专题三　三角函数与解三角形

一、单项选择

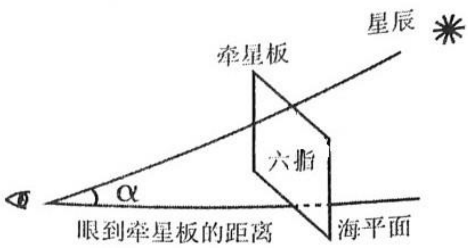
1.（济南一模 1） 已知 $\alpha\in(0,\pi)$,若 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$，则 $\tan\alpha$ 的值为

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

2.（2021•淄博一模 4） 已知 $f(x)=\cos x(\cos x+\sqrt{3}\sin x)$ 在区间$[-\dfrac{\pi}{3}，m]$上的最大值是$\dfrac{3}{2}$，则实数 m 的最小值是（　　）

A. $\dfrac{\pi}{12}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $-\dfrac{\pi}{12}$　　D. $\dfrac{\pi}{6}$

3.（日照一模 4） 明朝早期，郑和七下西洋过程中，将中国古代天体测量方面所取得的成就创造性地应用于航海，形成了一套先进的航海技术——“过洋牵星术”，简单地说，就是通过观测不同季节、时辰的日月星辰在天空运行的位置和测量星辰在海面以上的高度来判断水位. 其采用的主要工具是牵星板，其由 12 块正方形模板组成，最小的一块边长约 2 厘米（称一指），木板的长度从小到大依次成等差数列，最大的边长约 24 厘米（称十二指）. 观测时，将木板立起，一手拿着木板，手臂伸直，眼睛到木板的距离大约为 72 厘米，使牵星板与海平面垂直，让板的下缘与海平面重合，上边缘对着所观测的星辰依高低不同替换、调整木板，当被测星辰落在木板上边缘时所用的是几指板，观测的星辰离海平面的高度就是几指，然后就可以推算出船在海中的地理纬度。如图所示，若在一次观测中，所用的牵星板为六指板，则 $\sin2\alpha$ 约为



A. $\frac{12}{35}$　　B. $\frac{12}{37}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{3}$

4.（德州一模 5） 已知 $\sin\alpha=\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{1}{3}$，则 $\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{6})$ 的值为（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $-\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

5.（青岛一模 6） 已知角 θ 终边上有一点 P（$\tan\dfrac{4}{3}\pi,2\sin(-\dfrac{17}{6}\pi)$），则 $\cos\theta$ 的值为（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. 日照一模 7）将函数 y=sinx 的图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位，得到函数 y=f(x)的图象，则下列说法正确的是

A. y=f(x)是奇函数　　　　B. y=f(x)的周期为π

C. y=f(x)的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$对称　　　　D. y=f(x)的图象关于直线 x=$\frac{\pi}{2}$对称

7.（滨州一模 8）将函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x-1$ 的图象向右平移Φ$\left(0<\Phi<\frac{\pi}{2}\right)$个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图像，对于满足$|f(x_1)-g(x_2)|=4$ 的 x_1，x_2，当$|x_1-x_2|$最小值为$\frac{\pi}{6}$时，φ=（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　　　B. $\frac{\pi}{4}$　　　　C. $\frac{\pi}{2}$　　　　D. $\frac{5\pi}{12}$

二、多项选择

8.（青岛一模 10）已知向量$\vec{a}=\left(2\sin^4\frac{x}{2},\cos^4\frac{x}{2}-f(x)\right)$，$\vec{b}=\left(1,-\frac{1}{2}\right)$，若$\vec{a}$与$\vec{b}$共线，则下列说法正确的是（　）

A.将 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $y=\frac{1}{4}\cos(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{3}{4}$ 的图像

B.函数 $f(x)$ 的最小正周期为π

C.直线 $x=\frac{3\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 图像的一条对称轴

D.函数 $f(x)$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$上单调递减

9.（济宁一模 10）将函数$f(x)=\sin(2x-\frac{2\pi}{3})$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后得到函数 g(x)的图象,则下列说法正确的是

A. $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　B. $(\frac{\pi}{6},0)$是函数 g(x)图象的一个对称中心

C. 函数 g(x)在$[0,\frac{\pi}{4}]$上单调递增　　　　D. 函数 g(x)在$[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$上的值域是$[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$

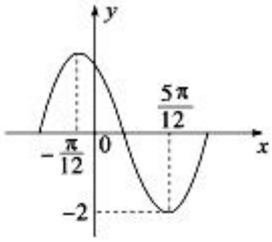
10.（聊城一模 11）若函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)+1(\omega>0)$在$[0,\ \pi]$上恰有三个零点，则

A. ω的取值范围为$\left[\frac{13}{6},\frac{7}{2}\right)$　　　　B. $f(x)$在$[0,\ \pi]$上恰有两个极大值点

C. $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上无极小值点　　　　D. $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增

11.（德州一模 10）已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\pi$）的部分图象如图所示，将函数

$f(x)$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的$\frac{2}{3}$，纵坐标不变，再将所得函数图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列关于函数 $g(x)$ 的说法正确的是（　　）



