弧组成了一个首项是$\frac{4\pi}{3}$，公差$d=\frac{4\pi}{3}$的等差数列，所以$S_6=\frac{6(\frac{4\pi}{3}+\frac{24\pi}{3})}{2}=28\pi$，当恰有 6 个交点时，一共画了 9 段圆弧，$S_9=\frac{9(\frac{4\pi}{3}+\frac{36\pi}{3})}{2}=60\pi$，故选 D

6.【答案】 D

【解析】由$x^2=\frac{1}{2}y$，得$y'=4x$，所以抛物线在点(a_n,y_n)处得切线为 $y-y_n=4a_n(x-a_n)$，即$y=4a_n\cdot x-2a_n{}^2$，则其与 x 轴交点横坐标为$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$，因此$\{a_n\}$是以$\frac{1}{2}$为公比得等比数列，由 $a_2=32$，得 $a_1=64$，$S_n=\frac{64[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=128-128\left(\frac{1}{2}\right)^n<128$，所以 m≥128，故选 D。

7.【答案】 A

【解析】∵$f(x)=x^2-x-2$，

∴$f'(x)=2x-1$，

又∵$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n{}^2-x_n-2}{2x_n-1}$，

∴$x_{n+1}+1=x_n-\frac{x_n{}^2-x_n-2}{2x_n-1}+1=\frac{(x_n+1)^2}{2x_n-1}$，

$x_{n+1}-2=x_n-2-\frac{x_n{}^2-x_n-2}{2x_n-1}=\frac{(x_n-2)^2}{2x_n-1}$，

∴$\frac{x_{n+1}-2}{x_{n+1}+1}=\frac{(x_n-2)^2}{(x_n+1)^2}=\left(\frac{x_n-2}{x_n+1}\right)^2$，

∵$a_n=ln\frac{x_n-2}{x_n+1}$且 $a_1=1$，$x_n>2$，

$\therefore a_{n+1}=ln\frac{x_{n+1}-2}{x_{n+1}+1}=ln\left(\frac{x_n-2}{x_n+1}\right)^2=2ln\frac{x_n-2}{x_n+1}=2a_n$，

∴数列$\{a_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列，

$\therefore S_{2021}=\frac{1-2^{2021}}{1-2}=2^{2021}-1$，

故选：A.

二、多项选择

8.【答案】BC

【解析】若 $S_n=n^2-1$，则有 $a_1=S_1=0$，$a_2=S_2-S_1=2^2-1^2=3$，$a_3=S_3-S_2=3^2-2^2=5$，$2a_2\neq a_1+a_3$，

此时数列$\{a_n\}$不是等差数列，∴选项 A 错误；

若 $S_n=2^n-1$，则当 $n=1$ 时，有 $a_1=S_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，有 $a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，故 $a_n=2^{n-1}$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，此时数列$\{a_n\}$是等比数列，∴选项 B 正确；

又由等差数列的性质可得：$S_{99}=\frac{99(a_1+a_{99})}{2}=99a_{50}$，故选项 C 正确；

∵当 $a_1>0$，$q=1$ 时，有 $a_n=a_1$，$S_{2n-1}S_{2n+1}=(2n-1)(2n+1)a_1^2=(4n^2-1)a_1^2$，$S_{2n}^2=(2na_1)^2=4n^2a_1^2$，

此时 $S_{2n-1}S_{2n+1}<S_{2n}^2$，故选项 D 错误，

故选：BC.

9.【答案】ABD

【解析】$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$，$a_n+a_{n-1}=2a_{n-1}+2a_{n-2}=2(a_{n-1}+a_{n-2})$ $(n\geqslant 3)$，

因为 $a_1=a_2=1$，所以 $a_3=a_1+2a_2=3$，

$a_3+a_2=4=2(a_2+a_1)$，

所以数列$\{a_n+a_{n+1}\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列，

所以 $a_n+a_{n+1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$，故选项 A 正确；

$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$，

$a_n-2a_{n-1}=2a_{n-2}-a_{n-1}=-(a_{n-1}-2a_{n-2})$，

$a_3-2a_2=3-2=1$，$a_2-2a_1=1-2=-1$，

所以$\{a_{n+1}-2a_n\}$是首项为 -1，公比为 -1 的等比数列，

$a_{n+1}-2a_n=-1\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^n$，故选项 B 正确；

$\begin{cases} a_{n+1}+a_n=2^n \\ a_{n+1}-2a_n=(-1)^n \end{cases}$，所以 $a_n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$，故选项 C 错误；

$S_{20}=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$=\frac{2-(-1)}{3}+\frac{2^2-(-1)^2}{3}+\cdots+\frac{2^{20}-(-1)^{20}}{3}$

$=\frac{(2+2^2+\cdots+2^{20})-[(-1)+(-1)^2+\cdots+(-1)^{20}]}{3}$

$=\frac{1}{3}\times[\frac{2(1-2^{20})}{1-2}-\frac{(-1)\times[1-(-1)^{20}]}{1-(-1)}]$

$=\frac{2}{3}(2^{20}-1)=\frac{2}{3}(4^{10}-1)$，故选项 D 正确．

故选：ABD．

10.【答案】BC

【解析】由题意知 $a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，所以 $a_4=10$，A 错误；$a_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$，则 $a_{n+1}-a_n=n+1$，故 B 正确；$a_{100}=\frac{100\times 101}{2}=5050$，C 正确；$a_2=3$，$a_3=6$，$a_4=10$，即 $2a_3=a_2\cdot a_4$，D 错误．综上选 BC．

11.【答案】BCD

【解析】易知，各个图形的边长成等比数列，且 $q=\frac{1}{3}$，因此可设边长为 $c_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，则 $C_4=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，A 错误；易知，各个图形的边数也成等比数列且 q=4，所以 $a_n=3\cdot 4^{n-1}$，B 正确；周长为 $b_n=a_nc_n=3\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$，C 正确；由极限思想易知，当 n→∞时，图形无限接近于圆，故 $S_n<S_{圆}=M$，D 正确；故选 BCD。

三、填空

12.【答案】12

【解析】因为 $S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4=28$，所以 $a_1+3d=4$，

$a_2+a_3+a_7=(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+6d)=3(a_1+3d)=3\times 4=12$.

13. 【答案】0.42

【解析】设等差数列 $\{a_n\}:a_1=5,d=5,$ 则 $a_n=5n$.由题知 $a_n=70,\therefore n=14$,

此时，该女生的跳远为 $1.33+(14-1)\times 0.03=1.72$ 米.

设等差数列$\{b_n\}:b_1=90,d=5,$，则$b_m=5m+85$.由题$b_m=105$ ，则$m=4$.

此时，该女生的跳远为$1.84+(4-1)\times0.1=2.14$ 米，

所以，该女生在训练过程中跳远增加了$2.14-1.72=0.42$米.

14.【答案】1022

【解答】函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-6x^2+32x$，则 $f'(x)=x^2-12x+32$，

因为 a_2，a_3 是函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-6x^2+32x$ 的两个极值点，

所以 a_2，a_3 是方程 $x^2-12x+32=0$ 的两个根，

则$\begin{cases}a_2+a_3=12\\a_2a_3=32\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_2=4\\a_3=8\end{cases}$或$\begin{cases}a_2=8\\a_3=4\end{cases}$，

又等比数列$\{a_n\}$中，公比 $q>1$，

所以$\begin{cases}a_2=4\\a_3=8\end{cases}$，所以 $q=\frac{a_3}{a_2}=2$，

又首项 $a_1=2$，

所以 $S_9=\frac{2(1-2^9)}{1-2}=1022$.

故答案为：1022.