A．$g(x)$ 的最小正周期为$\frac{2\pi}{3}$

B．$g(x)$ 在区间$[\frac{\pi}{9}，\frac{\pi}{3}]$上单调递增

C．$g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{4\pi}{9}$对称

D．$g(x)$ 的图象关于点（$\frac{\pi}{9}$，0）成中心对称

12．（2021•临沂一模 11）函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2x+1$，下列结论正确的是（　　）

A．$f(x)$ 在区间$[-\frac{\pi}{3}，\frac{\pi}{6}]$上单调递增

B．$f(x)$ 的图象关于点（$\frac{\pi}{6}$，0）成中心对称

C．将 $f(x)$ 的图象向左平移$\frac{5\pi}{12}$个单位后与 $y=-2\sin 2x$ 的图象重合

D．若 $x_1-x_2=\pi$，则 $f(x_1)=f(x_2)$

13.（烟台一模 11）已知函数 $f(x)=2|\sin x|+|\cos x|-1$，则

A.f(x)在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增　　B.直线$x=\frac{\pi}{2}$是 f(x)图象的一条对称轴

C.方程 f(x)=1 在$[0,\pi]$上有三个实根　　D.f(x)的最小值为-1

14.（菏泽一模 11）已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\phi)(\omega>0,\ 0<|\phi|<\frac{\pi}{2})$，$x=\frac{\pi}{2}$为函数的一条对称轴，且$f(\frac{3\pi}{8})=1$．若 $f(x)$ 在 $(-\frac{3\pi}{8}，-\frac{\pi}{4})$上单调，则 ω 的取值可以是（　　）

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{8}{3}$　　C．$\frac{16}{3}$　　D．$\frac{32}{3}$

15.（泰安一模 12）已知函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 与 $y=\cos(\omega x+\varphi)$ （$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）在 $x\in[0，\frac{5\sqrt{2}}{2}]$的图象恰有三个不同的交点 P，M，N．若△PMN 为直角三角形，则（　　）

A．$\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$　　B．△PMN 的面积 $S=\pi$

C．$\varphi\in[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$　　　　D．两函数图象必在 $x=\frac{9\pi-4\phi}{4\omega}$处有交点

三、填空

16.（济宁一模 13）已知$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$，则$\cos(2\alpha-\frac{\pi}{3})$=_________.

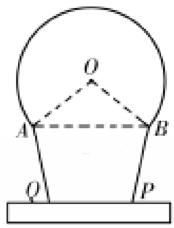
17.（泰安一模 13）已知 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，则 $1-\sin2\alpha=$____.

18.（烟台一模 13）已知$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，若$\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则 $\tan\alpha$ 的值为__________.

19.（聊城一模 13）已知$\cos\left(x-\frac{\pi}{10}\right)=-\frac{4}{5}$，则$\sin\left(2x+\frac{3\pi}{10}\right)=$_________.

20.（2021•临沂一模 14）曲线 $y=\ln x-\frac{2}{x}$在 $x=1$ 处的切线的倾斜角为 α，则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=$____.

21.（潍坊一模 16）某市为表彰在脱贫攻坚工作中做出突出贡献的先进单位，制作了一批奖杯，奖杯的剖面图形如图所示，其中扇形 OAB 的半径为 10，∠PBA＝∠QAB＝60°，AQ＝QP＝PB，若按此方案设计，工艺制造厂发现，当 OP 最长时，该奖杯比较美观，此时∠AOB＝_______.



四、解答

22.（济宁一模 17）已知△ABC 的三个内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，且 $b\cos C+c\cos B=2a\cos A$.

（1）求角 A;

（2）若 $a=2\sqrt{3}$，△ABC 的面积为 $2\sqrt{3}$，求 $b+c$ 的值.

23.（济南一模 17）在 ΔABC 中，已知角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c,$a=\sqrt{5}$,$b=3$,$\sin A+\sqrt{5}\sin B=2\sqrt{2}$.

(1)求角 A 的值；(2)求 ΔABC 的面积.

24.（日照一模 17）在△ABC 中 a, b, c 分别为内角 A, B, C 所对的边，若$2a\sin A=(2\sin B+\sin C)b+(2\sin C+\sin B)c$

(1) 求 A 的大小

(2) 求 sinB+sinC 的最大值.

25.（聊城一模 17）在①$a=4$，②ΔABC的周长为 9，③ΔABC的外接圆直径为$\dfrac{16\sqrt{15}}{15}$，这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并做出解答.

已知a,b,c分别为△ABC 内角 A，B，C 的对边，且$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{2}{3},\cos A=-\dfrac{1}{4}$，________，求△ABC 的面积.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

26.（菏泽一模 17）在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $b=1$，面积$S=\dfrac{a^2}{8\sin A}$．再从以下两个条件中选择其中一个作为已知，求三角形的周长.

（1）$B=\dfrac{\pi}{6}$；

（2）$B=C$.

27.（滨州一模 18）在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=2\sqrt{2}$，对角线 AC 与 BD 交于点 E，E 是 BD 的中点，且 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EC}$.

（1）若 $\angle ABD=\dfrac{\pi}{4}$，求 BC 的长；

（2）若 $AC=3$，求 $\cos\angle BAD$.

28.（烟台一模 18）将函数$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$图像上所有点向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，然后横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变），得到函数 g(x)的图象.

（1）求函数 g(x)的解析式及单调递增区间；

（2）在 ΔABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若$\sin(\frac{\pi}{3}-B)\cos(\frac{\pi}{6}+B)=\frac{1}{4}$，$c=g\left(\frac{\pi}{6}\right),b=2\sqrt{3}$，求 ΔABC 的面积.

29.（泰安一模 18）已知函数 $f(x)=\sin x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos^2 x$.

（1）求 $f(x)$ 在$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$上的最值；

（2）在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$f\left(\dfrac{A}{2}\right)=1$，$a=2\sqrt{3}$，△$ABC$ 的面积为$\sqrt{3}$，求 $\sin B+\sin C$ 的值.

30.（德州一模 17）在①$a\sin C=c\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)$，②$b=a\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{3}c\sin A$，③$a\cos B+b\cos A=2c\cos A$．这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并给出解答．

问题：在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，△ABC 外接圆面积为$\frac{4}{3}\pi$，$\sin B=2\sin C$，且_____，求△ABC 的面积.

31.（2021•淄博一模 17）在①$a\sin C=c\cos\left(A-\frac{\pi}{6}\right)$②$\sqrt{3}\sin\frac{B+C}{2}=\sin A$③$\cos 2A+3\cos A=1$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形 ABC 存在，求出其面积;若不存在，说明理由;

问题:是否存在三角形 ABC,它的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,且 a=$2\sqrt{3}$，b+c=$4\sqrt{3}$，____________?

注:如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

32.（潍坊一模 18）在①函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，②函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 P($\frac{\pi}{6}$，0)对称，③函数 $y=f(x)$ 的图象经过点 Q($\frac{2\pi}{3}$，－1)这三个条件中任选一个，补充在下面问题中并解答.

问题：已知函数 $f(x)=\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi$ ($\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$)最小正周期为 π，且_______，判断函数 $f(x)$ 在($\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$)上是否存在最大值？若存在，求出最大值及此时的 x 值；若不存在，说明理由.

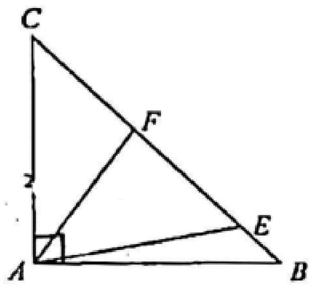
注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

33.（2021•临沂一模 17）在圆内接四边形 ABCD 中，BC=4,∠B=2∠D,∠ACB=$\frac{\pi}{12}$，求△ACD 面积的最大值。

34.（青岛一模 18）如图，在ΔABC中，$AB \perp AC, AB = AC = 2$,点 E,F 是线段 BC（含端点）上的动点，且点 E 在点 F 的右下方，在运动的过程中，始终保持$\angle EAF = \dfrac{\pi}{4}$不变，设$\angle EAB = \theta$弧度，

（1）写出θ的取值范围，并分别求出线段 AE,AF 关于θ的函数关系式；

（2）求ΔEAF面积 S 的最小值。



答案解析

一、单项选择

1.【答案】D

【解析】因为 α ∈(0, π), cos α = $-\dfrac{1}{2}$，所以 α =$\frac{2\pi}{3}$，$\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$，故选 D

2.【答案】D

【解答】$f(x)=\cos x(\cos x+\sqrt{3}\sin x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2x$，

$=\dfrac{1+cos2x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}sin2x$，

$=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$，

由 $x\in[-\frac{\pi}{3},\ m]$得 $2x+\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{2},\ 2m+\frac{\pi}{6}]$，

当 $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时取得最大值，

故 $2m+\frac{\pi}{6}\geq\frac{\pi}{2}$，即 $m\geq\frac{\pi}{6}$.

则实数 m 的最小值是$\frac{\pi}{6}$.

故选：D.

3.【答案】B

【解析】由题知 $\tan\alpha=\dfrac{12}{72}=\dfrac{1}{6}$，又 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{6},\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\alpha$ 为锐角，

则 $\sin\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{37}},\cos\alpha=6\sqrt{\dfrac{1}{37}}$，所以 $\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{12}{37}$ 。故选 B

4.【答案】B

【解析】∵$\sin\alpha=\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{1}{3}$，

∴$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\dfrac{1}{3}$，

∴$\dfrac{1}{2}\sin\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，即 $-\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{3}$，

∴$\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=-\dfrac{1}{3}$.

故选：B.