15.【答案】2550

四、解答

16.【解析】解：（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，

由 $a_1=2$，$b_2=4$，$a_n=2\log_2b_n$，可得 $b_1=2$，$a_2=4$，

则 $d=2$，$q=2$，$a_n=2n$，$b_n=2^n$，$n\in\mathbf{N}^*$；

（2）由(1)$b_n=2^n=2\cdot2^{n-1}=a_{2^{n-1}}$

即 b_n是数列$\{a_n\}$中的第 2^{n-1}项

设数列{an}的前 n 项和为 Pn，数列{bn}的前 n 项和为 Qn，

因为 b7=$a_{2^6}=a_{64},b_8=a_{2^7}=a_{128}$

所以数列$\{c_n\}$的前 100 项是由数列$\{a_n\}$的前 107 项去掉数列{bn}的前 7 项后构成的，

所以 $S_{100}=P_{107}-Q_7=\frac{107\times(2+214)}{2}-\frac{2-2^8}{1-2}=11302$

17.【解析】（1）由已知 $S_n=\frac{1}{2}(S_{n+1}-S_n)+1$，

整理得 $S_{n+1}=3S_n-2$，

所以 $S_{n+1}-1=3(S_n-1)$,

令 $n=1$，得 $S_1=\frac{1}{2}a_2+1=4$，所以 $S_1-1=3$,

所以 $\{S_n-1\}$ 是以 3 为首项，3 为公比的等比数列，

所以 $S_n-1=(S_1-1)\times 3^{n-1}=3^n$,

所以 $S_n=3^n+1$；

（2）由（1）知，$S_n=3^n+1$,

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n+1-(3^{n-1}+1)=2\times 3^{n-1}$,

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=4$,

所以 $a_n=\begin{cases}4, n=1,\\ 2\times 3^{n-1}, n\geq 2,\end{cases}$

所以 $\frac{1}{a_n}=\begin{cases}\frac{1}{4}, n=1,\\ \frac{1}{2}\times(\frac{1}{3})^{n-1}, n\geq 2,\end{cases}$

所以 $T_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{6}(1-\frac{1}{3^{n-1}})}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\times 3^{n-1}}$.

18.【解析】（1）由 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=(n-1)2^{n+1}+2$ 可得：$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=(n-2)2^n+2$（$n\geq 2$），

两式相减得：$na_n=(n-1)2^{n+1}-(n-2)2^n=n\times 2^n$，即 $a_n=2^n$，$n\geq 2$,

又当 $n=1$ 时，有 $a_1=2$ 也适合上式，

$\therefore a_n=2^n$；

（2）证明：由（1）可得：$\frac{1}{\log_2 a_n \log_2 a_{n+2}}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$，

$\therefore T_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})<\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})$
$=\frac{3}{4}$.

19.【解析】（1）$\because a_{n+1}=2S_n+2$,

$\therefore a_{n+2}=2S_{n+1}+2$,

两式相减整理得：$a_{n+2}=3a_{n+1}$,

∴等比数列$\{a_n\}$的公比 $q=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=3$，

又当 $n=1$ 时，有 $a_2=2S_1+2$，即 $3a_1=2a_1+2$，解得：$a_1=2$，

∴$a_n=2\times3^{n-1}$，

∵$b_1=2$，$(n+2)b_n=nb_{n+1}$，

∴$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+2}{n}$，

∴$b_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}\times\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\times\frac{b_{n-2}}{b_{n-3}}\times\cdots\times\frac{b_3}{b_2}\times\frac{b_2}{b_1}\times b_1=\frac{n+1}{n-1}\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n-1}{n-3}\times\cdots\times\frac{4}{2}\times\frac{3}{1}\times2=n(n+1)$，$n\geqslant2$，

又当 $n=1$ 时，$b_1=2$ 也适合上式，

∴$b_n=n(n+1)$；

（2）由（1）可得：$c_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1}=\frac{2\times3^n-2\times3^{n-1}}{n+1}=\frac{4\times3^{n-1}}{n+1}$，

∴$b_nc_n=4n\times3^{n-1}$，

∴$T_n=4(1\times3^0+2\times3^1+3\times3^2+\cdots+n\times3^{n-1})$，

又 $3T_n=4(1\times3^1+2\times3^2+\cdots+n\times3^n)$，

两式相减得：$-2T_n=4(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\times3^n)=4(\frac{1-3^n}{1-3}-n\times3^n)$，

整理得：$T_n=(2n-1)\cdot3^n+1$.