5.【答案】D

【解析】由诱导公式，得$\tan\frac{4\pi}{3}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$2\sin(-\frac{17\pi}{6})=-2\sin\left(2\pi+\frac{5\pi}{6}\right)=-2\sin\frac{5\pi}{6}=-1$，所以 P 点坐标为$(\sqrt{3},-1)$，由三角函数定义，得$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选 D。

6. 【答案】C

【解析】函数 y=sinx 的图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位后，得到函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$ 的图象，$f(x)=\cos x$ 为偶函数，排除 A；$f(x)=\cos x$ 的周期为 2π，排除 B；因为 $f(\frac{\pi}{2})=\cos\frac{\pi}{2}=0$,所以 y= $f(x)$ 的图象不关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，排除 D，故选 C。

7.【答案】A

【解析】$f(x)=\sqrt{3}\sin2x+2\cos^2x-1=\sqrt{3}\sin2x+\cos2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\varphi(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图像，

即 $g(x)=2\sin[2(x-\varphi)+\frac{\pi}{6}]=2\sin(2x-2\varphi+\frac{\pi}{6})$，

由$|f(x_1)-g(x_2)|=4$，得 $f(x_1)=2$，$g(x_2)=-2$，或 $f(x_1)=-2$，$g(x_2)=2$，

不妨设 $f(x_1)=2$，$g(x_2)=-2$，

则 $2x_1+\frac{\pi}{6}=2k_1\pi+\frac{\pi}{2}$，$2x_2-2\varphi+\frac{\pi}{6}=2k_2\pi-\frac{\pi}{2}$，

则两式作差得 $2x_1-2x_2=2k_1\pi+\frac{\pi}{2}-2k_2\pi+\frac{\pi}{2}+2\varphi=2(k_1-k_2)\pi+2\varphi$，

即 $x_1-x_2=(k_1-k_2)\pi+\varphi$，

则$|x_1-x_2|=|(k_1-k_2)\pi+\varphi|$，

∴当 $k_1-k_2=0$ 时，$|x_1-x_2|$最小值为 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

故选：A．

二、多项选择

8.【答案】BC

【解析】由$\vec{a}$与$\vec{b}$共线，得$f(x)=sin^4\frac{x}{2}+cos^4\frac{x}{2}=(sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2})^2-2\,sin^2\frac{x}{2}\cdot cos^2\frac{x}{2}=1-\frac{1}{2}sin^2x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}cos2x$，$T=\pi$，B 正确；将 f(x)向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位后，得到$y=\frac{1}{4}\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{3}{4}$的图象，A 错误；由$\cos\left(2\times\frac{3\pi}{2}\right)=-1$得，f(x)关于$x=\frac{3\pi}{2}$对称，C 正确；由$x\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$得，$2x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，y=cosx 在$\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$上为增函数，D 错误；故选 BC。

9.【答案】BC

【解析】由题 $g(x)=f(x+\frac{\pi}{6})=\sin[2(x+\frac{\pi}{6})-\frac{2\pi}{3}]=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

A 选项，$g(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，故 A 错误

B 选项，$g(\frac{\pi}{6})=\sin 0=0$，所以 $(\frac{\pi}{6},0)$ 是 $g(x)$ 的一个对称中心，B 正确

C 选项，由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in Z$

$[0,\frac{\pi}{4}]$ 是它的一个子集，故 C 正确

D 选项，由 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$，得 $2x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$，则 $\sin(2x-\frac{\pi}{3})\in[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}]$，D 错误

10.【答案】AC

11.【答案】AC

【解析】根据函数的图象：周期 $\frac{1}{2}T=\frac{5\pi}{12}-(-\frac{\pi}{12})=\frac{\pi}{2}$，解得 $T=\pi$，

故 $\omega=2$.

进一步求得 $A=2$.

当 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时，$f(\frac{5\pi}{12})=2\sin(\frac{5\pi}{6}+\varphi)=-1$，由于 $|\varphi|<\pi$，

所以 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$，

函数 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{2}{3}$，纵坐标不变，再将所得函数图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)=2\sin(3x+\frac{\pi}{6})$ 的图象，

故对于 A：函数的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{3}$，故 A 正确；

对于 B：由于 $x\in[\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{3}]$，所以 $2x+\frac{2\pi}{3}\in[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6}]$，故函数 $g(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减，故 B 错误；

对于 C：当 $x=\frac{4\pi}{9}$ 时，$g(\frac{4\pi}{9})=2\sin(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=-2$，故函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{4\pi}{9}$ 对称，故 C 正确；

对于 D：当 $x=\frac{\pi}{9}$ 时，$g(\frac{\pi}{9})=2$，故 D 错误.

故选：AC.

12.【答案】ACD

【解答】因为 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2x+1=\sqrt{3}\sin2x+\cos2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

令 $-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}$，得 $-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{6}$，即函数在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$ 上单调递增，A 正确；

令 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi$ 得，$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$，即对称中心为（$\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$，0）$k\in\mathbf{Z}$，（$\frac{\pi}{6}$，0）显然不符合，$B$ 错误；

将函数 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位后可得，$y=2\sin(2x+\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6})=-2\sin2x$，$C$ 正确；

由 $x_1=x_2+\pi$，则 $f(x_1)=2\sin(2x_1+\frac{\pi}{6})=2\sin(2x_2+2\pi+\frac{\pi}{6})=2\sin(2x_2+\frac{\pi}{6})=f(x_2)$，$D$ 正确．

故选：ACD．

13.【答案】BC

【解析】A 选项，当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$f(x)=2\sin x+\cos x-1$，$f(x)$ 不单调。A 错误

B 选项，$f(\pi-x)=2|\sin(\pi-x)|+|\cos(\pi-x)|-1=2|\sin x|+|\cos x|-1=f(x)$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 是它的一条对称轴

C 选项，$f(x)=1$，即 $2|\sin x|+|\cos x|=2$，当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，即 $2\sin x+\cos x=2$，$\sin x=1$ 或 $\sin x=\frac{3}{5}$，有两个零点；当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$，$2\sin x-\cos x=2$，$\sin x=\frac{3}{5}$，有 1 个零点，共 3 个零点。

D 选项　若 $f(x)_{\min}=-1$，即 $2|\sin x|+|\cos x|=0$，需要 $|\sin x|=0$，且 $|\cos x|=0$，矛盾，D 错误

14.【答案】BC

【解析】函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\phi)(\omega>0,\ 0<|\phi|<\frac{\pi}{2})$，$x=\frac{\pi}{2}$ 为函数的一条对称轴，

$\therefore\frac{\omega\pi}{2}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$．

$\because f(\frac{3\pi}{8})=1=2\sin(\frac{3\pi\cdot\omega}{8}+\varphi)$，即 $\sin(\frac{3\pi\cdot\omega}{8}+\varphi)=\frac{1}{2}$，

故 $\frac{3\pi\cdot\omega}{8}+\varphi=2n\pi+\frac{\pi}{6}$，或 $\frac{3\pi\cdot\omega}{8}+\varphi=2n\pi+\frac{5\pi}{6}$，$n\in\mathbf{Z}$，

$\because f(x)$ 在 $(-\frac{3\pi}{8},-\frac{\pi}{4})$ 上单调，$\therefore\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\geqslant-\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{8}$，$\therefore\omega\leqslant8$．

若 $\frac{\omega\pi}{2}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi\cdot\omega}{8}+\varphi=2n\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，$n\in\mathbf{Z}$，

求得 $\omega=\frac{8}{3}-8(2n-k)$，结合 $\omega\leqslant8$，可得 $\omega=\frac{8}{3}$（$n=1$，$k=2$）．

若 $\frac{\omega\pi}{2}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi\cdot\omega}{8}+\varphi=2n\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，$n\in\mathbf{Z}$，

求得 $\omega=-8(2n-k)-\frac{8}{3}$，结合 $\omega\leqslant8$，可得 $\omega=\frac{16}{3}$（$n=0$，$k=1$），

故选：BC．

15.【答案】ACD

【解析】∵两图象恰有三个交点 P，M，N，且△PMN 为直角三角形，

则△PMN 的高为$\sqrt{2}$，且是等腰直角三角形，

∴斜边长为 $2\sqrt{2}$，即周期 $T=2\sqrt{2}$，∴$\frac{2\pi}{\omega}=2\sqrt{2}$，解得 $\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$，故 A 正确．

∵△PMN 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=2$，故 B 错误．

当 $x\in[0,\frac{5\sqrt{2}}{2}]$时，$\omega x+\varphi\in[\varphi,\frac{5\pi}{2}+\varphi]$，

由正弦，余弦函数的图象可得：$-\frac{3\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$且$\frac{9\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{2}+\varphi<\frac{13\pi}{4}$，

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$，故 C 正确．

当 $x=\frac{9\pi-4\varphi}{4\omega}$时，$\omega x+\varphi=\frac{9\pi}{4}$，故 D 正确．

故选：ACD．

三、填空

16.【答案】$\frac{5}{9}$

【解析】$\cos(2\alpha-\frac{\pi}{3})=1-2\sin^2(\alpha-\frac{\pi}{6})=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

17.【答案】$\frac{9}{5}$

【解析】因为 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，

所以 $1-\sin2\alpha=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha+1-2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{\frac{1}{4}+1-2\times(-\frac{1}{2})}{\frac{1}{4}+1}=\frac{9}{5}$．

故答案为：$\frac{9}{5}$．

18.【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】$\sin(\frac{\pi}{2}+2\alpha)=\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{1}{3}$，$\therefore\cos^2\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

19.【答案】$\frac{7}{25}$

20.【答案】$\frac{\sqrt{10}}{10}$

【解答】由 $y=\ln x-\frac{2}{x}$，得$y'=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$，

∴$y'|_{x=1}=3$，由题意，$\tan\alpha=3$，

又 α∈[0，π)，联立$\begin{cases}\dfrac{sin\alpha}{cos\alpha}=3\\ sin^2\alpha+cos^2\alpha=1\end{cases}$，解得 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

∴$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

21.【答案】$\dfrac{\pi}{2}$

【解析】设∠ABO＝θ，则 AB＝20cosθ，PB＝10cosθ，

故 $OP^2=100+100\cos^2\theta-2\times10\times10\cos\theta\cos(60^\circ+\theta)=100+50\sqrt{3}\sin2\theta$，

故当 $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，OP 取最大值，此时∠AOB＝$\dfrac{\pi}{2}$.

四、解答

22.【解析】（1）因为 $b\cos C+c\cos B=2a\cos A$，

由正弦定理得，$\sin B\cos C+\sin C\cos B=2\sin A\cos A$，

即 $\sin(B+C)=2\sin A\cos A$，

故 $\sin A=2\sin A\cos A$，

因为 $\sin A>0$，

所以 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，

由 A 为三角形内角得，$A=\dfrac{\pi}{3}$；

（2）因为 $a=2\sqrt{3}$，△ABC 的面积为 $2\sqrt{3}$，

所以$\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc=2\sqrt{3}$，

所以 $bc=8$，

由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cos A=(b+c)^2-24=12$，

故 $b+c=6$.