20.【解析】（1）设第一行数的公差为 d，各列的公比为 q，

由题意可知 $a_{13}\cdot a_{23}\cdot a_{33}=a_{23}{}^3=1$，解得 $a_{23}=1$， ·········1 分

$a_{32}+a_{33}+a_{34}=3a_{33}=\frac{3}{2}$，解得 $a_{33}=\frac{1}{2}$， ·········2 分

则 $q=\frac{a_{33}}{a_{23}}=\frac{1}{2}$. ·········3 分

由 $a_{23}=a_{13}\cdot q=(a_{11}+2d)q=(1+2d)\cdot\frac{1}{2}=1$，解得 $d=\frac{1}{2}$ ， ·········4 分

因此 $a_{1n}=a_{11}+(n-1)d=1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$. ·········6 分

（2）$a_{nn}=a_{1n}\cdot q^{n-1}=\frac{n+1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$，　………7 分

可得 $S_n=2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\cdots+(n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$，　………8 分

两边同时乘以 $\frac{1}{2}$ 可得：

$\frac{1}{2}S_n=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\cdots+(n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，　………9 分

上述两式相减可得：

$$\frac{1}{2}S_n=1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-(n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-(n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$=\frac{1}{2}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-(n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.　………11 分

因此 $S_n=3-(n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.　………12 分

21.证明：(1)由 $a_{n+1}=\frac{a_n}{ca_n+1}$，得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+c$，即 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=c$，

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列，其公差为 c，首项为 1，………………………………2 分

因此，$\frac{1}{a_n}=1+(n-1)c, a_n=\frac{1}{1+(n-1)c}$，………………………………………3 分

由 a_1,a_2,a_5 成等比数列，得 $a_2^2=a_1a_5$，即 $\left(\frac{1}{c+1}\right)^2=1\times\frac{1}{4c+1}$，

解得 c=2 或 c=0(舍去)，故 $a_n=\frac{1}{2n-1}$．…………………………………………………6 分

(2)因为 $b_n=\frac{4n^2+1}{4n^2-1}=1+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=1+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$，………………………8 分

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=n+\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=n+1-\dfrac{1}{2n+1}$， ……………………………………………………………………11 分

因为 $\dfrac{1}{2n+1}>0$，所以 $S_n<n+1$． ……………………………………………………12 分

22.

解：若选①:（1）由已知 $b_2=T_2-T_1=2$， $b_3=T_3-T_2=4$，

所以 $q=\dfrac{b_3}{b_2}=2$，通项 $b_n=b_2q^{n-2}=2\times2^{n-2}=2^{n-1}$． ……………………………2 分

故 $a_1=b_1=1$． ………………………………………………3 分

不妨设 $\{a_n\}$ 的公差为 d．则 $1+2d+1+4d=14$， ……………………………………4 分

解得 $d=2$， 所以 $a_n=2n-1$． ……………………………………………………6 分

（2）由 $c_n=[\lg a_n]$，则 $c_1=c_2=c_3=c_4=c_5=0$， $c_6=c_7=\cdots=c_{50}=1$，

$c_{51}=c_{52}=\cdots=c_{100}=2$， ……………………………………9 分

所以 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{100}=1\times45+2\times50=145$． ……………………………10 分

若选②:（1）由已知 $b_2=T_2-T_1=2$， $b_3=T_3-T_2=4$，

所以 $q=\dfrac{b_3}{b_2}=2$，通项 $b_n=b_2q^{n-2}=2\times2^{n-2}=2^{n-1}$． ……………………………2 分

故 $a_1=b_1=1$． ………………………………………………3 分

不妨设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $4\times1+\dfrac{4\times3}{2}\times d=28$， ……………………………4 分

解得 $d=4$，所以 $a_n=4n-3$． ……………………………………………………6 分

（2）由 $c_n=[\lg a_n]$，则 $c_1=c_2=c_3=0$， $c_4=c_5=\cdots=c_{25}=1$，

$c_{26}=c_{27}=\cdots=c_{100}=2$， ……………………………………………………9 分

所以 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{100}=1\times22+2\times75=172$． ……………………………10 分

若选③:（1）由已知 $b_2=T_2-T_1=2$， $b_3=T_3-T_2=4$，

所以 $q=\dfrac{b_3}{b_2}=2$，通项 $b_n=b_2q^{n-2}=2\times2^{n-2}=2^{n-1}$． ……………………………2 分

故 $a_1=b_1=1$． ………………………………………………3 分

不妨设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $(1+7d)^2=(1+4d)(1+12d)$， ……………………4 分

因为 $d\neq0$，解得 $d=2$，所以 $a_n=2n-1$． ……………………………6 分

（2）由 $c_n=[\lg a_n]$，则 $c_1=c_2=c_3=c_4=c_5=0$， $c_6=c_7=\cdots=c_{50}=1$，

$c_{51}=c_{52}=\cdots=c_{100}=2$， ……………………………………9 分

所以 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{100}=1\times45+2\times50=145$． ……………………………10 分

23.【解析】（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d（$d>0$），

由 $S_3=a_6-a_1$，可得 $3a_1+3d=5d$，即 $3a_1=2d$，

选①$a_8=2a_4+1$，即有 $a_1+7d=2a_1+6d+1$，即 $d=a_1+1$，

由$\begin{cases}3a_1=2d\\d=a_1+1\end{cases}$，解得 $a_1=2$，$d=3$，

则 $a_n=2+3(n-1)=3n-1$；

选②4 是 a_1，a_3 的等比中项，即有 $a_1a_3=16$，即 $a_1(a_1+2d)=16$，

由$\begin{cases}3a_1=2d\\a_1(a_1+2d)=16\end{cases}$，解得 $a_1=2$，$d=3$，

则 $a_n=2+3(n-1)=3n-1$；

选③$S_5=4a_1a_2$，即有 $5a_1+10d=4a_1(a_1+d)$，

由$\begin{cases}3a_1=2d\\5a_1+10d=4a_1(a_1+d)\end{cases}$，解得 $a_1=2$，$d=3$，

则 $a_n=2+3(n-1)=3n-1$；

（2）$S_n=2n+\frac{1}{2}n(n-1)\cdot 3=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$，

$S_n+n=\frac{3}{2}n(n+1)$，

$\frac{1}{S_n+n}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

$T_n=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{3(n+1)}$，

$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{3n-1}{3n+2}$，

由$\frac{2n}{3(n+1)}-\frac{3n-1}{3n+2}=\frac{3(1-n^2)-2n}{(3n+3)(3n+2)}<0$，

可得 $T_n<\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

24.【解析】选①，

（1）$S_n=n\left(n+\frac{a_1}{2}\right)=n^2+\frac{a_1}{2}n$，令 $n=1\Rightarrow a_1=1+\frac{a_1}{2}\Rightarrow a_1=2$

$\therefore S_n=n^2+n$①，当$n\geq 2$时，$S_{n-1}=(n-1)^2+n-1$②

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n$，而$a_1=2$，$\therefore a_n=2n$；

若选择②：

因为$S_2=a_3$，所以$a_1+a_2=a_3$，即$2a_1+d=a_1+2d$，所以$d=a_1$

所以$a_n=nd$

因为$a_4=a_1a_2$，所以$4d=2d^2$

解得$d=2$（$d=0$舍）

所以$a_n=2n$

若选择③：

因为a_4是a_2,a_8的等比中项，所以$a_4^2=a_2a_8$

因为$a_1=2$，所以$(2+3d)^2=(2+d)(2+7d)$

解得$d=2$（$d=0$舍）

所以$a_n=2+(n-1)\times 2=2n$

（2）$S_n=n^2+n$，$b_n=(2^{n+1})^2+2^{n+1}-(2^n)^2-2^n=3\cdot 2^{2n}+2^n$

$\therefore W_n=\dfrac{12\cdot[1-4^n]}{1-4}+\dfrac{2\cdot(1-2^n)}{1-2}=4(4^n-1)+2(2^n-1)=4^{n+1}+2^{n+1}-6$.

25.【解析】当选条件①时：

$\because S_n=2a_n-3$，

$\therefore S_{n-1}=2a_{n-1}-3$（$n\geqslant 2$），

两式相减得：$a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}$，$n\geqslant 2$，

又当 $n=1$ 时，有 $S_1=2a_1-3$，解得：$a_1=3$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$是首项为 3，公比为 2 的等比数列，

$\therefore a_n=3\times 2^{n-1}$，

$\therefore b_n=a_n\bullet\log_2\dfrac{a_{n+1}}{3}=3\times 2^{n-1}\times\log_2 2^n=3n\times 2^{n-1}$，

$\therefore T_n=3$（$1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+n\times 2^{n-1}$），

又 $2T_n=3$（$1\times 2^1+2\times 2^2+\cdots+n\times 2^n$），

两式相减得：$-T_n=3$（$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\times 2^n$）$=3$（$\dfrac{1-2^n}{1-2}-n\times 2^n$），

整理得：$T_n=3[(n-1)\times 2^n+1]$.