23.【解析】

（1）因为$a=\sqrt{5}$，$\sin A+\sqrt{5}\sin B=2\sqrt{2}$，

所以 $\sin A+a\sin B=2\sqrt{2}$，因为 $a\sin B=b\sin A$，

所以 $\sin A+3\sin A=2\sqrt{2}$，解得 $\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

在$\triangle ABC$中，因为 $a<b$，所以 A为锐角，

所以 $A=\frac{\pi}{4}$；

（2）因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

所以 $c^2-3\sqrt{2}c+4=0$，解得 $c=\sqrt{2}$或$c=2\sqrt{2}$，

当$c=\sqrt{2}$时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$，

当$c=2\sqrt{2}$时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$，

所以 $\triangle ABC$的面积为$\frac{3}{2}$或 3．

24.【解析】（1）由已知，根据正弦定理得$2a^2=(2b+c)b+(2c+b)c$

即 $a^2=b^2+c^2+bc$

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

故 $\cos A=-\frac{1}{2}$，

∴$A=\frac{2\pi}{3}$

（2）$\sin B+\sin C=\sin B+\sin\left(\frac{\pi}{3}-B\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+B\right)$，

当 $B=\frac{\pi}{6}$ 时，$\sin B+\sin C$ 取最大值 1.

25.【解析】在△ABC 中，由$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{2}{3}$及正弦定理，得$\frac{b}{c}=\frac{2}{3}$，…………………………2 分

设$b=2k,c=3k$，则$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=16k^2$，所以$a=4k$．……………4 分

由$\cos A=-\frac{1}{4}$，得$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，……………………………………………6 分

选①：由$a=4$，得 k=1，由此可得$b=2,c=3$，………………………………………8 分

所以△ABC 的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\times 3\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$．…………………10 分

选②：由$a+b+c=9$，得$9k=9$，解得$k=1$，由此可得$b=2,c=3$，………8 分

所以△ABC 的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\times 3\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$．…………………10 分

选③：由ΔABC的外接圆直径为$\frac{16\sqrt{15}}{15}$，得$a=2R\sin A=\frac{16\sqrt{15}}{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=4$，

由$a=4$，得$k=1$，由此可得$b=2,c=3$，…………………………………………8 分

所以△ABC 的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\times 3\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$. ………………………10 分

26.【解析】（1）选 $B=\frac{\pi}{6}$，

由正弦定理得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2$，

故 $a=2\sin A$，$c=2\sin C$

因为 $S=\frac{a^2}{8\sin A}=\frac{1}{4}a$，

故$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{4}ac=\frac{1}{4}a$，

所以 $c=1$，$\sin C=\frac{1}{2}$，

故 $C=\frac{\pi}{6}$（$\frac{5\pi}{6}$舍去），

从而△ABC 为等腰三角形，$A=\frac{2\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}$，

此时三角形的周长 $2+\sqrt{3}$；

（2）选 $B=C$，

所以 $b=c=1$，$S=\frac{a^2}{8\sin A}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\sin A$，

故$\frac{a}{\sin A}=2$，

由正弦定理得，$\frac{b}{\sin B}=2$，则 $\sin B=\frac{1}{2}$，

从而 $B=C=\frac{\pi}{6}$，

从而△ABC 为等腰三角形，$A=\frac{2\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}$，

此时三角形的周长为 $2+\sqrt{3}$.

27.【解析】（1）在△ABD 中，由余弦定理知，$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos\angle ABD$，

$\therefore 8=16+BD^2-2\cdot 4\cdot BD\cdot\cos\frac{\pi}{4}$，化简得 $BD^2-4\sqrt{2}BD+8=0$，

解得 $BD=2\sqrt{2}$，

∵E 是 BD 的中点，∴$BE=\frac{1}{2}BD=\sqrt{2}$,

在△ABE 中，由余弦定理知，$AE^2=AB^2+BE^2-2AB\cdot BE\cdot\cos\angle ABD=16+2-2\times4\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=10$，

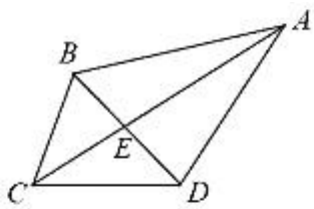
∴$AE=\sqrt{10}$,

∵$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EC}$，∴$AC=\frac{3}{2}AE=\frac{3\sqrt{10}}{2}$，

由余弦定理知，$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AE^2-BE^2}{2AB\cdot AE}=\frac{16+10-2}{2\times4\times\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$，

在△ABC 中，由余弦定理知，$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=16+(\frac{3\sqrt{10}}{2})^2-2\times4\times\frac{3\sqrt{10}}{2}\times\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{5}{2}$，

∴$BC=\frac{\sqrt{10}}{2}$.