当选条件②时：

$\because S_n=3\bullet 2^n-3$，

$\therefore S_{n-1}=3\cdot 2^{n-1}-3$（$n\geqslant 2$），

两式相减得：$a_n=3\times 2^{n-1}$，$n\geqslant 2$，

又当 $n=1$ 时，有 $S_1=3\times 2-3=3$ 也适合上式，

$\therefore a_n=3\times 2^{n-1}$，

$\therefore b_n=a_n\cdot \log_2\dfrac{a_{n+1}}{3}=3\times 2^{n-1}\times \log_2 2^n=3n\times 2^{n-1}$，

$\therefore T_n=3$（$1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+n\times 2^{n-1}$），

又 $2T_n=3$（$1\times 2^1+2\times 2^2+\cdots+n\times 2^n$），

两式相减得：$-T_n=3$（$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\times 2^n$）$=3$（$\dfrac{1-2^n}{1-2}-n\times 2^n$），

整理得：$T_n=3[(n-1)\times 2^n+1]$.

当选条件③时：

$\because a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$，

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是等比数列，

设数列$\{a_n\}$的公比为 q，

由 $a_1=3$，$a_4=24$，可得：$q^3=\dfrac{a_4}{a_1}=8$，解得 $q=2$，

$\therefore a_n=3\times 2^{n-1}$，

$\therefore b_n=a_n\cdot \log_2\dfrac{a_{n+1}}{3}=3\times 2^{n-1}\times \log_2 2^n=3n\times 2^{n-1}$，

$\therefore T_n=3$（$1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+n\times 2^{n-1}$），

又 $2T_n=3$（$1\times 2^1+2\times 2^2+\cdots+n\times 2^n$），

两式相减得：$-T_n=3$（$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\times 2^n$）$=3$（$\dfrac{1-2^n}{1-2}-n\times 2^n$），

整理得：$T_n=3(n-1)\times 2^n+3$.

26.【解析】若选①，则 $2S_n=na_{n+1}$

当 $n=1$ 时，$2S_1=a_2$，得 $a_2=2$ ………………………………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_{n-1}=(n-1)a_n$，

得 $2a_n=na_{n+1}-(n-1)a_n$，

即 $(n+1)a_n=na_{n+1}$

$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$ ………………………………………… 3 分

$\therefore a_n=\frac{n}{n-1}\times\frac{n-1}{n-2}\times\cdots\times\frac{2}{1}\times a_1=n$ ………………………… 5 分

当 $n=1$ 时也成立，

$\therefore a_n=n$. ………………………………………… 6 分

若选②即 $2S_n=a_{n+1}a_n$

当 $n=1$ 时，$2S_1=a_2a_1$，得 $a_2=2$ ………………………… 1 分

当 $n\geq1$ 时，$2S_{n-1}=a_na_{n-1}$

得 $2a_n=a_na_{n+1}-a_na_{n-1}$

由 $a_n>0$，得 $a_{n+1}-a_{n-1}=2$ ………………………………………… 3 分

又 $\because a_1=1, a_2=2$.

$\therefore \{a_{2n}\}$ 是公差为 2，首项为 2 的等差数列，$\{a_{2n-1}\}$ 是公差为 2，首项为 1 的等差数列

故 $a_n=n$ ………………………………………… 6 分

若选③，即 $a_n^2+a_n=2S_n$

当 $n\geq2$ 时，$a_{n-1}^2+a_{n-1}=2S_{n-1}$

两式相减得 $a_n^2+a_n-a_{n-1}^2-a_{n-1}=2a_n$，

即 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$ ………………………………………… 3 分

由 $a_n>0$，得 $a_n-a_{n-1}-1=0$

$\therefore \{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列

故 $a_n=n$ ………………………………………… 6 分

(2) $b_n=(n+1)\cdot 2^n$ ………………………………………… 7 分

$T_n=2\times2+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+(n+1)\times2^n$