（2）∵$AC=3$，$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EC}$，∴$AE=2$，

∵ $\angle AEB+\angle AED=\pi$，

∴$\cos\angle AEB=-\angle AED$，

设 $BE=DE=x$，

则$\frac{AE^2+BE^2-AB^2}{2AE\cdot BE}=-\frac{AE^2+DE^2-AD^2}{2AE\cdot DE}$，即$\frac{4+x^2-16}{2\cdot2x}=-\frac{4+x^2-8}{2\cdot2x}$，

解得 $x=2\sqrt{2}$，

∴$BD=2BE=4\sqrt{2}$，

在△ABD 中，由余弦定理知，$\cos\angle BAD=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\frac{16+8-32}{2\times4\times2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

28.

解：（1）$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$， ……………………………1 分

$f(x)$ 图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$ 的图象， ……………2 分

横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变）得到$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$图象，

所以$g(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$， ……3 分

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$， ……4 分

解得$-\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi$，

所以$g(x)$的单调递增区间为$[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$； ……5 分

（2）由（1）知，$c=g(\frac{\pi}{6})=2$， ……6 分

因为$\sin(\frac{\pi}{3}-B)\cos(\frac{\pi}{6}+B)=\cos^2(\frac{\pi}{6}+B)=\frac{1}{4}$，所以$\cos(\frac{\pi}{6}+B)=\pm\frac{1}{2}$，

又因为$B\in(0,\pi)$，所以$B+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6})$，

当$\cos(\frac{\pi}{6}+B)=\frac{1}{2}$时，$B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，$B=\frac{\pi}{6}$， ……7 分

此时由余弦定理可知，$4+a^2-2\times 2\times a\cos\frac{\pi}{6}=12$，

解得$a=\sqrt{3}+\sqrt{11}$， ……8 分

所以$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times(\sqrt{3}+\sqrt{11})\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2}$， ……9 分

当$\cos(\frac{\pi}{6}+B)=-\frac{1}{2}$时，$B+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$，$B=\frac{\pi}{2}$， ……10 分

此时由勾股定理可得，$a=\sqrt{12-4}=2\sqrt{2}$， ……11 分

所以$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$． ……12 分

29.【解析】（1）$f(x)=\sin x\cos(x+\frac{\pi}{6})+\cos^2 x$，

$=\sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)+\cos^2 x$

$=2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\sin x\cos x-\frac{1}{2}\sin^2 x+\cos^2 x$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}\times\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos x}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{3}{4}\cos 2x+\frac{1}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{1}{4}$，

由 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$得 $2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$，

故 $\sin(2x+\frac{\pi}{3})\in[\frac{1}{2},1]$，$f(x)\in[\frac{1+\sqrt{3}}{4},\frac{1+2\sqrt{3}}{4}]$，

即函数 $f(x)$ 的最大值$\frac{1+2\sqrt{3}}{4}$，最小值$\frac{1+\sqrt{3}}{4}$；

（2）$f(\frac{A}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(A+\frac{\pi}{3})+\frac{1}{4}=1$，

所以 $\sin(A+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由 A 为三角形内角得$\frac{\pi}{3}<A+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，

故 $A=\frac{\pi}{3}$，

因为 $a=2\sqrt{3}$，△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\sqrt{3}$，

所以 $bc=4$，

由余弦定理得 $b^2+c^2-a^2=bc$，

故 $b^2+c^2-12=4$，

所以$\begin{cases}b^2+c^2=16\\bc=4\end{cases}$，

解得 $b+c=2\sqrt{6}$，

由正弦定理得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=4$，

故 $b=4\sin B$，$c=4\sin C$，

$\sin B+\sin C=\frac{b+c}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

30.【解析】若选①$a\sin C=c\sin(A+\frac{\pi}{3})$，

由正弦定理得 $\sin A\sin C=\sin C\sin(A+\frac{\pi}{3})$，

因为 $\sin C>0$，

所以 $\sin A=\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$，故 $\tan A=\sqrt{3}$，

由 A 为三角形内角得 $A=\frac{\pi}{3}$，

由题意得△ABC 外接圆半径 $r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

由正弦定理得 $2r=\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{a}{\sin A}$，

所以 $a=2$，

又 $\sin B=2\sin C$，

所以 $b=2c$，

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $4=4c^2+c^2-2c^2$，

解得 $c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

若选②$b=a\cos C+\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin A$，

由正弦定理 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin A$，

整理得 $\cos A\sin C=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin A$，

因为 $\sin C>0$，

故 $\tan A=\sqrt{3}$，

由 A 为三角形内角得 $A=\frac{\pi}{3}$，

由题意得△ABC 外接圆半径 $r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

由正弦定理得 $2r=\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{a}{\sin A}$，

所以 $a=2$，

又 $\sin B=2\sin C$，

所以 $b=2c$，

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $4=4c^2+c^2-2c^2$，

解得 $c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

若选③$a\cos B+b\cos A=2c\cos A$，

由正弦定理得 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos A$，

即 $\sin(A+B)=2\sin C\cos A=\sin C$，

因为 $siinC>0$，

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，

故 $A=\frac{\pi}{3}$，

由题意得△ABC 外接圆半径 $r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

由正弦定理得 $2r=\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{a}{\sin A}$，

所以 $a=2$，

又 $\sin B=2\sin C$，

所以 $b=2c$，

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $4=4c^2+c^2-2c^2$，

解得 $c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

31.【解析】选择条件①

由正弦定理可得 $\sin A\sin C=\sin C\cos\left(A-\frac{\pi}{6}\right)$， ………………2 分

由于 $\sin C\neq 0$，可得 $\sin A=\cos\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A$

化简可得 $\frac{1}{2}\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$

即 $\tan A=\sqrt{3}$， ………………4 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$， ………………5 分

由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$，

解得 $bc=12$， ……………………………………7 分

从而解得 $b=c=2\sqrt{3}$ ， ………………9 分

因此 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=3\sqrt{3}$. ………………10 分

选择条件②:

因为$\sqrt{3}\sin\frac{B+C}{2}=\sqrt{3}\sin\frac{\pi-A}{2}$ 即$\sqrt{3}\cos\frac{A}{2}=\sin A$, ………2 分

由正弦二倍角公式可得: $\sqrt{3}\cos\frac{A}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$,

由于$\cos\frac{A}{2}\neq 0$, 所以$\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ………4 分

因为$A\in(0,\pi)$, 所以$\frac{A}{2}=\frac{\pi}{3}$即$A=\frac{2\pi}{3}$, ………5 分

由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2+bc=(b+c)^2-bc$,

由已知可得$bc=36$, ………7 分

法一: 由$\begin{cases}b+c=4\sqrt{3}\\bc=36\end{cases}$可得$b^2-4\sqrt{3}b+36=0$, $\Delta<0$, 方程组无解, …9 分

所以不存在满足条件的ΔABC. ………………10 分

法二: 由基本不等式可得$bc\le\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=12$, ………………9 分

所以不存在满足条件的ΔABC. ………………10 分

法三: 因为$b^2+c^2=(b+c)^2-2bc=48-72<0$, ………………9 分

所以不存在满足条件的ΔABC. ………10 分

选择条件③:

由余弦二倍角公式可得: $2\cos^2 A+3\cos A-2=0$, ………………2 分

解得$\cos A=\frac{1}{2}$或-2 (舍去), ………………4 分

因为$A\in(0,\pi)$, 所以$A=\frac{\pi}{3}$, ………………5 分

由余弦定理得: $a^2=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$,

解得$bc=12$, ………………7 分

从而解得$b=c=2\sqrt{3}$, ……………………9 分

因此$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=3\sqrt{3}$. ……………………10 分

32.【解析】$f(x)=\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi=\sin(\omega x+\varphi)$,

由已知函数 $f(x)$ 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\times\dfrac{\pi}{2}=\pi$，求得 $\omega=2$，

所以 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$,

若选①，则有 $2\times\dfrac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=k\pi-\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,

又因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $k=0,\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$,

所以 $f(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$,

当 $x\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$ 时，$t=2x-\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$,

所以当 $t=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值，最大值为 1，

若选②，则有 $2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=k\pi-\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,

又因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $k=0,\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$,

所以 $f(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$,

当 $x\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$ 时，$t=2x-\dfrac{\pi}{3}\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$,

所以当 $t=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{5\pi}{12}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值，最大值为 1，

若选③，则有 $2\times\dfrac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=2k\pi-\dfrac{11\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,

又因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $k=1,\varphi=\dfrac{\pi}{6}$,

所以 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$

当 $x\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$ 时，$t=2x+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{7\pi}{6})$,

显然，函数 $f(x)$ 在该区间上没有最大值.

33.【解析】∵四边形 ABCD 是圆内接四边形

17.解：∵ 四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形

∴ $\angle B+\angle D=\pi$ ………………………………………… 1 分

又 $\angle B=2\angle D$ ∴ $\angle B=\dfrac{2\pi}{3},\angle D=\dfrac{\pi}{3}$ ………………………………… 2 分

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=\dfrac{\pi}{12}$

∴ $\angle BAC=\pi-\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}$ ………………………………………… 3 分

由$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，得$AC=\frac{BC\sin B}{\sin\angle BAC}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{6}$ ………………………… 5 分

在$\triangle ACD$中，由余弦定理，得

$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos D$

即$24=AD^2+CD^2-AD\cdot CD\geqslant 2AD\cdot CD-AD\cdot CD=AD\cdot CD$， ………………… 7 分

$\therefore S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot CD\sin D=\frac{\sqrt{3}}{4}AD\cdot CD\leqslant 6\sqrt{3}$ ………………………… 9 分

当且仅当$AD=CD$时，取“=”

即$\triangle ACD$面积的最大值为$6\sqrt{3}$. ………………………………………… 10 分

34.【解析】（1）$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$，由题意知$\frac{AE}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{AB}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\Rightarrow AE=\frac{\sqrt{2}}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$，

$\frac{AF}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{AC}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\Rightarrow AF=\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}$；

（2）$S_{\triangle EAF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)\cos\theta}$

$=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin2\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1}\ge\frac{2}{\sqrt{2}+1}=2(\sqrt{2}-1)$.

当且仅当$\theta=\frac{\pi}{8}$时，取“＝”.