$2T_n=\quad 2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n+(n+1)\times2^{n+1}$ ………………………… 8 分

两式相减，得 $-T_n=4+2^2+2^3+\cdots+2^n-(n+1)\times2^{n+1}$ ………………………… 9 分

$=4+\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(n+1)\times2^{n+1}$ ………………………… 10 分

$=4-4+2^{n+1}-(n+1)\times2^{n+1}$

$=-n\cdot2^{n+1}$

故 $T_n=n\cdot2^{n+1}$ ………………………………………… 12 分

27. 【解析】(1) 选择条件①：设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比为 q，依题意，

$a_{n+1}-2a_n=0$ ，

得 $\{a_n\}$ 为等比数列，

所以 $q=2$，$a_3=8$ ，

解得 $q=2$，$a_1=2$，

$a_n=2^n$

选择条件②，设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比 $q=2$，前 5 项和为 62，

依题意得，$a_1=2, q=2$，

$a_n=2^n$

（2）$b_n=\frac{n}{2^n}$ 记 $T_n=(\frac{1}{2})+2\cdot(\frac{1}{2})^2+\ldots+n\cdot(\frac{1}{2})^n$，①

$\frac{1}{2}T_n=(\frac{1}{2})^2+2\cdot(\frac{1}{2})^3+\ldots+(n-1)\cdot(\frac{1}{2})^n+n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$，②

两式相减得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\ldots+(\frac{1}{2})^n-n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$，

即 $T_n=2-(2+n)(\frac{1}{2})^n$，

因为 $T_{n+1}-T_n=(n+1)(\frac{1}{2})^{n+1}>0$,

所以，数列$\{T_n\}$单调递增，最小值 $T_1=\frac{1}{2}$，

所以 $2\times\frac{1}{2}>m-2022$,

所以 $m<2023$，m 的最大值是 2022

28.【解析】

（1）先证明 $\ln(x+1)<x$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

记 $f(x)=\ln(x+1)-x$，则 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $x>0$ 时，$f(x)<f(0)=0$，

所以 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\ln(x+1)<x$.

又 $a_n>0$，所以 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\ln(a_n+1)<\frac{1}{2}a_n$，即 $a_n>2a_{n+1}>a_{n+1}$.

即 $a_{n+1}<a_n$，得证.

（2）要证 $a_n-2a_{n+1}<a_n\cdot a_{n+1}$ 成立，

只需证 $a_n-\ln(a_n+1)<\frac{1}{2}\cdot a_n\cdot\ln(a_n+1)$ 成立，即证 $\ln(a_n+1)>\frac{2a_n}{a_n+2}$ 成立；

记 $g(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}$，$x\in(0,+\infty)$，

则 $g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=0$，

所以 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\ln(x+1)>\frac{2x}{x+2}$，

又 $a_n>0$，所以 $\ln(a_n+1)>\dfrac{2a_n}{a_n+2}$，得证.

（3）由（2）知 $a_n-2a_{n+1}<a_n\cdot a_{n+1}$，即 $\dfrac{1}{a_{n+1}}<\dfrac{2}{a_n}+1$，

则 $\dfrac{1}{a_{n+1}}+1<\dfrac{2}{a_n}+2=2(\dfrac{1}{a_n}+1)$，即 $\dfrac{\dfrac{1}{a_{n+1}}+1}{\dfrac{1}{a_n}+1}<2$，

又 $\dfrac{1}{a_1}+1=2$，所以 $\dfrac{1}{a_n}+1\leqslant 2\cdot 2^{n-1}=2^n$，

所以 $a_n\geqslant\dfrac{1}{2^n-1}>\dfrac{1}{2^n}$；

由（1）知 $a_n>2a_{n+1}$，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<\dfrac{1}{2}$，又 $a_1=1$，

则 $a_n\leqslant 1\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-1}=(\dfrac{1}{2})^{n-1}$.

综上 $\dfrac{1}{2^n}<a_n\leqslant\dfrac{1}{2^{n-1}}$.